《研究ノート》

bid•Supply model における限界価格の経済学的意味

榎 本 康 人

1 序

一般均衡論の完全競争市場のモデルでは，価格をどの買い手も売り手も自分の力だけでは変えることのできない所与のものとして受け入れて，price taker として行動する．そして，各 trader は，与えられた価格のもとで需要量，あるいは供給量を決定する．それから，その価格のもとでの個別の需要量と供給量が集計されて，総需要量と総供給量が求められる．前者が後者を上回れば価格を上げ，逆ならば価格を下げることで調整が行われる．しかし，この場合，誰がどのようにして価格を決定するのだろうか．一般均衡論の完全競争市場のモデルでは，通常この問題を解決するために，買い手でも売り手でもない第三者的な価格設定者として，競売人（auctioneer）の存在を想定する．実際，証券取引所や商品取引所にはこのような役割を果たす係員が存在する．しかし，このような役割を果たす人は，上記のような「よく組織された市場」以外には存在しない．そのような市場の価格は，何人かいる需要者と供給者の力関係によって決定されるはずである．だから，完全競争市場にいる trader が price taker として行動するという想定は，少なくとも「あまりよく組織されているとはいえない市場」には当てはまらないと考えられる．

それに対して，本稿で取り上げる bid•supply model では，当該財（$j=1, 2, \cdots\cdots m$）の市場価格は，その財の総供給量に対する，その財を買うために bid された財 $m+1$（貨幣）の合計量の割合として決定される．（その意味において，決定される市場価格を平均価格ともいうのである）．各 trader は，需要者については当該財を買うために bid した財 $m+1$（貨幣）の量の，供給者については供給した当該財の量の，それぞれ全体の合計量に対する割合に応じて市場価格の決定に関与できる．さらに，完全競争市場のモデルでは買い手も売り手も無数にいることが前提とされているが，この市場価格の決定ルールのもとでは，trader が何人であっても，そして彼らがどのような戦略をとろうとも市場価格を決定できる．

そこで，本稿では，平均価格に対して trader i の財 j の限界価格 p_j^i という概念の

意味づけを行う.

Shapley [1977] などでは, 各 trader i が寡占状態におかれていることを基礎とした意味づけをしている. trader i が買い手で財 j を1単位追加的に多く購入するとき, 彼は価格形成に影響力をもっているので財 j の価格は上昇する. そのため, 購入前の価格よりも多くの貨幣量 p_j^i を支払わなければならない. 〔これは, 需要独占の場合に生産要素価格 w よりも限界費用 $w(1+1/\varepsilon_s)$ $\{\varepsilon_s>0$ は供給の価格弾力性$\}$ が大きくなることと形式的には同じである.〕 同様に, trader i が売り手で財 j を1単位追加的に多く販売するとき, 彼は価格形成に影響力をもつので財 j の価格は下落する. そのため, 販売前の価格よりも少ない貨幣量 p_j^i しか受け取れない. 〔これは, 供給独占の場合に生産物価格 p よりも限界収入 $p(1-1/\varepsilon_d)$ $\{\varepsilon_d>0$ は需要の価格弾力性$\}$ が小さくなることと形式的には同じである.〕

それに対して, 本稿における限界価格 p_j^i への意味づけは, trader i の財 j と財 $m+1$ (貨幣) に対する選好を基礎としたものである (Shubik [1973] はこれとは似たモデルであるが, このモデルでは限界価格という概念は定義できない.) 本稿では, 定理1として, 限界価格 p_j^i が trader i の財 $m+1$ (貨幣) に対する財 j の限界代替率に等しいことを証明する. すなわち, p_j^i とは, trader i が財 j の買い手ならばそれを1単位追加的に買うために支払ってもよいとする最高価格であり, trader i が財 j の売り手ならばそれを1単位追加的に売るときに受け取ってもよいとする最低価格であるということである.

