

# 伝達関数モデルの POS データへの適用

～回帰モデル, ARIMA モデル, 伝達関数モデルの予測精度比較～

上 田 隆 穂

田 島 博 和

## 1 序文

POS データとは大規模小売店, 主としてスーパーマーケットにおいて継続的に得られる単品毎の売上データである。そしてこのデータには価格, プロモーション, 気候などの売上高に影響を与えると思われるコーザルデータが通常共に記録されている。この POS データは利用可能になってから既に 5 年以上を経過しており, かなりの長期にわたる継続性のある時系列データとして利用可能になってきている。このようなデータに相性の良いと思われる予測手法の 1 つに時系列分析がある。特にボックス・ジェンキンスの ARIMA モデルやそれを拡張した多変量時系列モデルは予測の信頼性が高く, 経済学やファイナンスの部門などで 1970 年代から急速に盛んに利用されてきている<sup>1)</sup>。ところがマーケティングにおいては, 従来では適用可能なデータがそれほど存在しなかったため, 時系列分析の適用例は少なかった。しかしながら POS データは十分な長さを持つため, 時系列分析はかなりの将来性を秘めた手法である。というのはコーザルデータの影響はダイナミックである可能性が高いからである。このダイナミックな影響構造を時系列分析は容易に捉え, 精度の高い予測を可能にする。

今回の研究では前回の 1 変量の ARIMA モデルと回帰分析の精度比較の続編として時系列モデルの代表的な一つである伝達関数モデル (Transfer Function Model) をとりあげ, 概要を解説し, 回帰分析, ARIMA モデルと

の予測精度比較を試みる<sup>2)</sup>。

なお予測精度の比較のため従属変数である出力変数には前回と同様のデータを用い、独立変数に当たる入力変数には新たに価格データを用いる。

## 2 伝達関数モデルの概要

### 2.1 伝達関数モデルとは

時系列的に収集されたデータ構造のダイナミクスを分析する確率的手法を一般に時系列分析と呼ぶ。伝達関数モデルはその一つである。この手法にはさまざまなアプローチがあるが、ここでは主に Box & Jenkins (1976) に従う。

最初に ARMA モデルを紹介する。ARMA モデルとは AutoRegressive Moving Average の略であり、自己回帰移動平均モデルと訳される。今一変量時系列  $\{Y_t\}$  が与えられた時、各  $t$  期に於る値  $Y_t$  はそれぞれ或る確率分布に従うと見做すが、得られる観測値は各期毎に一ずつなので、統計量が求められない。そこで差分や平方根をとって、季節変動等を除去し、その期待値や分散等が  $t$  によらず一定、即ち定常化する事ができるとする。そこでこれ以降の時系列データは常に定常であると仮定する。

さて ARMA モデルは各  $t$  期に於る  $Y_t$  が自分自身とホワイトノイズと呼ばれる各期毎に独立かつ同一に (*i. i. d.*) 正規分布に従う確率項  $a_t$  の過去の値の関数として表されると考える。

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

ここでラグ演算子  $BY_t := Y_{t-1}$  を用いて上式を書き直すと、次の様になる。

$$\phi(B) Y_t = \theta(B) a_t \quad i. e. \quad Y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (1)$$

但し

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$a_t \sim N(0, \sigma_a^2) (i. i. d.)$$

一変量 ARMA モデル (1) に於て時系列  $\{Y_t\}$  に影響を与えているのは自分自身のみであるが、ここでは全く別の時系列  $\{X_t\}$  も  $\{Y_t\}$  に対して系統的に影響を与える様なモデルを考える。これを伝達関数モデルと呼ぶ。

今簡単化のために  $\{X_t\}$  は一変量であり、分布ラグモデル、即ち  $Y_t$  の現在の値が  $\{X_t\}$  の無限に多くの過去の値と攪乱項 (disturbance) と呼ばれる誤差項の関数として表わされると仮定する時、伝達関数モデルの一般形は次の様に書かれる。

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + \dots + v_j X_{t-j} + \dots + N_t \quad (2)$$

但し

$\{X_t\}, \{Y_t\}$ : 定常な時系列

$$N_t = \frac{1 - \theta_1 B^1 - \dots - \theta_q B^q}{1 - \phi_1 B^1 - \dots - \phi_p B^p} a_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t, \quad a_t \sim N(0, \sigma_a^2) (i. i. d)$$

ここで  $\{X_t\}, \{Y_t\}$  をそれぞれ説明変数、従属変数、又  $v(B) := \sum_{j=0}^{+\infty} v_j B^j$  を線形伝達関数 (LTF: Linear Transfer Function) と呼ぶ。干渉モデルや重回帰モデルは伝達関数モデルの特殊形である。

