資産需要の双対性アプローチと資産所得課税の厚生効果の分析
——距離関数の適用可能性とその特定化——

金　子　能　宏

1　はじめに

資産需要方程式体系 (asset demand systems) は，累積する国債のクラウディング・アウトや金融政策の資産選択への影響を実証的に分析するために利用される．租税の分析においても，これを用いた資産所得課税の資産選択に対する効果の分析が行われている[1]．これらの研究では，資産需要関数の推定結果から把握される資産項目の間での代替性に注目して，金融政策や資産所得課税の変更により収益率が変化すると資産項目の間でどのような代替が生じるかが分析される．ただし，実証分析で利用される資産需要関数は[2]，絶対的危険回避度一定 (CARA. constant absolute risk aversion) または相対的危険回避度一定 (CRRA. constant relative risk aversion) の効用関数を利用しかつ各期の収益率の確率分布が正規分布であると仮定して，期待効用最大化問題を解くことによって導かれる．こうして得られる資産需要関数は，収益率に関して線形の需要関数になり，回帰分析が可能なものとなる．

しかし，この方法では，資産所得課税の変更が家計の厚生にどのような効果を生じさせているかのを推計することは，必ずしも容易ではない．なぜならば，補償所得を基準に家計の厚生効果を計測するためには，支出関数 (expenditure function) の値が計測可能でなければならないからである[3]．支出関数は，また，間接的効用関数 (indirect utility function) を支出について解くことによ

っても導かれる．したがって，支出関数または間接的効用関数を特定化して資産需要を導くという双対性アプローチに注目することが重要になる．

事実，このように双対性アプローチを資産需要に応用することは，Dalal (1983) によって試みられた．彼は，期待効用最大化問題の双対問題として，期待効用がある一定の値をとることを制約として各資産残高を操作することにより期初の総資産残高を最小化する問題に注目した．そして，これが定義する支出関数から，資産需要方程式が財の需要におけるヒックス・マッケンジー (Hicks=Mckenzie) の需要表現／シェパードの補題 (Shephard) に対応する関係により導かれることを示した．ところが，この方法で導かれる資産需要方程式は，一般には誤差項を含む収益率が導出された方程式において非線形の形で現れるため，OLS または SUR による推定が困難である．

これに対して，Dalal の示した問題の一つの双対問題として距離関数を定義する問題を考えることができる．一般に，距離関数 (distance function) とは，財空間で基準となる効用水準を与える財の組み合わせと原点との距離を単位として測った任意の財の組み合わせと原点との距離を表す，財・効用空間から非負の実数への関数である．この関数によれば，基準となる効用水準に対してそれと無差別かまたはそれより選好される財の組み合わせからなる集合（必要投入集合）が一意的に定められるため，この関数は家計の選好を表すことができる．事実，Shephard (1970) は，距離関数が定める必要投入集合からこれが表す選好と等しい選好を表す効用関数が導かれること，並びに距離関数の各財に関する偏微係数は支出額で正規化された価格に等しいこと（シェパード (Shephard) の定理）を示した．距離関数を特定化してこの定理を適用すれば，基準となる効用水準を所与として財空間から価格への関数つまり補償された逆需要関数 (compensated inverse demand function) を得ることができる[4]．

距離関数を定義する資産選択に関する双対問題は，期末の各資産の残高を所与として，上記の資産の費用関数が一定の値をとるという制約のもとに，資産の期待収益率を操作して期末の資産残高の期首における価値を最小化する問題である．これにより定義される距離関数にシェパードの定理を適用すると，補

償された資産の逆需要関数が導かれる．すなわち，基準となる効用水準を所与として，資産残高の組み合わせから各々の資産項目の収益率の逆数の期待値への関数が導かれる．

ただし，こうして得られた資産の逆需要は，各々の資産の期待収益率と誤差項だけで表されるが，誤差項に関してなお非線形である．実際に推定する場合，Dalal の方法に基づく場合と同様の問題が生じる．しかし，資産選択に関する距離関数を定義する問題には，Laffont (1980. 1989) の1階の確実性等価 (First-Order Certainty Equibalance) の定理を応用することができる．これをもって，我々は，距離関数を定義する不確実性のもとでの問題を近似する確実性のもとでの問題を明らかにし，これに関する距離関数を考察する．そして，距離関数と支出関数の双対性を利用した資産所得課税の厚生効果を計測する方法を検討したのちに，推定可能な逆需要関数を導く距離関数を特定化する．

したがって，本稿の構成は次の通りである．第2節で，資産需要方程式を導く原問題と Dalal の双対問題を概観し，第3節で資産の逆需要関数を導く距離関数を定義する双対問題を取り上げ，これと前者の双対問題との関係を検討する．第4節では，第3節で示した問題に応用する確実性等価の定理を概観した後に，距離関数による資産所得課税の厚生効果の計測方法を考察する．第5節では，このような実証分析が可能である距離関数の特定化を行う．最後に，第節で今後の課題を述べる．

2　資産雲要方程式体系の導出方法

資産需要の実証分析で一般的に採られる方法は，効用関数と危険資産の収益率の確率分布を特定化して以下に示すような期待効用最大化問題 (9) を解くことにより資産需要関数を求める方法である．ここで，モデルの前提と記号をまとめる．まず，資産は1個の安全資産 a_0 と n 個の危険資産 $a_i (i=1,\cdots\cdots n)$ から成るものとする．期初の総資産額を A とし，安全資産の保有額を a_0，第 i 危険資産の保有額を a_i とする．故に，期初の予算制約は，(1) $A=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i$ である．安全資産 a_0 の収益率 r は定数であるのに対して，第 i 危険資産 a_i の

