統計的システム論と所得分布曲線

片　岡　信　二

序

われわれはこれまで「統計的システム論」という表題のもとでいくつかの論文を発表してきたが[5)–11)]，この度本誌に執筆する機会が与えられたので，ここにそれらを総括し，特に所得分布に関連した問題に絞って体系を整理してみたいと思う．

先の論文では「相互に関連をもった人ないし物の集合体で，ある内部構造をもったものをシステムとよぶ」と定義し，一般化された統計力学の手法をこれに適用していくつかの性質を導いた．本論では問題の所在，展開を明確にするために，経済活動を行う多数の主体の集団をシステム，特に確率的に見たものを統計的システムとよび，これの性質を明かにすることに重点を置くこととする．ここでのわれわれの観点は，個々の経済活動や機構の細部に立入って分析するのではなく，集団全体を外部（環境システム）とのマクロな相互作用によって規制を受けつつ確率的な行動をする一つの自然的存在と見做したとき，どのような行動法則が見出せるかというところにある．しかし自然的存在といっても，これを構成する主体の本然的な欲求や集団としての規範を無視するわけではなく，これらは個人の効用と集団の厚生という形でモデルに取り入れることになる．

われわれの理論を展開するためのもう一つの基本的な考え方は統計的システムに対する「最尤状態の原理」である．外部からのある制約のもとで，システムの構成主体同志は複雑な相互作用（経済取引）を行うが，充分な時間の経過

の後ではある確率的な均衡状態に達し，システムは取ることのできるいろいろな状態（その数は主体の数とともに急速に増加する）のなかで「最も確からしい状態」を取ると考えられる．これを「最尤状態の原理」とよぶ．（これは自然を対象とする統計力学の基本原理を言い換えたものであることはいうまでもない。）最尤状態の原理とは，多数の構成主体から成る集団のマクロな，しかも静的な面に注目すれば，「実際に起っていることは，特殊なものではなく，当り前のことが起っているのである」ということである．

1　モデルと定式化

一つの都市なり国なりの一定の領域に住む個人の集団を統計的システムとし，個人の所得を，いくつかの所得階層に分けて各階層に属する人数の分布を以下問題とすることにする．これはまた一人の平均的な住民がある階層に属する確率を求めるという問題に言い換えることができる．さてモデルをつくる上で，前節に従って次のような前提を置くことにする．

〔前提1〕各個人はシステムの全所得の分配に参加するが，分配量は必ずしも一定しておらず，確率的要素を持っている．

〔前提2〕システム全体の厚生関数が存在し，これは各個人の所得の効用の和となっている．なお効用関数としては対数関数を用いるがこれは Bernoulli J. の効用関数で，すでに古く Dalton によって導入されたものである[21]．

〔前提3〕〔前提1〕と〔前提2〕のもとでシステムは最も確からしい状態，最尤状態をとる．

以上の前提のもとで定式化を行うと次のようになる．所得階層を l 組に分け，$y_i(i=1, 2, \cdots\cdots, l)$ を階層 i の所得水準，n_i を i に層する個人の人数とすると，

$$\sum_{i=1}^{l} n_i=N \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{l} n_i y_i=Y \tag{1.2}$$

という関係が成立する．ここで N はシステムの総人数，Y は総所得である．また所得水準 y_i の個人の所得の効用を $u(y_i)$ とおくとき，システム全体の

厚生を U とすると，これは

$$\sum_{i=1}^{l} n_i u(y_i) = U \tag{1.3}$$

と表わされる．

さて N 人の個人が l 個の階層に分配されるのであるが，その分配の状態 $(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_l)$ の数は全部で

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{l} n_i!} \tag{1.4}$$

だけある．従って状態 $(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_l)$ の起る確率は W に比例する．ここで N, n_i が充分大であるとし，$N!, n_i!$ にスターリングの公式を適用すると

$$W \doteqdot \left[1 / \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{n_i}{N} \right)^{\frac{n_i}{N}} \right]^N$$