さらに, k 重レプリカ経済の bid•supply model において, $k\to\infty$ のとき Nash 均衡 final allocation が競争均衡 final allocation に収束するという極限定理が Shubik [1973], Shapley and Shubik [1977], 及び Dubey and Shubik [1978] で証明されているが, 本稿では, 定理2として k 重レプリカ経済のすべてのタイプ i の trader の限界価格ベクトル ${}_kp^i$ が $k\to\infty$ のときに競争均衡価格ベクトル p^* に収束することを証明する. その証明は, 任意の trader (i,t) の戦略が $k\to\infty$ のとき市場価格の決定に全く影響を与えなくなることをより克明にみせるような計算法で行う.

2 bid•supply model

n 人の trader が取引を行う市場ゲームを考える. 各 trader i $(i=1,2\cdots\cdots n)$ は, m 個の財を財 $m+1$ を貨幣として用いて取引を行う. trader i の財の初期保有ベクトルを $a^i=(a_1^i, a_2^i, \cdots\cdots a_{m+1}^i)\in R_+^{m+1}$ とする. また, その効用関数 u^i: $R_+^{m+1}\to R$ は強凹で2回連続微分可能で非減少的であると仮定する.

ここで, bid•supply model の市場ゲームを定義する. trader i の戦略は, $(b^i, q^i)\in R^m\times R^m$ と表されて, q_j^i は trader i が財 j を q_j^i の量だけ供給する offer を表し,

b_j^i は財 j を購入するために財 $m+1$ (貨幣) を b_j^i の量だけ財 j の市場に bid することを表す．このとき，trader i の戦略集合は，

$$S^i=\left\{(b^i, q^i)\in R_+{}^m\times R_+{}^m \mid q_j{}^j \leqq a_j{}^i \text{and } b_j{}^i q_j{}^i=0^{1)}\right.$$

$$\left.\text{for all } j=1, 2\cdots\cdots m, \text{ and} \sum_{j=1}^m b_j{}^i \leqq a_{m+1}{}^i\right\}$$

さらに，　$S=S^1\times S^2\times\cdots\cdots\times S^n$

$S^{-i}=S^1\times\cdots\cdots\times S^{i-1}\times S^{i+1}\times\cdots\cdots\times S^n$

とかくことにし，S^i, S, S^{-i} の元をそれぞれ代表的に s^i, s, s^{-i} とかくことにする．

すべての trader の戦略の組 $s\in S$ が決定されたとき，outcome として，まず，財 j の価格 p_j (平均価格)，したがって，$p=(p_1, \cdots\cdots p_m, 1)\in R_+{}^{m+1}$ が次のように決定される．

$$p_j=\frac{\sum_{l=1}^n b_j{}^l}{\sum_{l=1}^n q_j{}^l}=\frac{B_j{}^{-i}+b_j{}^i}{Q_j{}^{-i}+q_j{}^i} \qquad j=1, 2\cdots\cdots m$$

$$\text{ただし } B_j{}^{-i}=\sum_{l\neq i} b_j{}^l,\ Q_j{}^{-i}=\sum_{l\neq i} q_j{}^l$$

もし $\sum_{i=1}^n q_j{}^i=0$ ならば，$p_j=0$ になるものとする．

trader i の final allocation $(x_1{}^i, \cdots\cdots x_m{}^i, x_{m+1}{}^i)$ は次のように決定される．

$$x_j{}^i=\xi_j{}^i(s)=\begin{cases} a_j{}^i-q_j{}^i+\dfrac{b_j{}^i}{p_j} & \text{if } p_j>0 \text{ and } j=1, \cdots\cdots m \\ a_j{}^i-q_j{}^i & \text{if } p_j=0 \text{ and } j=1, \cdots\cdots m \\ a_{m+1}{}^i-\sum_{j=1}^m b_j{}^i+\sum_{j=1}^m p_j q_j{}^i & \end{cases}$$