ネットの収益率 x_i は確率変数である．ここで，ネットの収益率とは第i危険資産の収益率 z_i から安全資産の収益率 r を引いた値，(2) $x_i=z_i-r$ である．そして，ネットの収益率自体は，γ_i と μ_i をパラメーターとし e_i を確率変数として (3) $x_i=\mu_i+\gamma_i e_i$ によって与えられる．(2) と (3) から，(4) $z_i=r+\mu_i+\gamma_i e_i$ である．さらに，確率変数の期待値について，(5) $E(e_i)=0$ を仮定するから，ネットの収益率の期待収益率はパラメーター μ_i に等しくなる．つまり，(6) $E(x_i)=E(\mu_i)+E(\gamma_i e_i)=\mu_i+\gamma_i E(e_i)=\mu_i$. 一方，$\gamma_i$ は第 i 資産の収益率の変化についての不確実性の程度を示すパラメーターである．これらの仮定から期末の総資産額 X も確率変数となり，その値は，(7) $Y=a_0(1+r)+\Sigma a_i(1+z_i)$ となる．家計または投資家の効用関数は，期末の総資産保有額を変数とする2階微分可能な凹関数であると仮定する．すなわち，(8) $u=u(Y)$: $u'>0, u''<0$ である．

家計または投資家の最適化問題は，予算制約 (1) の下で期待効用を最大化することである．$f(\cdot)$ を e の確率密度関数とすれば，その問題は，

$$
(9)\qquad \operatorname*{Max}_{a_0,a_i} E[u(Y)]=\int_R u(Y)f(e)de,
$$

$$
s.t.\quad A=a_0+\sum_{i=1}^{a} a_i,\quad \text{and (7).}
$$

であり，その解が資産需要関数である．この問題から分かるように，効用関数には各資産の線形方程式が変数としてはいる．これは，各資産が財としては完全な代替財であることを意味する．

これに対して，第 j 資産の収益率が下がれば第 i 資産の需要が増加するという意味での資産の代替性が生じるのは，リスクの異なる資産を組み合わせて危険回避を図りつつ期待効用を最大化するために生じる．線形の資産需要関数では，その代替関係が各資産の収益率の分散共分散行列 $\Omega=[\sigma_{ij}]$ に依存する．実際，資産需要方程式の実証分析では，$\gamma=(1,\cdots\cdots1)$ を前提し，e の確率分布を正規分布：$e\sim N(0,\Omega)$ と仮定するため，(4) により収益率 z の確率分布は正規分布：$z\sim N(r+\mu,\Omega)$ となる．そして，効用関数は，絶対的危険回避度

一定（CARA）あるいは相対的危険回避度一定（CRRA）が仮定される．これらの仮定によって，期待収益率に関して線形の資産需要方程式が導出される．例えば，効用関数が CARA の場合[5]の資産需要方程式は，危険資産と安全資産それぞれ，(10) $a=(1/\alpha)\Omega^{-1}\mu$. (11) $a_0=A-(1/\alpha)i\Omega^{-1}\mu$. となる．ただし，$\alpha$ は絶対的危険回避度であり，i は $i=(1,\cdots\cdots1)$ という n 行ベクトルである．(10) より，$\partial a_i/\partial\mu_j=(1/\alpha)\sigma_{ij}$ であるから，第 i 資産と第 j 資産は $\sigma_{ij}<0(>0)$ ならば代替性（補完性）を示すことになる．

これに対して，Dalal (1983) は，原問題の期待効用最大化問題の解が存在すると仮定して，支出関数から資産需要方程式体系を導く方法を示した[6]．Dalal (1983) が提示した原問題 (9) に対する双対問題は，

$$(12)\qquad A(r,\mu,U;\gamma)=\min_{a_0,a_i}\sum_{i=0}^{n}a_i,$$

$$s.t.\ U=E[u(Y)],\quad \text{and (7)},$$

である．制約式から分かるように，この問題においても，各資産は財としては完全な代替財であることが仮定されている．

$U=E[u(Y)]$ を (9) の目的関数の最大値 V に等しいと置くと，(9) と (12) の解として得られる資産需要方程式は次の関数を満たす．

$$(13)\qquad a_i^*(r,\mu,A;\gamma)=a_i^*(r,\mu,V(r,\mu,A;\gamma);\gamma)$$

なお，アスタリスクはそれぞれの関数が最適値で評価されていることを示す．ここで，$a_i(r,\mu,A;\gamma)$ は γ を所与とする第 i 資産の需要関数を，$a_i(r,\mu,V;\gamma)$ は γ を所与とする第 i 資産の補償需要関数を，$V(r,\mu,A;\gamma)$ は γ を所与とする間接的効用関数を表す．

双対問題 (12) に関する包絡線定理と1階の必要条件を合わせて，Dalal (1983) は財の需要関数におけるヒックス＝マッケンジーの需要表現／シェパードの補題に対応する次のような方程式を導いた．

$$(14)\qquad -\frac{\partial A}{\partial r}=\frac{a_i^*}{1+r},\qquad (15)\qquad -\frac{\partial A}{\partial\mu_i}=\frac{a_i^*}{1+r},$$

ただし，第3節で検討する距離関数との関係で注目すべき点は，彼の用いた

包絡線定理と1階条件とから[7]，我々は同時に，

$$\frac{\partial A}{\partial \mu_i}=-E\left[\frac{a_i^*}{1+z_i}\right], \tag{16}$$

を導くことができることである．

(12) の目的関数の最適値によって与えられる支出関数 $A(r, \mu, U; \gamma)$ を特定化すれば，(14) と (15) を利用して資産需要関数を導くことができる．しかし，伸縮的な[8]支出関数の特定化に基づいて導かれる資産需要方程式体系は，必ずしも推定可能であるとは限らない．