となり $\pi_i = n_i/N$ ととおくと，

$$W \doteqdot [\prod_i \pi_i^{-\pi_i}]^N \tag{1.5}$$

となる．最尤状態の原理を数学的に表現すれば，

$$\max W$$

であり，単調増加関数 $\log W$ を用いれば，N は一定であるから，最尤状態の原理は

$$\max \theta(\pi) = -\sum_i \pi_i \log \pi_i \tag{1.6}$$

となる．

以上によりわれわれの問題は，条件式 (1.1)，(1.2)，(1.3) のもとで，あるいはそれぞれを N で割り，$\bar{y} = Y/N, \bar{u} = U/N$ として

$$\sum_i \pi_i = 1 \tag{1.7}$$

$$\sum_i \pi_i y_i = \bar{y} \tag{1.8}$$

$$\sum_i \pi_i u(y_i) = \bar{u} \tag{1.9}$$

のもとで，(1.6) を求めることに帰着する．(1.6) の目的関数 $\theta(\pi)$ をシステムのエントロピー (Entropy) とよび，以下の理論で重要な役割を演ずる．なお $\theta(\pi)$ は π の凹関数となるのでこの最適値問題の解は唯一に定まる．

Lagrange 関数を L，(1.7)，(1.8)，(1.9) の乗数を $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ とすると，

$$L = -\sum \pi_i \log \pi_i - \beta_0(\sum_i \pi_i - 1) - \beta_1(\sum_i \pi_i y_i - \bar{y})$$

表 1

年	$\bar{X}(=\bar{y}=\varphi_2)^*$	$\tilde{X}(=e^{\bar{u}}=e^{\varphi_2})^*$	$\log\tilde{X}$ $(=\bar{u}=\varphi_2)$	$\lambda(=\beta_1)^*\times 10^4$
1960	6354.5	4888.0	8.4945	3.2418
1961	6578.0	4976.5	8.5125	2.9492
1962	6823.0	5390.5	8.5924	3.3270
1963	7106.5	5478.0	8.6085	2.9128
1964	7439.0	5856.5	8.6753	3.0112
1965	7828.0	6138.0	8.7223	2.8232
1966	8424.5	6809.0	8.8260	2.9794
1967	8973.5	7210.0	8.8832	2.7191
1968	9598.5	7746.0	8.9549	2.5837
1969	10360.5	8320.0	9.0264	2.3454

$$-\beta_2\left(\sum_i \pi_i u(y_i)-\bar{u}\right)$$

となる．L より最適解を定める式は

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_i}=-\log\pi_i-1-\beta_0-\beta_1 y_i-\beta_2 u(y_i)=0$$

となり，π_i の最適値を p_i とすると，

$$p_i=\exp\{-(1+\beta_0)\}\exp\{-\beta_1 y_i-\beta_2 u(y_i)\} \tag{1.10}$$

となる．

$$Z=\exp(1+\beta_0)=\sum_i \exp\{-\beta_1 y_i-\beta_2 u(y_i)\} \tag{1.11}$$

とおくと，

$$p_i=\frac{1}{Z}\exp\{-\beta_1 y_i-\beta_2 u(y_i)\} \tag{1.12}$$

が得られる．ここで Z を分配関数（確率母関数）とよぶ．分配関数 Z を用いると

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial\log Z}{\partial\beta_1}&=\sum_i p_i y_i=\bar{y}\\ -\frac{\partial\log Z}{\partial\beta_2}&=\sum_i p_i u(y_i)=\bar{u}\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

という関係が導かれるが，これは後の計算で重要な役割を演ずる．

さて計算を具体的に進めるために，前提 2 で述べたように所得 y の効用関数 $u(y)$ を $\log y$ とおくと（$u(y)=\log y$ が y の凹関数であることに注意．$u(y)$