このとき，$(x_1{}^i, \cdots\cdots x_m{}^i, x_{m+1}{}^i)$ は，関係式

$$x_{m+1}{}^i=a_{m+1}{}^i+\sum_{j=1}^m\left\{\frac{B^{-i}{}_j(a_j{}^i-x_j{}^i)}{Q^{-i}{}_j+a_j{}^i-x_j{}^i}\right\}$$

を満たす．このとき，右辺を $F^i(x_1{}^i, \cdots\cdots x_m{}^i)$ と関数の形でかくとすると凹関数になる．

trader i の利得関数は，

$$P^i(s)=u^i(\xi^i(s))$$

(定義) 戦略の組 $s^0\in S$ が次の条件を満たすとき，Nash 均衡であるという．

for all $i=1, 2\cdots\cdots n$

$$P^i(s^o) \geqq P^i(s^i, s^{o-i}) \text{ for all } s^i \in S^i$$

3 Nash 均衡と限界価格

〔命題1〕

(1) すべての trader i $(=1, 2\cdots\cdots n)$ について，$\dfrac{\partial u^i}{\partial x_{m+1}{}^i}>0$

(2) 各財 i $(=1, 2\cdots\cdots m)$ について，$a_{m+1}{}^i>0$，かつ$\dfrac{\partial u^i}{\partial x_j{}^i}>0$

となる trader i が少なくとも2人存在する．

(3) 各財 j $(=1, 2\cdots\cdots m)$ について，$a_j{}^i>0$ となる trader i が少なくとも2人存在する[2]．

この3つの条件が成り立つならば，Nash 均衡が存在する．

(証明) Dubey and Shubik [1978] Theorem 1 ■

〔補題〕 Nash 均衡のもとでの各 trader i の final allocation $x^{oi}=(x^o{}_1{}^i\cdots\cdots x_m{}^{oi}, x_{m+1}{}^{oi}) \in R_+{}^{m+1}$ は，予算制約 $p^i \cdot x^i = p^i \cdot a^i + \sum_{j=1}^{m}(p_j q_j{}^i - b_j{}^i + \dfrac{p_j{}^i}{p_j} b_j{}^i - p_j{}^i q_j{}^i)$ のもとで効用を極大にする final allocation でもある，逆もまた真である．

ただし，$p_j{}^i = \left(\dfrac{B_j{}^{-i}+b_j{}^i}{Q_j{}^{-i}+q_j{}^i}\right)^2 \dfrac{Q_j{}^{-i}}{B_j{}^{-i}}$ $j=1, 2\cdots\cdots m$, $p_{m+1}{}^i-1$

これを trader i の財 j の限界価格 (marginal price) という[3]．

(証明) Dubey and Shubik [1978] の Lemma 4 を修正したもの．■

〔定理1〕

命題1の条件 (1) (2) (3) が成り立つならば，Nash 均衡のもとでの限界価格 $p_j{}^i$ は，trader i の財 $m+1$ (貨幣) に対する財 j の限界代替率に等しい．

(証明) Nash 均衡における final allocation $x^{oi}=(x^o{}_1{}^i\cdots\cdots, x^o{}_m{}^i, x^o{}_{m+1}{}^i)$ は，制約

$$x_{m+1}{}^i = F^i(x_1{}^i, \cdots\cdots x_m{}^i)$$

のもとで，効用 $u^i(x_1{}^i, \cdots\cdots x_m{}^j, x_{m+1})$ を極大にしている．その必要条件は，ラグランジュの未定乗数法を用いて次のように求められる．

$$L^i = u^i(x_1{}^i, \cdots\cdots x_m{}^i, x_{m+1}{}^i) + \lambda^i\{F^i(x_1{}^i\cdots\cdots x_m{}^i) - x_{m+1}{}^i\}$$

$$\frac{\partial L^i}{\partial x_j{}^i} = \frac{\partial u^i}{\partial x_j{}^i} + \lambda^i \frac{\partial F^i}{\partial x_j{}^i} = 0 \qquad j=1, 2\cdots\cdots m$$

$$\frac{\partial L^i}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial u^i}{\partial x_{m+1}} - \lambda^i = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{\partial u^i}{\partial x_j{}^i}}{\lambda^i} = -\frac{\partial F^i}{\partial x_j{}^i} \quad , \quad \frac{\partial u^i}{\partial x_{m+1}} = \lambda^i$$