いま，これらの関数の一つを特定化して，伸縮的な資産需要方程式体系，$a=m(\cdot)$ が得られたとすると，第 i 資産の需要関数は，(17) $a_i=m_i(r, \mu, A:\gamma)$ と表せる．簡単化のために，$\gamma=(1, \cdots\cdots 1)$ と置くと，(18) $a_i=m_i(r, \mu, A)$ となる．ただし，$m(\cdot)$ は r, μ, A について非線形の関数形であるとする．この資産需要関数を実際に推定するためには，まず期待収益率 μ を現実の収益率 μ^r と誤差項 ε から構成されると仮定する．つまり，(19) $\mu=\mu^r+\varepsilon$，である．これを (18) に代入すれば，(20) $a_i=m_i(r, \mu^r+\varepsilon, A)$ が得られる．しかし，$m(\cdot)$ は各変数について非線形であるから，一般には，資産需要関数 (20) を，(21) $a_i=m_i(r, \mu^r, A)+\varepsilon$ というように，与えられた関数形と誤差項の和として表現することができない．したがって，(20) のような非線形資産需要関数は，OLS または SUR による推定が困難になる．このような伸縮的な資産需要関数の実証上の問題点を解決する一つの方法が，距離関数に基づく逆需要関数の応用である．

3　資産の逆需要関数を導く双対問題

資産需要関数を導くための期待効用最大化とこれを主問題とする場合の双対問題を，これまで検討してきた．Dalal (1983) の双対問題は，期待効用を一定に保つことを制約として費用としての期初の資産総額を最小化する問題であった．これらの原問題と双対問題は，いずれも期待収益率を所与とする問題であった．これに対して，期末の資産額を所与として，支出関数が一定の値をと

ることを制約として，期待収益率を操作することにより期末資産の期初における価値を最小化するという双対問題が考えられる．今，期初の資産総額を 1 に正規化すれば，この問題は，

$$(22)\qquad d(a_0', a', U)=\underset{r,\mu_i}{\mathrm{Min}}\ E\left[\frac{a_0'}{1+r}+\sum_{i=1}^{a}\frac{a_i'}{1+z_i}\right],$$

$$=\int\left[\frac{a_i'}{1+r}+\sum_{i=1}^{a}\frac{a_i'}{1+z_i}\right]f(e)de,$$

$$s.t.\ A(r, \mu, U)=1,$$

と表される．この最小化問題の解は効用水準 U と期末の資産残高 a_0', a' を変数とする資産の逆需要関数である．これを上記の問題の目的関数に代入して定められるものが距離関数 $d(\cdot)$ であり，それは収益率の確率分布を所与として効用水準と資産項目からなる非負の実数空間から非負の実数への関数である．

資産の逆需要に関するシェパードの定理は次のように導かれる．問題 (22) のラグランジュアンを L^1 とすると，

$$(23)\qquad L^1=E\left[\frac{a_0'}{1+r}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i'}{1+z_i}\right]+\lambda[1-A(r\text{‘}\mu, V)],$$

である．まず，包絡線定理から，

$$(24)\qquad \frac{\partial d}{\partial a_i}=E\left[\frac{1}{1+z_i^*}\right]-\left\{\frac{a_0}{(1+r^*)^2}\frac{\partial a}{\partial a_i}+E\left[\frac{a_i}{(1+z_i^*)}\right]\frac{\partial a}{\partial \mu_1}\right\},$$

である．そして，$1=A(r, \mu, U)$ より，

$$(25)\qquad \frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial a_i}+\frac{\partial A}{\partial \mu_i}\frac{\partial \mu_i}{\partial a_i}=0,$$

である．他方，(23) の 1 階条件から，

$$(26)\qquad \frac{\partial A}{\partial r}=-\frac{1}{\lambda}E\left[\frac{a_0}{(1+r^*)^2}\right],\qquad \frac{\partial A}{\partial \mu_i}=-\frac{1}{\lambda}E\left[\frac{a_i}{(1+z_i^*)^2}\right],$$

を得る．これらを (25) に代入すれば，

$$(27)\qquad \frac{a_0}{(1+r^*)^2}\frac{\partial r}{\partial a_i}+E\left[\frac{a_i}{(1+z_i^*)^2}\right]\frac{\partial \mu_i}{\partial a_i}=0,$$

である．よって，(24) と (27) を合わせることにより，資産の逆需要に関するシェパードの定理が導かれる．すなわち，

(28) $$\frac{\partial d}{\partial a_i}=E\left[\frac{1}{1+z_i^*}\right].$$

これに対して，距離関数が一定の値をとることを制約として，期待収益率を所与として期末の各々の資産残高を操作することにより期末資産残高の期首の価値を最小化する問題の解は，費用関数を定義し，これから Dalal (1983) の双対問題によるヒックッス・マッケンジーの需要表現／シェパードの補題(16)を導くことができる．実際，この問題は，

(29) $$A(r,\mu,U)=\min_{a_0,a_i} E\left[\frac{a_0'}{1+r}+\sum_{i=1}^{a}\frac{a_i'}{1+z_i}\right],\quad s.t.\quad d(a_0',a',U)=1,$$

であり，そのラグランジュアンを L^2 とすると，

(30) $$L^2=E\left[\frac{a_0'}{1+r}+\sum_{i=1}^{a}\frac{a_i'}{1+z_i}\right]+v[1-d(a,U)],$$