ここで LTF に対して次の仮定をおく。

(a) 無限個の説明変数の有限な変化は従属変数に有限の変化のしかもたらさない

これは式で書くと、次の様になる。

$$\sum_{j=0}^{+\infty} v_j = v_0 + v_1 + \dots + v_j + \dots = g < +\infty$$

又 B に関する無限次多項式である  $v(B)$  を有限個のデータで推定するのは不可能なので、更に次の仮定をおく。

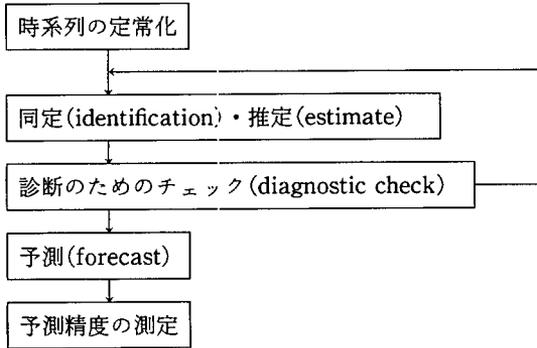
(b) LTF は任意の精度で近似可能である

(c) パラメータは可能な限り減らすべきである

仮定 (c) は儉約の原理である。この時 LTF は次の有理伝達関数 (RTF: Rational Transfer Function) で近似される。

$$v(B) = \frac{\omega_0 - \omega_1 B^1 - \dots - \omega_{s-1} B^{s-1}}{1 - \delta_1 B^1 - \dots - \delta_r B^r} B^b \quad (3)$$

図 2-1 分析手順



従ってモデルの一般形 (2) は次式で表される

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + N_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + N_t \quad (4)$$

ここで  $b$  は無効期間 (dead time) といい、 $X_t$  の変化が  $Y_t$  に影響を与える期間のズレを表す。

### 2. 2 伝達関数モデルの分析手順

伝達関数モデルのパラメータは伝達構造  $\frac{\omega(B)}{\delta(B)}$  と攪乱構造  $\frac{\theta(B)}{\phi(B)}$ 、及び無効期間  $b$  である。そしてその分析方法は次の様に同定と推定の段階が反復的 (iterative) である。

同定・推定の段階を以降簡単化のために決定と呼ぶ。

#### 2. 2. 1 同定・推定

決定は次の3段階に分かれる…LTFの決定→RTFの決定→攪乱項の決定

##### 2. 2. 1. 1 LTFの決定

LTFの決定方法には最小自乗法 (Box & Jenkins (1976)) と交差相関関数を用いる方法 (Liu & Hanssens (1982)) がある。

##### (a) 最小自乗法

伝達関数モデルの一般式 (2) から最小自乗法により直接 LTF の係数  $\{v_i\}$  を推定するのだが、攪乱項  $N_t$  が一般に正規分布に従わないため、推定がうまく行かない。そこで (季節変動がない場合には) 暫定的に  $N_t$  が AR(1) に

従うと仮定する。

この方法は、独立変数が多変量であっても適用できる事に注意したい。

(b) 交差相関関数法

まず最初に独立変数  $\{X_t\}$  をプリホワイトニングする。即ち、

$$X_t = \frac{\theta_x(B)}{\phi_x(B)} a_t \quad a_t \sim N(0, \sigma_a^2) \text{ (i. i. d)}$$

$$\beta_t := \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} Y_t$$

$$\varepsilon_t := -\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} a_t$$

とすると (2) は次の様に変形される。

$$\beta_t = v(B) a_t + \varepsilon_t$$

この時次式が成立する事がわかっている。

$$v_j = \rho_{a\beta}(j) \frac{\sigma_\beta}{\sigma_a}$$

但し

$$\sigma_a^2 := E((a_t - \mu_a)^2) \quad (\mu: \text{平均値})$$

$$\sigma_\beta^2 := E((\beta_t - \mu_\beta)^2)$$

$$\rho_{a\beta}(j) := \frac{E((a_t - \mu_a)(\beta_{t-j} - \mu_\beta))}{\sigma_a \sigma_\beta}$$

上の  $\rho_{a\beta}(j)$  を交差相関関数 (CCF: Cross Correlation Function) と呼ぶ。

2. 2. 1. 2 攪乱項の同定

$\hat{N}_t := Y_t - v(B) X_t$  に対して自己相関関数 (ACF: Autocorrelation Function), 偏自己相関関数 (PACF: Partial Autocorrelation Function) や拡張自己相関関数 (EACF: Extended Autocorrelation Function) を用いて, ARMA モデルを決定すれば良い<sup>3)</sup>。

2. 2. 1. 3 RTF の同定

LTF の係数の推定値  $\{\hat{v}_j\}$  がある次数以降有意に 0 と異なる (cut-off) ならば,  $\delta(B) = 1$  即ち  $v(B) = \omega(B)$  とすれば良い。又  $\{\hat{v}_j\}$  が次数と