他方，$p_j{}^i$, $x_j{}^i$, 及びF^i の定義から，

$$p_j{}^i = -\frac{\partial F^i}{\partial x_j{}^i}$$

したがって，上で求めた条件を代入すると，

$$p_j{}^i = \frac{\dfrac{\partial u^i}{\partial x_j{}^i}}{\dfrac{\partial u^i}{\partial x_{m+1}{}^i}} = \left(-\frac{dx_{m+1}{}^i}{dx_j{}^i}\right)_{du=0}$$

■

この定理が意味することは，trader i が財 j の売り手 ($p_j{}^i>0$) ならば，$q_j{}^i$ は財 j の追加的1単位の販売量の増加に対して対価として受け取ってもよいとする最低価格であり， trader i が財 j の買い手 ($b_j{}^i>0$) ならば，$p_j{}^i$ は財 j の追加的1単位の購買量の増加に対して支払ってもよいとする最高価格であるということである. trader i が財 j の売り手ならば $b_j{}^i=0$ だから，

$$p_j{}^i = \frac{B_j Q_j}{(Q_j+q_j{}^i)^2} \qquad , p_j = \frac{B_j}{Q_j+q_j{}^i}$$

したがって，$p_j{}^i \leqq p_j$ (等号は $q_j{}^i=0$ のとき成立する.)[4]
すなわち，市場ゲームのルールから決定される価格 p_j が trader i が売ってもよいとする最低価格 $p_j{}^i$ より高いので，彼は財 j を売る incentive をもつ. 同様に，trader i が財 j の買い手ならば $q_j{}^i=0$ だから，

$$p_j{}^i \geqq p_j \text{ (等号は } b_j{}^i=0 \text{ のとき成立する.)}$$[4]

すなわち，市場ゲームのルールから決定される価格 p_j が trader i が買ってもよいとする最高価格 $p_j{}^i$ よりも安いので，彼は財 j を買う incentive をもつ.

4　限界価格の観点からみた極限定理

前節までの仮定を満たす効用関数 u^i と財の初期保有 a^i をもつタイプ $i\,(=1, 2\cdots\cdots n)$ の trader が，各タイプについてそれぞれ k 人ずついる k 重レプリカ経済を考える. $(r=1, 2\cdots\cdots k)$

以下では，任意の trader (i, t) の戦略の選択に注目することにする. 簡単化のために，タイプ h ($\neq i$) についてはすべての $r=1, 2\cdots\cdots k$ に対して，

$$\hat{b}_j{}^h = {}_r b_j{}^h, \text{ かつ } \hat{q}_j{}^h = {}_r q_j{}^h$$

とおき，タイプ i については t ではないすべての r に対して，

$$\hat{b}_j{}^i = {}_r b_j{}^i, \quad \text{かつ} \quad \hat{q}_j{}^i = {}_r q_j{}^i$$

とおくことにする.〔^は trader (i, t) 以外の trader であることを強調するためにつけた記号である.〕

前節までの市場ゲームと同様に，このk重レプリカ経済の財jの価格は次のように決定されるものとする.

$$_k p_j = \frac{_k B_j + {}_t b_j{}^i}{_k Q_j + {}_t q_j{}^i} = \frac{k \sum_{h \neq i} \hat{b}_j{}^h + (k-1)\hat{b}_j{}^i + {}_t b_j{}^i}{k \sum_{h \neq i} \hat{q}_j{}^h + (k-1)\hat{q}_j{}^i + {}_t q_j{}^i}$$

$$j = 1, 2 \cdots\cdots m \qquad _k p_{m+1} = 1$$

（定義） $[(x^{*1}, x^{*2} \cdots\cdots x^{*n}), p^*]$（ただし，$x^{*i} \in R_+{}^{m+1}$, $p^* \in R_+{}^{m+1}$）が次の条件を満たすとき，競争均衡であるという.