と表せる．まず，包絡線定理から，

(31) $$\frac{\partial A}{\partial \mu_1}=-E\left[\frac{a_i'^*}{(1+z_i)^2}\right]+\frac{1}{1+r}\frac{\partial a_0}{\partial \mu_i}+E\left[\frac{1}{1+z_i}\right],$$

$$=E\left[\frac{a_i^*}{1+z_i}\right]+\frac{1}{1+r}\frac{\partial a_0}{\partial \mu_i}+E\left[\frac{1}{1+z_i}\right],$$

である[9]．そして，$d(a_0',a',U)=1$ より，

(32) $$\frac{\partial d}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial \mu_i}+\frac{\partial d}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial \mu_i}=0,$$

である．他方，(30) の 1 階条件より，

(33) $$\frac{\partial d}{\partial a_0}=\frac{1}{v}\left(\frac{1}{1+r}\right),\quad \frac{\partial d}{\partial a_i}=\frac{1}{v}E\left[\frac{1}{1+z_i}\right],$$

を得る．これらを (32) に代入すれば，

(34) $$\frac{1}{1+r}\frac{\partial a_0}{\partial \mu_i}+E\left[\frac{1}{1+z_i}\right]\frac{\partial a_i}{\partial \mu_i}=0,$$

である．よって，(31) と (34) を合わせて，我々が第 2 節で指摘した (16) と一致する資産需要に関するヒックス・マッケンジーの需要表現／シェパードの補題が導かれる．すなわち，

$$(35)\qquad \frac{\partial A}{\partial \mu_i}=-E\left[\frac{1}{1+z_i}a_i^*\right].$$

このように，我々が考察する距離関数を定義する問題 (22) は Dalal の問題 (12) に対して双対問題となっている．Dalal の問題では各資産は財としては完全な代替財と仮定されているので，我々の双対問題においてもこの仮定が背後に置かれている．したがって，逆需要関数のアントネリ (Antoneli) 行列から判定されるヒックスの代替性[10]，ひいては資産の間での補償された代替性は，家計がリスクを回避するために生じると考えられる．ただし，アントネリ行列とは，距離関数のヘシアン：$[A]=[a_{ij}]=[\partial d(a, U)/\partial a_i \partial a_j]$ である．

次に，我々は，上記の結果を利用して資産の逆需要を推定し，それに基づいて資産所得課税の厚生効果を推計する方法を考察する．

4 距離関数による資産所得課税の厚生効果の分析方法

確かに，前節の (28) で与えられる資産の逆需要は，各資産の期待収益率と誤差項だけで表されるが，誤差項に関してなお非線形である．実際に推定する場合には，Dalal の方法に基づいて推定する場合と同様の問題が生じる．しかし，資産選択の距離関数を定義する問題には，Laffont (1980, 1989) の1階の確実性等価 (First-order Certainty Equibalance) の定理を応用することができる．これによって我々は，不確実性のもとで距離関数を定義する問題を近似する確実性のもとでの問題を構成し，それが定義する距離関数とシェパードの定理に基づいて推定可能な資産の逆需要関数を求めることができる．

Laffont の定理[11]は，ある適当な形式の目的関数の期待値の最適化問題の解は，その問題におけるパラメタライズ可能な不確実性の程度をゼロと評価した目的関数の最適化問題の解と近似的に等しくなることを示している．その概略を述べれば次の通りである．

操作できる変数のベクトルを x とすると，$E(e)=0$ の確率密度関数 $f(e, x)$ を持つ確率変数 $e=(e_1, \cdots\cdots e_p)$ に対して，確率的な結果を表す関数 $y=g(x, e), x\in R^n, y\in R^m$，が存在し，これを含む効用関数 $u=u(x, y, e)$ を目的関数と

する最大化問題を考える．ただし，確実な問題の近傍における不確実性の程度を変化させられるようにパラメーターγを導入し，家計の最適化問題を，(36) $\mathrm{Max}\int_{R^p} u(x, g(x, \gamma e), \gamma e) f(e, x) de$，と表す．かくして (36) は，もしも $\gamma=1$ とおけば期待効用最大化問題 (37) $\mathrm{Max}\, E[u(x, g(x, e), e)]$ を表し，また $\varepsilon=0$ とおけば確実性のもとでの問題 (38) $\mathrm{Max}\, u(x, g(x))$ を表すことになる．

以上を前提として，Laffont (1989) は，確実性等価を「もしも (38) の解が (39) の解と $\gamma=0$ の近傍で（ε に関する1階の程度で）等しくなるならば，この問題は1階の確実性等価を示す」と定義した．なお，‘1階の程度’ないし‘1階の確実性等価’という理由は，不確実な効用最大化問題の1階の必要条件を $\varepsilon=0$ の点で1階まで近似した条件が不確実性の程度を示すパラメーターεから独立であることによる．この定義を用いて，1階の確実性等価の定理は次のように表される．「$u(x, y, e)$ と $g(x, e)$ とが2回微分可能であり，かつ不確実な問題に対応する確実な問題に一様な解が存在するものとすれば，もしも関数 $u(x, g(x, 0), 0)$ のヘシアンが非特異ならば，1階の確実性等価が成立する」(Laffont (1989))．さらに，この定理は，変数xに制約を加えても静学的な最大化問題に限れば成立する (Laffont (1980))．

(22) において $\gamma=0$ の場合の問題は，次のようになる．

$$(39)\qquad \underset{r,\mu_i}{\mathrm{Min}} \frac{a_0'}{1+r}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i'}{1+r+\mu_i},\quad s.t.\ A(r, \mu, V)=1,$$

距離関数を定義しその解から補償された資産の逆需要を導く問題 (39) のヘシアンは非特異ではないから，(22) で $\gamma=0$ とする確実性のもとでの問題と不確実性のもとでの問題 (22) との間には1階の確実性等価が成立する．