共に減少するがいつまでたっても0と有意に異なる (die-out) ならば、コーナ法 (Liu & Hanssens (1982)) によって RTF を同定した後、方程式  $\frac{\omega(B)}{\delta(B)} = v(B)$  を解いて、実際に  $\omega(B)$ ,  $\delta(B)$  の係数を求めれば良い。

### 2. 2. 2 診断のためのチェック

ARMA モデルの場合と同様に残差  $\{\hat{a}_t\}$  の分析が非常に重要であり、残差系列がホワイトノイズになれば推定したパラメータが正しいという事ができる。また  $\{\hat{a}_t\}$  と説明変数にあたる  $\{X_t\}$  のプリホワイトニングされた系列との交差相関がほぼ0であることを確認する必要がある。

### 2. 2. 3 予測

予測期間の  $\{X_t\}$  が与えられている場合には推定されたモデルにこれを代入する事により予測値  $\{\hat{Y}_t\}$  が得られるが、 $\{X_t\}$  が与えられていない場合には、ARMA モデルにより説明変数の予測を行い、この予測値を代入する。

### 2. 2. 4 予測精度の測定

予測精度測定には MAPE (Mean Absolute Percentage Error) と MAE (Mean Absolute Error) を用いる。これらは観測時系列  $\{Y_t\}$  と推定時系列  $\{\hat{Y}_t\}$  に対して、次式で与えられる。

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{|\hat{Y}_t - Y_t|}{Y_t}$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\hat{Y}_t - Y_t|$$

## 3 伝達関数モデルの適用例

マーケティング関連の伝達関数モデル適用は従来、対売上高広告効果モデルが中心。これは広告がラグ効果持つ、データを得やすい、業界の関心が高い等の理由に基づく。

例えば Helmer 他 (1977) は伝達関数モデルの概要を述べた後、広告モデル比較で有名な Lydia Pinkam のデータを用いてそれまでに累積されたエコノメリックモデルや ARIMA モデルと伝達関数モデルの予測精度の比較

を行った。ここでは2つの伝達関数モデルが候補とされ、ともに他の予測モデルを凌ぐことが示された。

また Adams 他 (1981) は 10 の異なった地域で広告一売上高の関係を伝達関数モデルで表し、回帰分析との予測精度比較を行い、伝達関数モデルが上回ることを示した。

最も特徴的な適用例は Krishnamurthi 他 (1989) である。彼らはスプリット・ケーブル TV システムにより通常の広告量のコントロール・パネルと2倍の広告量を投じた実験パネルを分け、両者の購買量データ、ブランド価格を変数とし、広告量を干渉項として時系列モデルに組み込み広告の効果を推定した。このようにコントロール・グループを用いた時系列モデルは珍しく、今後の可能性を示している。

#### 4 実証分析

分析対象はマカロニ、食用酢、プレシェブローションを用いた。これらの3カテゴリーは成熟一未成熟の程度、競争状態、プロモーションの程度を基に選ばれた。それぞれの特徴を以下に示す。

マカロニ…成熟カテゴリーで、寡占状態にある。日清とオーマイでほとんどのシェアを占め、日清が圧倒的に強い。特売主導型で、特売時に大きな売れ行きを示す。

食用酢…成熟カテゴリーであり、ミツカンの独占状態。競合は内部のブランドもしくはサイズ間の競争が考えられる。マカロニと同じく、特売が多く、特売時を中心に売れている。

プレシェブローション…男性用の髭そり前につけるローションで、電気剃刀用である。まだ競合品はなく、全くの独占である。このカテゴリーは、そのプロダクト・ライフサイクルにおいて導入期にあると考えられる。また特売は殆どない。

使用する POS データは 89 年 3 月 27 日の週から約 90 週分、週次データで日経データバンク NEEDS から提供を受けた。これは関東におけるジャス

コ K 店のデータである。予測精度の基本的な比較方法は 80 週分程度のデータで時系列モデル及び重回帰モデルのパラメータを予測し、残りの 10 数週分のデータで予測を行い、観測値との誤差を検討する。モデルの比較の基準には MAPE 及び MAE を用いた。なお予測の対象としては 1000 人当たりの売上個数 (点数  $PI$ ) を用いる。この点数  $PI$  を用いることによって来店客数に影響を与える多くの原因を考慮せずに済む。

なお計算には Scientific Computing Associates 社の SCA を用いている。

#### 4. 1 マカロニのケース

分析対象は最大シェアの日清ママーサラダマカロニ 200 g。2 番手のオーマイマカロニ 300 g が競争商品と考えられるのでその価格を分析に入れる。

対象マカロニの売上点数  $PI$ 、週加重平均価格及び競合品の週加重平均価格をグラフで示すと図 4-1-1 になる。これよりトレンドはなさそうである。但し、分散は一定とは言えず、また自己共分散も一定になるとは考えにくい。この原因は価格のグラフを見てわかるように価格の動きによるものであろう。ここで売上の点数  $PI$  を従属変数に、自己価格と競合価格を独立変数にする。季節性に関してはなさそうである。