$\alpha(=1-\beta_2)^*$	$\beta_2(=1-\alpha)$	$\log \tilde{X}/\bar{X}$ $(=\bar{u}-\log \bar{y})$	$s-\log \bar{y}$	I_r^*
2.06	−1.06	−0.2624	0.8754	0.2231
1.94	−0.94	−0.2790	0.8928	0.2364
2.27	−1.27	−0.2357	0.8454	0.2048
2.07	−1.07	−0.2603	0.8740	0.2228
2.24	−1.24	−0.2392	0.8497	0.2072
2.21	−1.21	−0.2432	0.8539	0.2093
2.51	−1.51	−0.2129	0.8123	0.1856
2.44	−1.44	−0.2188	0.8218	0.1910
2.48	−1.48	−0.2144	0.8164	0.1888
2.43	−1.43	−0.2201	0.8232	0.1922

(＊印は Salem=Mount の論文より転載)

の凹凸についての議論は後節にゆづる)，分配関数 (1. 11) は

$$Z=\sum_i \exp(-\beta_1 y_i) y_i^{-\beta_2} \tag{1. 14}$$

となる．所得水準 y_i の密度は連続的で一定であるとすると，(1. 14) の$\sum$は積分$\int$に置きかえられ

$$Z=\int_0^\infty \exp(-\beta_1 y) y^{-\beta_2} c dy \tag{1. 15}$$

となる．ここで c は y_i の密度で cdy は所得間隔 dy のなかにある階層の数と考えてよい．なおここで所得水準の下限を 0 としてあるが，これは計算の便宜のためでありこれについては原論文に注意がある[7]．(1. 15) はガンマ関数を用いて

$$\begin{aligned} Z&=c\beta_1^{\beta_2-1}\Gamma(1-\beta_2) \\ &=c\beta_1^{-\alpha}\Gamma(\alpha),\ \alpha=1-\beta_2 \end{aligned} \tag{1. 16}$$

となり，

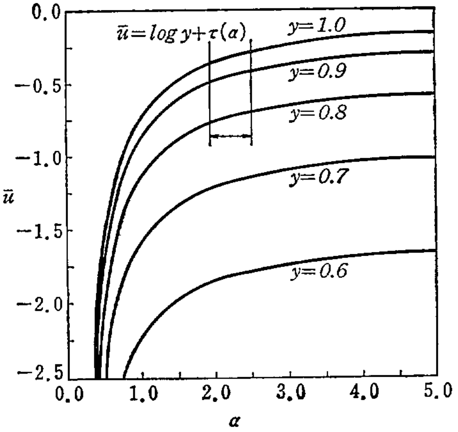
$$\log Z=-\alpha \log \beta_1+\log\Gamma(\alpha)+\log c \tag{1. 17}$$

を得る．ここで

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

である．

図 1



(1.16) より，(1.13) を用いて

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_1}&=\frac{\alpha}{\beta_1}=\bar{y} \\ -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_2}&=\frac{\partial \log Z}{\partial \alpha}=-\log \beta_1+\psi(\alpha)=\bar{u} \end{aligned}\right\} \quad (1.18)$$

を得る．ここで $\psi(\alpha)$ は digamma 関数，

$$\psi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\log \Gamma(\alpha)$$

である．

次に (1.12) を用いてエントロピー s を求めると

$$\left.\begin{aligned} s&=\beta_1\bar{y}+\beta_2\bar{u}+\log Z \\ &=\log \bar{y}+\sigma(\alpha) \\ \sigma(\alpha)&=\alpha-\log \alpha-(\alpha-1)\psi(\alpha)+\log \Gamma(\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

となり，また (1.18) より

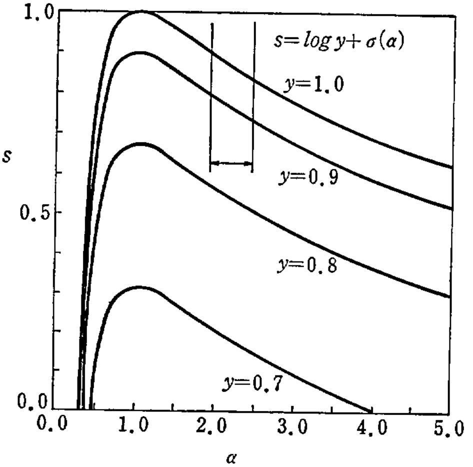
$$\bar{u}=\log \bar{y}+\tau(\alpha),\ \tau(\alpha)=\psi(\alpha)-\log \alpha \qquad (1.20)$$