問題 (39) により定義される距離関数は，

$$(40)\qquad d(a, U)=\begin{cases}\dfrac{|a|}{|\xi|}, & \text{for } a\in D_1\cup D_2',\ U>0,\\ 0, & \text{for } a\in D_1\cup D_2'',\ U>0,\\ +\infty, & \text{for } a\in D,\ \cup=0,\end{cases}$$

かつ，$\xi=k_0a$, (2.175) $k_0=\min\{k|ka\in\Phi(U)\}$，によって定義される距離関数と一致する (Shephard (1953, p. 20 : 1970, p. 159))．ただし，ここでは，a

$=(a_0, a_1, \cdots\cdots a_n)$ とし，かつ U：所与の効用水準，D：n 次元の実数空間の非負象元，$\{0\}$：原点，D_1：D の内部，D_2：$D_{/(0)}$，$\Phi(U)$：$=\{a|u(Y(a)_{c.e.})\geq U\}$，$D_2'$：$=\{a|a\in D_2, ka\in\Phi(U), \exists U>0, \exists k>0\}$，$D_2''$：$=\{a|a\in D_2, ka\in\Phi(U), \forall U>0, k>0\}$，とする．

したがって，この距離関数は次のような諸性質を満たさなければならない．《1》すべての $U>0$，有界の $a\in D_1 U D_2'$ に対して距離関数 $d(a, U)$ は有界であり，正の値を取る．《2》$\lambda>0$ かつ $U=0$ の場合を除いて，すべての λ に対して距離関数は一次同次である．《3》距離関数 $d(a, U)$ は a に関して非減少である．《4》距離関数 $d(a, U)$ は a に関して凹である．《5》距離関数 $d(a, U)$ は a に関して連続である．《6》すべての $a\varepsilon D_1 U D_2'$ に対して距離関数 $d(a, U)$ は U に関して非増加関数である．《7》任意の $a\in D$ に対して，距離関数 $d(a, U)$ は U に関して上半連続（upper-semicontinuous）である．

性質《1》～〈7》は Shephard 示した命題の内容であり (Shephard (1970, p. 67)，距離関数の特定化の際に依拠しなければならない性質である (Deaton (1979), Deaton＝Muellbauer (1980))．さらに定義（40）より，$D_1\cup D_2'$ の上では，(41) $u(a/d(a, U))=U$ が成立する．この関係から，《8》：$d(a, U)=1 \Leftrightarrow U=u(Y)$ が成り立ち，《9》：効用水準 U は，(42) $d(a, U)=1$ により陰伏的に定義することができる．

ここで留意すべきことは，双対問題（22）と確実性等価の関係にある問題から定義される距離関数に基づく資産の代替性は，財としての資産に関する性質であるということである．これは，既に述べたような資産需要関数を導く場合の前提と異なるが，目的用関数の操作変数に関してその完全代替性を前提していない Laffont の定理と矛盾するものではない[13]．

次に，資産所得課税の厚生効果を，課税により家計が受けた効用の変化を補償所得で表示した厚生コストによって計測する方法を検討する．そのためには，上に述べた距離関数と支出関数の双対性[14]を利用することが考えられる．その前提として距離関数のパラメーター推定値が必要であるが，これは資産の逆需要関数を推定することにより得られる．その推定方法は次のようにまとめられ

る．まず，基準となる効用水準 U を，(42) を U について解いた値，(43) $U=\delta(a')$ とする[15]．これを問題 (39) が定義する距離関数にシェパードの定理を適用して得られる逆需要関数に代入すれば，

$$(44)\qquad \frac{1}{r_0}=g_0(\delta(a'),a')=g_0(a'),$$

$$(45)\qquad \frac{1}{1+c+\mu_i}=g_i(\delta(a'),a')=g_i(a'),$$

が得られる．実際の推定では，オブザーベーションを t とすれば，それぞれの式に推定上の誤差項を $\varepsilon_{it}(\varepsilon_t\sim N(0,\Omega))$ を加えるが，予算制約式 $Y=\Sigma a_i$ より (44) と (45) のうちの一つの方程式は独立ではない．よって，n 個の式からなる資産の逆需要方程式体系を構成する (45) を推定する．すなわち，その方程式体系は，

$$(46)\qquad \frac{1}{1+r_t+\mu_{it}}=g_i(a_t')+\varepsilon_{it},\ i=1,\cdots\cdots n,$$

によって構成されるが，それは OLS または SUR で推定可能な資産の逆需要方程式体系となる．

課税後の保有資産と収益率のベクトルをそれぞれ $(a_0,a),(r,\mu)$ とし，課税前の保有資産と収益率のベクトルを各々 $(a_0'',a''),(r'',\mu'')$ と記す．課税後の効用水準 U は，資産の逆需要関数の推定において基準点として選択されているから，(42) を満たす．したがって，課税後の効用水準 U で評価した課税前の収益率による支出関数の値は，

$$(47)\qquad A(r'',\mu'',U)=\underset{a_0,a_i}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{a_0}{1+r''}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+r''+\mu_i''},\ |d(a,U)=1\right\}$$

により求められる．これに対して，課税後の効用水準 U で評価した課税後の収益率による支出関数の値は，

$$(48)\qquad A(r,\mu,U)=\underset{r,\mu_i}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{a_0}{1+r}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+r+\mu_i},\ |d(a,U)=1\right\}$$

により求められる．

距離関数の関数形次第ではこの解を解析的に解くことが困難な場合もありう

るが，数値解析的に解くことは可能であると考えられる．したがって我々は，(47) と (48) を数値解析によって解き，その結果を利用して補償所得を算出し，これから資産所得税額を引くことにより，資産所得課税の厚生コストを計測することができる．