#### モデル式の同定及び推定

同定、推定時の対象データは 1 期～80 期、予測では 81 期～91 期とする。

まず最小自乗法を用いて LTF の決定を行う。仮にこのモデル式の形を次のように決めておく。但し、ここでは各変数はそれぞれ平均から差で表されている。

$$PI_t = W(B) PRICE 1_t + V(B) PRICE 2_t + \frac{1}{\phi(B)} a_t$$

ここで  $PI$  は売上点数  $PI$ 、 $PRICE 1$  は自己価格、 $PRICE 2$  は競合製品価格、 $a_t$  は残差、 $W(B) = W_0 - W_1B - \dots - W_{13}B^{13}$ 、 $V(B) = V_0 - V_1B - \dots - V_{13}B^{13}$ 、 $\phi(B) = 1 - \phi B$

としておく。上式のモデル式の残差はほぼホワイトノイズとなり、この同定された式に問題はないといえよう。

図 4-1-1 マカロニの点数PI と価格

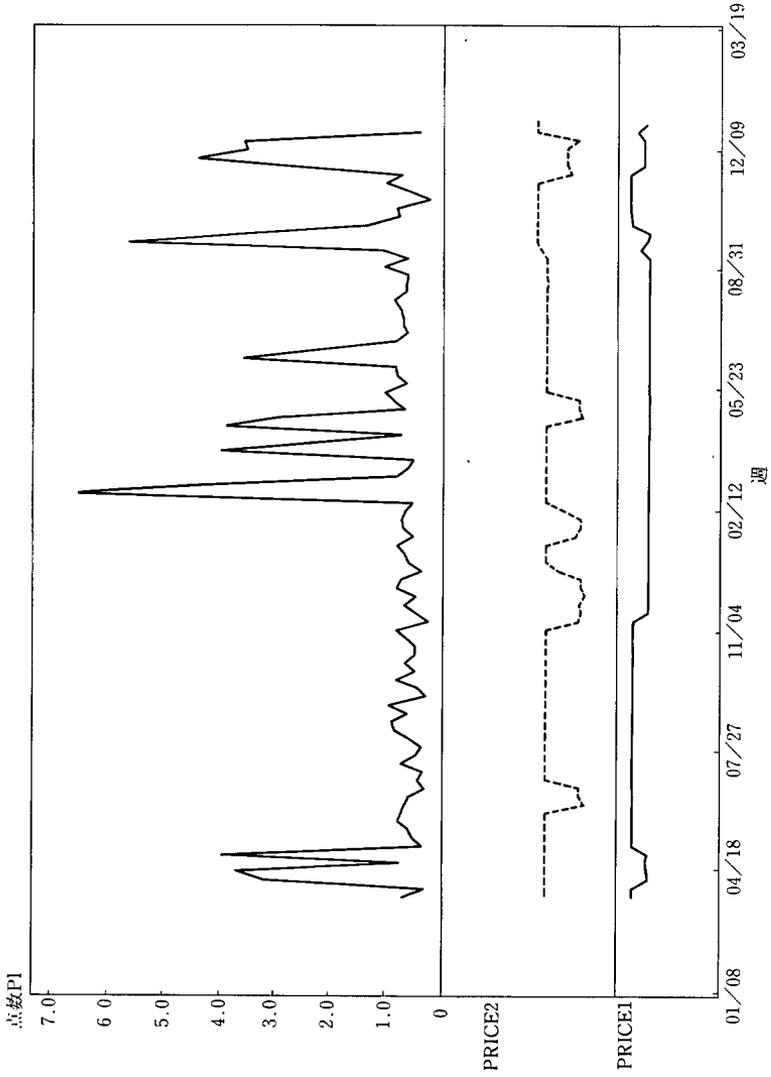


表 4-1-1  $W(B)$ からの RTF の同定

	1	2	3	4	5	6	7	
0	-1.00	1.00	-1.00	1.00	-1.00	1.00	-1.00	$b=0$
1	0.58	0.96	0.70	0.70	0.65	0.52	0.94	$s=3$
2	0.63	0.52	0.19	0.04	-0.05	-0.34	-0.64	
3	-0.23	0.16	0.02	0.02	0.03	0.15	0.24	
4	-0.17	0.06	-0.01	-0.01	0.04	-0.05	-0.10	
5	0.12	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.06	
6	-0.04	-0.05	-0.03	0.02	0.01	0.01	-0.03	
7	0.42	0.16	0.08	0.03	-0.00	0.01	0.01	

$\left| \begin{array}{c} \longleftarrow \\ r=1 \\ \longrightarrow \end{array} \right|$