すべての $i = 1, 2 \cdots\cdots n$ について，

$$u^i(x^{*i}) = \max_{x^i} [u^i(x^i) | p^* \cdot x = p^* \cdot a^i]$$

かつ

$$\sum_{i=1}^n x^{*i} = \sum_{i=1}^n a^i$$

〔命題 2〕 点列 $\{_k s^*\}$ を $k \to \infty$ のとき $_k s^* \to s^*$, $_k p^* \to p^*$ となるようなk重レプリカ経済の type-symmetric5)で interior5)な Nash 均衡の系列とし，点列 $\{_k p^*\}$ をそのとき市場価格ベクトルの系列とする．さらに，s^* のときの final allocation を $(x^{*1}, \cdots\cdots x^{*n})$ とする.

そのとき，$[(x^{*1} \cdots\cdots x^{*n}), p^*]$ は，$x^{*i} = {}_v x^i$ for all $v = 1, 2 \cdots\cdots k$ となるような競争均衡である.

（証明） Dubey and Shubik [1978] の Theorem 2 ■

さて，上の極限定理が成り立つことを限界価格を用いてみていく.

〔定理 2〕

すべてのタイプiの trader の Nash 均衡における限界価格ベクトル $_k p_j{}^i$ は，$k \to \infty$ のとき競争均衡価格ベクトル p^* に収束する6).

（証明） k 重レプリカ経済の任意の trader (i, t) の財jの限界価格は，3節の補題における定義と同様に次のように定義できる.

$$_k p_j{}^i = \left[\frac{k \sum_{h \neq i} \hat{b}_j{}^h + (k-1)\hat{b}_j{}^i + {}_t b_j{}^i}{k \sum_{h \neq i} \hat{q}_j{}^h + (k-1)\hat{q}_j{}^i + {}_t q_j{}^i} \right]^2 \frac{k \sum_{h \neq i} \hat{q}_j{}^h + (k-1)\hat{q}_j{}^i}{k \sum_{h \neq i} \hat{b}_j{}^h + (k-1)\hat{b}_j{}^i}$$

$$=\left[\frac{\sum_{h\neq i}\hat{b}_j{}^h+\left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{b}_j{}^i+\frac{1}{k}{}_tb_j{}^i}{\sum_{h\neq i}\hat{q}_j{}^h+\left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{q}_j{}^i+\frac{1}{k}{}_tq_j{}^i}\right]^2\frac{\sum_{h\neq i}\hat{q}_j{}^h+\left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{q}_j{}^i}{\sum_{h\neq i}\hat{b}_j{}^h+\left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{b}_j{}^i}$$

$k\to\infty$ のとき，すべての i について，

$${}_kp_j{}^i\to\frac{\sum_{l=1}^{n}\hat{b}_j{}^l}{\sum_{l=1}^{n}\hat{q}_j{}^l}$$

ここで，

$$p_j{}^*=\frac{\sum_{l=1}^{n}\hat{b}_j{}^l}{\sum_{l=1}^{n}\hat{q}_j{}^l}$$

とおいて，$p^*=(p_1{}^*\ \cdots p_m{}^*, 1)$ が競争均衡であるための条件を満たしていることを確認すればよい．

補題における予算制約

$${}_kp^i\cdot x^i={}_kp^i\cdot a^i+\sum_{t=1}^{n}\left({}_kp_jq_j{}^i-b_j{}^i+\frac{{}_kp_j{}^i}{{}_kp_j}b_j{}^i-{}_kp_j{}^iq_j{}^i\right)$$