また，資産の代替性を調べるためには，資産の逆需要関数のパラメーター推定値から資産需要方程式の補償された価格効果 $\partial^2 a_i/\partial\mu_j|_U$，つまりスルツキー行列 $[S]$ の第 $i\ j$ 要素を求める必要がある．そのためには，我々は，Deaton (1979) によるアントネリ行列 $[A]$ の一般化された逆行列の公式：

$$(49)\qquad [S]=\frac{1}{Y}\left\{\left[[A]+\left(\frac{1}{\mu_i}\right)\left(\frac{1}{\mu_i}\right)'\right]^{-i}-aa'\right\}$$

を利用することができる．

5 距離関数の特定化

性質《1》～《7》を満たすように，資産・効用空間から非負の実数への距離関数を特定化する．特定化にあたり，(i) local consistancy と (ii) global consistancy という用語 (Lau (1986)) が用いられる．前者は，資産の単位の取り方により $a_i=1(i=0, 1\cdots\cdots n)$ とすることができかつ推定に用いる加工されたデータの値がこれを含む場合に，必要とされる個々の性質を関数形が満たすことを指し，後者は，用いるデータの領域について所要の性質を関数形が満たすことを意味する．推定可能な資産の逆需要関数を導く距離関数の一つの関数形は，次の命題により与えられる．

【命題】 関数形：

$$(50)\quad d(a, U)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}b_i a_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}a_i{}^{1/2}a_j{}^{1/2}+\frac{\beta}{U}\prod_{i=0}^{n}a_i{}^{k_i}\ \text{for}, a\in D_1\cup D_2', U>0,\\ 0,\qquad \text{for } a\in D_1\cup D_2'', U>0,\\ +\infty\ \ \text{for } a\in D, U=0,\end{cases}$$

$(i, j=0, 1, \cdots\cdots n)$ は，(i) $b_i+b_{ii}+(1/2)\sum_{j=0}^{n}b_{ij}\geqq 0$,

$\sum_{i=0}^{n}b_{ij}a_i{}^{-3/2}a_j{}^{1/2}\geqq 0, \sum_{i=0}^{n}k_i=1, k_i>0$, および $\beta>0$

であるならば，locally consistent な距離関数である．また，この関数形は，
$a \in D_1 \cup D_2'$ に対して，

(ii) $b_i + b_{ii} + (1/2)\sum_{j=0}^{n} b_{ij} a_i^{-1/2} a_j^{1/2} \geqq 0,$

$\sum_{j=0}^{n} b_{ij} a_i^{-3/2} a_j^{1/2} \geqq 0,\ \sum_{j=0}^{n} k_j = 1,\ k_i > 0,$ および $\beta > 0,$

であるならば，globaly consistent な距離関数である．

（証明） 性質《1》～《7》を関数形（50）が満たすために必要なパラメーターの条件を調べる．ここで，$d_1(a) = \sum_{i=0}^{n} b_i a_i + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} a_i^{1/2} a_j^{1/2},\ d_2(a) = \beta \prod_{i=0}^{n} a_i^{ki}$，と置く．

《1》について：$a \in D_1 \cup D_2'$ と $U > 0$ に対して，$d_2(a) > 0$，したがって，《1》が満たされるためには，既に述べた二つの基準による制約条件が必要である．

(i) local consistancy : (51) $d_1(1) = \sum_{i=0}^{n} b_i + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} > 0,$

(ii) global consistancy : $a \in D_1 \cup D^{2'}$ に対して，

(52) $d_1(a) = \sum_{i=0}^{n} b_i a_i + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} a_i^{1/1} a_j^{2/2} > 0,$

《2》について：

(53) $$d_1(\lambda a) = \sum_{i=0}^{n} b_i(\lambda a_i) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}(\lambda \alpha_i)^{1/2}(\lambda a_j)^{1/2}$$
$$= \lambda\left[\sum_{i=0}^{n} b_i a_i + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}(a_i^{1/2} a_j^{2/2})\right] = \lambda d_1(a),$$

(54) $$d_2(\lambda \alpha) = \beta \prod_{i=0}^{n} (\lambda a_i)^{ki}$$
$$= \beta \prod_{i=0}^{n} a_i^{ki} (\lambda^{k0} \lambda^{k1} \cdots\cdots \lambda^{kn}) = \lambda^{\Sigma k_i} \beta \prod_{i=0}^{n} a_i^{ki}.$$

ゆえに，(54) が1次同次であるためには，(55) $\sum_{i=0}^{n} k_i = 1$，という制約条件が必要である．この条件が課されるならば，$d_1(a)$ と $d_2(a)$ はともに一次同次であるから，$d(a, U)$ も一次同次になる．

《3》について：距離関数の a_i に関する偏微係数，すなわち第 i 資産の補償された資産の逆需要関数は，

(56) $$\frac{\partial d}{\partial a_i} = b_i + b_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} a_i^{-1/2} a_j^{1/2} + \frac{\beta k_i}{U a_i}\prod_{i=0}^{n} a_i^{ki},$$

である．(56) の右辺第 4 項は，(57) $k_i>0$，が満たされれば，正の値を取る．一方，右辺第 1 項，第 2 項および第 3 項の和については，次のような二つの基準による制約を考慮しなければならない．