また売上から2つの価格系列による説明部分を除いた攪乱項の系列部分の時系列構造の同定を ACF, PACF, EACF より行った。結果的に ARMA (1, 1) が同定された。

パラメータの推定結果である  $W(B)$  と  $V(B)$  のそれぞれからコーナー法を用い、RTF を同定する。 $W(B)$  をコーナー法にかけると次の表 4-1-1 が得られる。

$$\text{この表から } W(B) = \frac{\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2}{1 - \delta_1 B} \text{ となる。}$$

同様にして  $V(B)$  は以下のように同定された。

$$V(B) = \frac{v_1 B + v_2 B^2 + v_3 B^3}{1 - r_1 B} \quad (\omega, \delta, v, \gamma \text{ は係数})$$

続いて同定されたモデル式のパラメータを推定し、 $t$  値をみながら、完全に有意でないものを外してゆき、再推定を重ね、最終的に以下のモデル式を得た。

$$PI_t = \frac{-0.176 + 0.108 B^2}{1 + 0.457 B} PRICE 1_t + 0.021 B^2 \cdot PRICE 2_t + (1 + 0.347 B) a_t \quad (\text{モデル 1})$$

この式の残差の自己相関関数もホワイトノイズとなり、またプリホワイトニングした入力系列とモデル式の残差、及びプリホワイトニングした入力系

列同士の交差相関関数も問題はなかった。

モデル1の残差を見る限り、モデル自体に問題はなかったが、各データの定常性を重視し、階差を考慮したモデルについて全く同様の手順で分析を行い、結果的に次のようなモデルを得た。(∇は階差1を表す。)

$$\begin{aligned} \nabla PI_t = & (-0.147 + 0.097 B^2) \nabla PRICE 1_t \\ & + 0.024 B^2 \cdot \nabla PRICE 2_t + \frac{1 - 0.999 B}{1 - 0.325 B} a_t \end{aligned} \quad (\text{モデル 2})$$

このモデル2の残差の自己相関関数もホワイトノイズとなり、またプリホワイトニングした入力系列の自己相関関数の残差、及びプリホワイトニングした入力系列同士の交差相関関数も問題はなかった。

モデル1, 2からはマカロニの持つ価格の時系列効果の特徴が明らかになる。すなわち、 $t$ 期の自己価格の係数が最も大きく、しかも符号は負である。このことは値引きは当期売上に対して効くことを示す。そして( $t-2$ )期の自己価格及び競合価格が係数は小さいけれども有意であり、符号は正である。これから2週間の価格のラグの効果がマカロニには存在し、しかも2週間前の特売等値引きが当期の売上を抑えていることがわかる。この2週間というのが価格政策ポイントになる。何故2週間かは別途調査を行う必要がある。

#### 予測精度比較

モデル1, 2, 特売の干渉項を用いたARIMAモデル及び重回帰式による予測の精度を行う。但し、ARIMAモデルに関しては参考文献2を参照。なお点数PIの予測を行う前提として $t-1$ 期のデータは観測値を用いる。すなわち常に1期先のデータの予測を行うことになる。

この表4-1-2から、MAPEによる予測精度の高いものはモデル4の重回帰モデル、モデル3のARIMA干渉モデルとなり、次に伝達関数モデルが続いている。またMAEによれば、伝達関数モデル、ARIMA干渉モデルが殆ど変わらず最も良いが、重回帰モデルでは悪くなる。本来ならばこのMAPEとMAEの順位はほぼ一致するが、たまたま絶対誤差が大きく、パ

表 4-1-2 予測モデルの精度比較

	MAPE	MAE	R <sup>2</sup>
モデル 1	0.704	1.042	0.344
モデル 2	0.869	1.014	0.294
モデル 3	0.630	0.998	0.153
モデル 4	0.537	1.134	0.147

(注) MAPE, MAE は小さい方が予測力が高いことを示す。

(1) モデル 1…伝達関数モデル, 階差なし

$$PI_t = \frac{-0.176 + 0.108 B^2}{1 + 0.457 B} PRICE 1_t + 0.021 B^2 \cdot PRICE 2_t \\ + (1 + 0.347 B) a_t$$

(2) モデル 2…伝達関数モデル, 階差あり

$$\nabla PI_t = (-0.147 + 0.097 B^2) \nabla PRICE 1_t + 0.024 B^2 \cdot \nabla PRICE 2_t \\ + \frac{1 - 0.999 B}{1 - 0.325 B} a_t$$