のもとで効用極大化を達成している final allocation ${}_kx^i$（補題よりこれは Nash 均衡 final allocation）は，$k\to\infty$ のとき，したがって ${}_kp^i\to p^*$ のとき，（競争均衡の定義における）予算制約 $p^*\cdot x^i=p^*\cdot a^i$ のもとで効用極大化を達成している final allocation x^{*i} に収束する．■

ここで注意すべきことは，$p^*{}_j$ の定義に＾のついた戦略変数だけが残ることである．これは，任意の trader (i, t) の戦略が $k\to\infty$ のときに市場価格に全く影響を与えないことに他ならない．

* 本稿をまとめるにあたって法政大学の中山幹夫教授と一橋大学の室田武教授に貴重なコメントをいただいた．ここに謝意を表わしたい．尚，本稿に誤りがあればそれは筆者自身のみの責任である．

1) $b_j{}^i>0$, かつ $q_j{}^i>0$ ではないこと．すなわち，買い取引と売り取引のいずれか一方を行うか，全く取引を行わないこと．

2) 仮定 (1) は，すべての trader が財 $m+1$（貨幣）を多く保有するほど効用が高いということ．仮定 (2) は，各財 j それぞれについて効用がその保有量について単調増加的で，かつ財 $m+1$（貨幣）を保有している trader が，少なくとも2人存在するということ．すなわち，各財 j それぞれについて，その買い手となる tra-

der が少なくとも 2 人いるということ．仮定 (3) は，(1) と合わせて各財 j について，その売り手となる trader が少なくとも 2 人存在するということ．したがって，(1) (2) (3) のもとでは，$B_j>0, Q_j>0$.

3) Dubey and shubik [1978] の Lemma 4 における定義．Postlewaite and Schmeidler [1978] においても全く同じ定義がされている．

4) $p_j<p_j^i$, あるいは $p_j>p_j^i$ ということは，まだ Pareto 改善が可能ということ．しかし，有限人でのこの市場ゲームでは，数学的に無視しうる範囲でしか Pareto 最適にならない．(Dubey [1980]) trader i が財 j の買い手であるときには b_j^i/B_j が，売り手であるときには q_j/Q_j^i が 0 に近づくにつれ，final allocation が Pareto 最適なものに近づく．[Postlewait and Schmeidler (1978)]

5) 同じタイプ trader が全員同じ戦略をとるとき，その戦略の組み合わせは，*type-symmetric* であるという．また，すべてのタイプ i の戦略 (b^i, q^i) の組み合わせ s について，$\sum_{j=1}^{m} b_j^i < a_{m+1}{}^i$ が成り立つとき，すなわち，trader 全員が財 $m+1$ (貨幣) をすべて使い切らないとき，そのときの戦略の組み合わせは *interior* であるという．

6) Shubik [1973] や Shapley and Shubik [1977] とは異なる計算法で結論を導出している．

参考文献

Dubey, P. [1980] "Nash Equilibria of Market Games: Finiteness and Inefficiency." J. Econ. Theory. 22: 363—376.

Dubey, P. and Shubik, M. [1978] "The Noncooperative Equilbria of a Closed Trading Economy with Market Supply and Bidding Strategies J. Econ. theory. 17: 1—20.

Postlewaite, A. and Schmeidler, D. [1978] "Approximate Efficiency of Non-Walrasian Nash Equilibria." Econometrica. 46: 127—134.

Shapley, L. S., [1977] "Noncooperative General Exchange." in Theory and Measurement Externalities, edited by A. Y. Lin. New York: Academic Press.

Shapley, L. S. and Shubik, M. [1977] "Trade Using One Commodity as Means of Payment" J. Polit. Econ. 85: 937—968.

Shubik, M. [1973] "Commodity Money, Oligopoly, Credit and Bankruptcy in a General Equilibrium Model" Western Econ. J. 10: 24—38.

(一橋大学大学院博士課程)