(i) local consistancy : (58) $b_i+b_{ii}+(1/2)\sum_{j=0}^{n}b_{ij}\geqq 0.$

(ii) global consistancy : $a\in D_1\cup D_2'$ に対して，

(59) $$b_i+b_{ii}+(1/2)\sum_{j=0}^{n}b_{ij}a_i^{-1/2}a_j^{1/2}\geqq 0,$$

《4》について：凹関数の和は凹関数であるから，$d_1(a)$ と $d_2(a)$ がそれぞれ凹関数であることを示せばよい．$d_2(a)$ のヘシアンの k 次の首座小行列式の符号を求めると，$(-1)^k$ の符号と一致する．ゆえに，このヘシアンは negative semidefinite であるから，$d_2(a)$ は凹関数である．他方，

$$\partial d_1/\partial a_i=b_i+b_{ii}+(1/2)\sum_{j=0}^{n}b_{ij}a_i^{-1/2}a_j^{1/2},$$

(60) $$\partial^2 d_1/\partial a_i^2=-(1/4)\sum_{j=0}^{n}b_{ij}a_i^{-3/2}a_j^{1/2},$$

$$\partial^2 d_1/\partial a_i\partial a_j=-(1/4)b_{ij}(a_ia_j)^{-1/2},$$

であるから，$d_1(a)$ のヘシアンの k 次の首座小行列式の符号と (−1) の符号が一致するかどうかを調べ，そのための条件を求めると次のようになる．(i) local consistancy : (61) $(1/4)\sum_{j=0}^{n}b_{ij}\geqq 0$, (ii) global consistancy : $a\in D_1\cup D_2'$ に対して，

(62) $$(1/4)\sum_{j=0}^{n}b_{ij}a_i^{-32/}a_j^{1/2}\geqq 0,$$

《5》について：$a\in D_1\cup D_2'$ に対して，$d_1(a)$ と $d_2(a)$ は a に関して連続であるから，これらの和である距離関数は連続である．

《6》について：$U>0$ に対して，$\beta>0$ と制約すれば，

(63) $$\partial d/\partial U=-(\beta/U^2)\prod_{i=0}^{n}a_i^{k_i}<0,$$

となる．一方，$U=0$ に対しては，$d(U,a)=\infty$ と定義される．したがって，この条件は満たされる．

《7》について：任意の $a\in D$ に対して，$L(y)=\{U|d(a,U)\geqq y,\ U\in(0,\infty)\}$,

$y\in R^1$ と置く．定義（50）により $L(y)$ は閉集合になるので，距離関数（50）は U について上半連続（upper-hemicontinuous）である[16]．

この命題に基づいて，推定に利用する資産の逆需要関数を導くと次のようになる．まず，（50）において左辺を1に等しいと置いて効用水準について解いて（43）を求めると，

$$U=\frac{1-\sum_{i=0}^{n}b_i a_i-\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}b_{il}a_i^{1/2}a_j^{1/2}}{\beta\prod_{i=0}^{n}a_i^{k_i}}, \tag{64}$$

となる．これを（56）に代入しシェパードの定理を適用すれば，（50）に基づく推定可能な資産の逆需要関数：

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+r+\mu_i'}&=b_i+b_{ii}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}b_{ij}b_i^{-1/2}a_j^{1/2}\\&\quad+k_i\left[\frac{1}{a_i}\sum_{j=0}^{n}b_i\left(\frac{a_i}{a_j}\right)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}b_{ij}\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{1/2}\right],\end{aligned} \tag{65}$$

が導かれる．

6　今後の課題

以上によって，距離関数の特定化からシェパードの定理を利用して資産の逆需要関数を導きこれを推定する方法と，その推定結果から資産所得課税の補償所得による厚生効果および収益率の変化に対する資産需要の代替効果を推計する方法を示した．命題で提出した距離関数の関数形は，あくまでも考えられるものの一つである．その他にも，より好ましい性質と推定上の便利さを持つ関数形があると考えられる．したがって，今後の課題は，第1に，命題で示した距離関数に基づく逆需要関数を実際に推定し，わが国の資産所得課税が家計の厚生に及ぼす効果を推計することである．第2に，命題に示した距離関数以外の関数形を導きこれに基づく逆需要関数を推定し，前者との比較研究を行うことである．

第3に資産の代替性に注目すると，資産需要を求める期待効用最大化問題では資産は財としては完全な代替性を持つと仮定されるので，本稿で示した双対

問題においてもその仮定が背後に置かれていることが問題になる．本稿で応用した Laffont の定理では，目的関数の操作変数に関してその完全代替性を前提していない．したがって，本稿で示した不確実性のもとでの双対問題を完全代替性の仮定によらず成立するかどうかを考察しこれを実証研究することも，今後の課題としなければならない．そして，資産収益率と資産価格の関係に注目すれば，本稿で示した効用関数の特定化に依存しない資産需要の双対性アプローチが，資産価格の分析をどのように拡張することができるのかを考察することは，今後の最も重要な課題であると考えられる．

＊本稿の作成にあたり，石弘光氏，野口悠紀雄氏，田近栄治氏，および蓼沼宏一氏から有益なコメントを戴いたことに対し記して謝意を表したい．もちろん，ありうべき誤りはすべて筆者の責任に帰すべきものである．

1）Courakis, A. S. (1988), Frankel, J. A. (1985), Friedman (1985), Noland, M. (1988). Parkın, M. (1970), Roley, V. V., (1982), Sandmo (1979), 本間・跡田 (1990), 田近・中川 (1990) 等を参照.

2）需要方程式体系を構成するそれぞれの方程式を需要関数 (domand functions) と呼ぶ.

3）課税が家計の経済的厚生に及ぼす効果を支出関数により金額化される補償所得をもって計測するための指標に関する最近の展望は，Kay=Keen (1989) に見られる.