(3) モデル 3…ARIMA 干渉モデルのうち最良予測度をもつもの

$$PI_t = 0.166 \cdot INT_t + (1 + 0.468 B) a_t$$

干渉項  $INT_t$  は特売が週 3 日以上に 1, それ以外は 0 の値をとる。

(4) モデル 4…重回帰モデルのうち最良のもの

$$PI_t = 5.325 - 0.04 PRICE 1_t + 0.232 B \cdot PI_t + \varepsilon_t$$

ここで  $B \cdot PI_t = PI_{t-1}$ ,  $\varepsilon_t$  は誤差を表す。

一センチ誤差を求める分母となる観測値が小さい場合には大きなパーセンテージ誤差がでる。しかも予測精度比較期間が短い場合にはこの大きな誤差を吸収できないので MAPE と MAE では順位が一致しない場合がある。従って、MAPE はその無名数性故、異なる製品間での比較にもちいる時に有効だが、同じ製品間での比較では MAE を用いる方がよい。また重回帰モデルが意外に高い予測度を出せたのはマカロニが大きく特売時に反応する性格を持つからであろう。

伝達関数モデルは MAE の観点から予測精度が悪くなく、しかも決定係数が高く、インプット系列の時系列構造を明らかにする点で評価ができる。

#### 4.2 食用酢のケース

この市場は上位三アイテムが同一メーカー（ミツカン）であり、しかもそれが総購買の 80% 以上を占める独占状態にある。

ここでは一位アイテムである穀物酢（500 ML）を対象とした分析を行う。マカロニの場合と同様に従属変数は、点数  $PI$  を表す  $PI$  とし、独立変数として当該アイテムの販売価格  $PRICE 1$  とカニバリゼーションを考慮して二位アイテムの販売価格  $PRICE 2$  を採用した。  $PI, PRICE 1, PRICE 2$  の時系列グラフは以下の図 4-2-1 である。

1~82 週のデータを用いてパラメータの推定を行い、そのパラメータと実際に得られた  $PRICE 1, PRICE 2$  を用いて、83~92 週の点数  $PI$  を予測し、精度の比較を行った。

まず最初に  $PI, PRICE 1, PRICE 2$  の定常化を行う。  $PI$  については平方根変換等を実施して分散一定化の改善はみられず、又連続差分や季節差分をとる必要もない。一方  $PRICE 1, PRICE 2$  の方は分散や季節差分については先と同様であるが、連続差分は一回とる必要があるかも知れない。そこで  $PI \times (PRICE 1, \nabla PRICE 1) \times (PRICE 2, \nabla PRICE 2)$  のそれぞれの組み合わせに対して攪乱項に  $AR(1)$  を仮定して LTF の推定を行い、更にコーナー法により RTF を同定した。その結果 10 モデル程度の RTF が推定の候補となったが、推定の段階で有意に影響しないパラメータをはずして再推定を行った結果得られたモデルの内 MAPE や MAE が高い 2 つを次に挙げ、表 4-2-1 に比較結果を示す。

$$\text{伝達関数モデル 1 } PI_t = \omega_0 \nabla PRICE 1_t + \frac{1}{1-\delta B} \nabla PRICE 2_t + \frac{1-\theta_1}{1-\phi_1} a_t$$

$$\text{伝達関数モデル 2 } PI_t = (\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2) \nabla PRICE 1_t + \frac{1-\theta_1}{1-\phi_1} a_t$$

伝達関数モデルは重回帰モデルや干渉関数モデルと比べて予測力で優れている。

#### 4. 3. プレシェーブローションのケース

説明変数をプレシェーブローションの価格とし、従属変数をその点数  $PI$  と

図4-2-1 食用酢の点数PIと価格

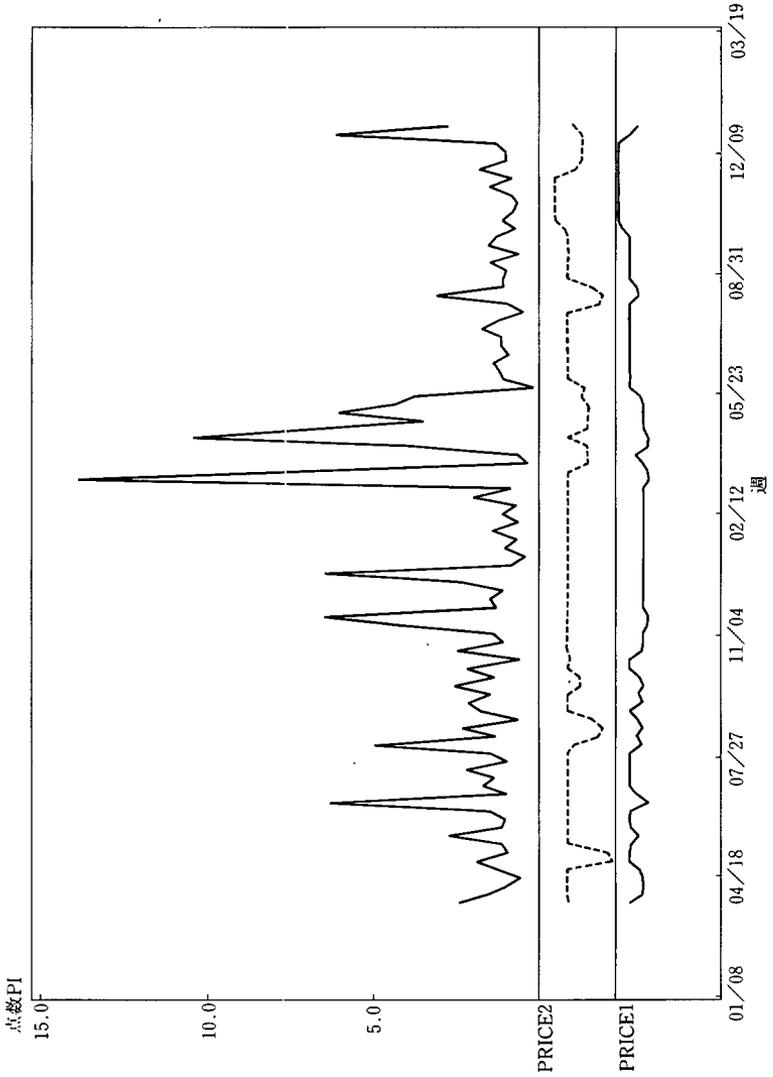


表 4-2-1 予測モデルの精度比較

	MAPE	MAE	$R^2$
伝達関数モデル 1	0.119	0.350	0.054
伝達関数モデル 2	0.173	0.510	0.104
重回帰モデル	1.131	1.741	0.082
干渉関数モデル	0.172	0.910	

(注) 重回帰モデルの説明変数は 2 つの価格である。また干渉関数モデルは自己の特売干渉項を含む  $AR(1)$  である。

する。

#### 4-3-1 定常化の判断

点数  $PI$  と価格について定常性を判断する。縦軸に点数  $PI$  と価格を横軸に日付をとりその実績をプロットしたものが図 4-3-1 である。図 4-3-1 からは価格、点数  $PI$  共に上昇トレンドはなく、また分散には特定の変化が見られない。次に価格及び点数  $PI$  の自己相関を見ると、異時点間において自己相関を持つと言える。特に価格についてはほぼ平均値を取っていると言えることができる。従って、価格と点数  $PI$  はほぼ定常であると言える。

他のケースと同様の手順により分析を実施した結果、最終的に同定されたモデルは以下の通りである。

$$PI = \omega_6 B^6 PRICE 1_t + \frac{1 - \theta_1 B}{1 - \phi_1 B} a_t$$

次に特定されたモデルから残差系列を算出し、残差の自己相関関数を見ると残差はホワイトノイズとなった。残差が自己相関を持たないのでモデルの同定が不適切であるとは言えない。

この決定された伝達関数モデルを使い 78 期から 87 期までの予測を行い MAPE, MAE を算出する。一方一変量モデルの  $ARMA(2, 0)$  によって予測を行い、伝達関数モデルと比較見当する。ここで比較対象とする  $ARMA(2, 0)$  は点数  $PI$  のみから同定されたモデルである。回帰分析は説明変数に価格を取った単回帰と説明変数に一期前の点数  $PI$  と  $t$  期の価格を取った重