4）財空間から価格・所得空間（所得で正規化された価格）への対応（関数）が直接的な逆需要対応（関数）である．これは予算制約のもとで間接的効用関数を最小化させる問題の解として導かれる．この問題と効用最大化問題との双対性については，山崎（1989）に述べられている．ただし本稿では，逆需要というとき，特に区別する必要のない限り補償された逆需要を意味するものとする.

5）CARA の効用関数の形は，$\pi=ra_0+\Sigma(\mu_i+e_i)a_i$, c と b をパラメーターとすれば，$u=b-c\exp(-\alpha\pi)$ である．ての場合の資産需要関数の導出については，Courakis (1988) と Parkin (1970) を参照した．また，CRRA の効用関数から資産需要方程式体系を導く方法は，田近・中川（1990）の中で説明されている.

6）Dalal (1983) は，同時に間接的効用関数から資産需要方程式を導く財需要のロワ (Roy) の恒等式に対応する方程式を示した.

7)　ここではまた，$E[\partial A/\partial \mu_i]=\partial EA/\partial \mu_i$ という関係を利用した．

8)　伸縮的な関数形（flexible functional forms）とは，homotheticity や分離可能性を固有の特徴とせず，それらを制約とする場合としない場合を推定して，その制約の妥当性を実証することのできる関数形である．

9)　ここで，$a_i'=(1+r+\mu_i+\gamma_i e_i)a_i$ という関係を用いた．

10)　一般に，補償された逆需要において第 j 財の量が増加したとき第 i 財の価格が低下（増加）する場合，第 i 財は第 j 財に対してヒックスの意味の代替性（補完性）を持つという（Deaton (1979)）．

11)　これは，Theil (1954), Malinvaud (1969) の確実性等価の定理を拡張しものである．確率密度関数 f は必ずしも変数 x に依存しなくてもよい．

12)　ここでは，Shephand (1990) の用語に対して，二階堂（1960, p. 306）の訳語をあてることとした．

13)　問題（12）の形式は，後にみる Laffont の確実性等価の定理が適用できるものではないので，以上に述べた方法で導いた非線形の資産需要関数を確実性のもとでの需要関数に置き換えることにより期待収益率の誤差項の問題を処理することも困難である．ただし，問題（12）に適用可能な確実性等価の定理の導出についての考察は，今後の課題としたい．

14)　距離関数 $d(\cdot)$ と支出関数 $e(\cdot)$ は次の問題により互いに定義されるという意味で双対性を持つ．$e(p, U)=\min\{\Sigma p_i q_i | d(p, U)\geqq 1\}$, $d(q, U)=\min\{\Sigma p_i q_i | e(p, U)\geqq 1\}$．ここで，$U$ は効用水準を，q と p は各々財と価格のベクトルを表す．

15)　データの値 a が $a\in D_1\cup D_2'$ となることを前提する．

16)　Shephard (1970) の Appendix 1, p. 296 の定理による．

参考文献

田近栄治・中川和明（1990）「わが国家計の資産選択と資産需要の代替性」『ファイナンシャル・レビュー』大蔵省財政金融研究所（forthcoming）

本間正明・跡田直澄（1989）『税制改革の実証分析』東洋経済新報社

二階堂副包（1960）『現代経済学の数学的方法』岩波書店

山崎昭（1988）「需要理論における古典的双対問題」『一橋論叢』 100巻

Blackorby, C., D. Primont, and R. R. Russell, (1977) *Duality, Separability, and Functional Structure* (North-Holland)

Courakis, A. S. (1988) 'Modeling portifolio selection', *Economic Journal*. vol. 98, pp. 619—642.

Dalal, A. J. (1983) 'Comparative Statics and Asset Substitutability/Complementality in a Portfolio Model: A Dual Approach', *Review of Economic Studies*, pp.

355—367.

Deaton, A. (1979) 'The distance function in consumer behabiour with applications to index numbers and optimal taxation', *Review of Economic Studies*, pp. 39—405.

Deaton, A. and J Muellbauer (1980) *Economics and consumer behabiour* (Cambridge University Press)

Frankel, J. A. (1985) 'Portfolio crowding-out; Empilically estimated', *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 100, supplement.

Friedman, B. J. (1985) 'The substitutability of debt and equity secuarities', in B. J. Friedman eds. *Corporate Capital Structure in the United States* (Chicago University Press)

Loffont, J. J. (1980) *Essays in the Economics of Uncertainty*, (Havard University Press, Cambridge)

——, (1989) *The Economics of Uncertainty and Information*, translated by J. P. Bonin and H. Bonin, (MIT Press, Cambridge)

Lau, L. J. (1986) 'Functional Forms in Econometrics', in Intriligator eds. *Handbook of Econometrics* (North-Holand)

Malinvaud, E. (1969) 'First Order Certainty Equivalence', Econometrica, vol. 37, pp. 706—718.

Noland, M. (1988) 'Japanese household protfolio allocation behavior', *Review of Economics and Statistics*, vol. 121, pp. 135—139.

Parkin, M. (1970) 'Discount house portfolio and debt selection', *Review of Economic Studies*, vol. 37, pp. 467—497.

Roley, V. V., (1982) 'The effect of federal debt-management policy on corporate bond and equity yields'. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 97, pp. 645—668.

Sandmo, A. (1977) 'Portfolio Theory. Asset Demand and Taxation: Comparative Statics with Many Assets', *Review of Economic Studies* vol. 44, pp. 369—379.

Shephard, R. W., (1970) *The Theory of Cost and Production Functions*, (Prinston University Press)

——, (1957) *Cost and Production Functions* (Springer-Verlag)

Theil, A. (1975) 'A Note on Certaıty Equibalance in Dynamic Planning', *Econometrica*, vol. 25, pp. 346—349.

(一橋大学助手)