図4-3-1 プレシエンテーションの点数PIと価格

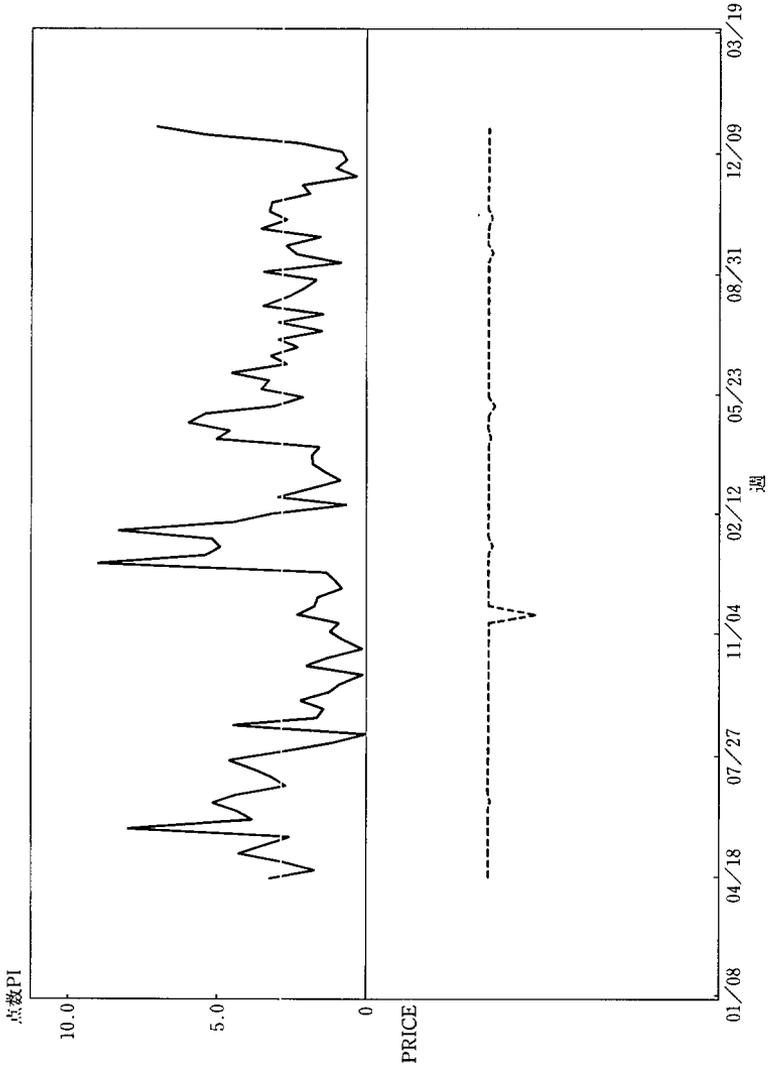


表 4-3-1 予測モデルの精度比較

	MAPE	MAE	$R^2$
伝達関数	0.4772	0.0536	0.394
ARMA(2, 0)	0.6657	0.0696	0.125
単回帰	1.0119	0.1007	0.000
重回帰	0.6976	0.0692	0.210

回帰とする。表 4-3-1 は比較の結果である。

この比較では伝達関数モデルの予測力は他のモデルに比べかなり高いことが言える。また、残差の絶対値の平均である MAE における比較も伝達関数モデルの予測力の高さを裏付けている。

## 5 結びにかえて

伝達関数モデルの POS データへの適用結果では食用酢、フレッシュローションのケースにおいて極めて予測力の改善が見られた。マカロニのケースではあまり予測精度がよくなかった。その理由について判断は難しいが、マカロニに関しては当期の特売効果が極めて強いことなどが挙げられよう。また伝達関数モデルは予測力のみならず説明変数の時系列的な影響測定に力を発揮することも明らかになった。

また前回の 1 変量 ARIMA モデルに続く今回の伝達関数モデルの予測力を試す分析から伝達関数モデルの有用性を示せたが、どの製品カテゴリーにモデルの適合性が高いのかを知ることは今後の課題である。併せてより高度な時系列分析手法の可能性を試すことも重要である。今後は同時方程式型伝達関数モデルによりブランド間競争やカニバリゼーションにも焦点を当て、最後に VARMA モデルにより因果関係の仮説をおかない複数アイテムの競合関係を考慮に入れた予測を行うつもりである。

- 1) 参考文献 1, p 33.
- 2) 参考文献 2.

- 3) 詳しくは参考文献2を参照。

#### 参考文献

1. 折谷吉治 (1979) 「時系列分析について」『金融研究資料』4, 9月.
  2. 上田隆穂, 田島博和, 最上健児 (1991), 「ARIMA モデルの POS データへの適用」『学習院大学経済論集』第28巻, 第3号.
  3. Scientific Computing Associates (1986), *THE SCA STATISTICAL MANUAL Version III*.
  4. Box, G. E. P & G. M. Jenkins (1976), *Time-Series Analysis : Forecasting and Control*, San Francisco : Holden Day.
  5. Liu, L. M. & D. M. Hanssens (1982), *Identification of Multiple-Input Transfer Function Models*, Communications in Statistics A 11.
  6. Liu, L. M. (1983), "Estimation of Rational Transfer Function Models," Working Paper No. 107, Scientific Computing Associates.
  7. Liu, L. M. (1985), "Use of Linear Transfer Function Analysis in Multivariate Time Series Identification," Working Paper No. 110, Scientific Computing Associates.
  8. Helmer, R. M. & J. K. Johansson (1977), "An exposition of the Box-Jenkins Transfer Function Analysis with an Application to the Advertising-Sales Relationship," *Journal of Marketing Research*, Vol. XIV, May, 227-239.
  9. Adems A. J. & M. M. Moriarty (1981), "The Advertising-Sales Relationship: Insights from Transfer-Function Modeling," *Journal of Advertising Research*, Vol. 21, No. 3, 41-46.
  10. Krishnamurthi, L., J. Narayan & S. P. Raj (1989). "Intervention Analysis Using Control Series and Exogenous Variables in Transfer Function Model: A Case Study," *International Journal of Forecasting* 5, 21-27.
- (謝辞) 実証研究部分のプレゼンテーションのケースは学習院大学経営学研究科博士前期課程の最上健児君に担当してもらった。この場を借りて謝意を表明したい。

(学習院大学助教授)

(学習院大学大学院博士後期課程)