となる．

2　Salem＝Mount 論文との比較と検討

Salem と Mount は 1960〜1969 年のアメリカ合衆国の家計所得分布のデー

図 2



タから，つぎのガンマ分布が，従来の対数正規分布より適合度がよいことを実証した[19]．彼等の論文に従えば X を所得，α, λ をパラメーターとして分布密度関数は

$$f_{r}(X;\ \alpha, \lambda)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}X^{\alpha-1}e^{-\alpha X} \tag{2.1}$$

となる．さて前節（1.12）および（1.16）よりシステムの最尤状態に対する分布密度関数は，

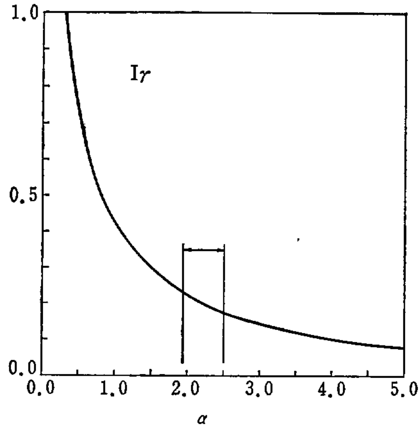
$$p(y;\ \alpha, \beta_1)=\frac{\beta_1{}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\beta_1 y} \tag{2.2}$$

が得られる．両者は β_1 を，$\lambda, 1-\beta_2$ を α, y を X と置けば完全に一致する．従ってわれわれの統計的システム論の立場から理論的に Salem=Mount のガンマ分布が得られたことになる．

表 1 には Salem=Mount による原データと推定値およびわれわれの導出した計算値が示してある．また図 1 は（1.20）の $\bar{u}=\log y+\tau(\alpha)$，図 2 は（1.19）の $s=\log\bar{y}+\sigma(\alpha)$ のグラフであり，また図 3 には所得分布の不平等度を表わす尺度として Theil のエントロピー I_T

$$\begin{aligned} I_T&=\int_0^{\infty}\left[\frac{x}{E(x)}\right]\log\left[\frac{x}{E(x)}\right]p(x;\ \alpha, \beta_1)dx \\ &=\frac{1}{\alpha}+\psi(\alpha)-\log\alpha \end{aligned} \tag{2.3}$$

図 3



$E(x)=x$ の期待値$=\alpha/\beta_1$

が図示してある.

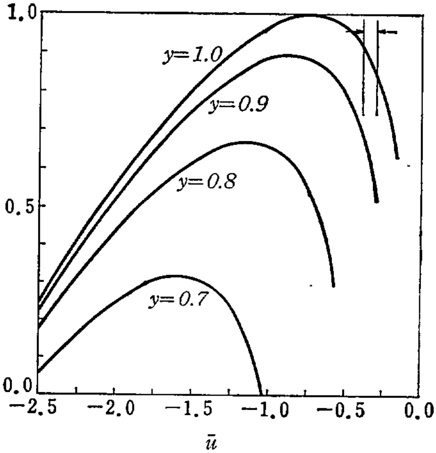
結果の検討の前に（1.18）の2つの式の意味を説明しておく．これらは元来最適値問題（1.6)～(1.9）から導かれたもので，2つのパラメーター $\bar{y}$（一個人当り平均所得）と $\bar{u}$（一個人当り平均厚生）を与えて，Lagrange 乗数 β_1, β_2 を求める連立方程式となっている．またこれを言い換えれば，$(\beta_1, \beta_2, \bar{u}, \bar{y})$ のうちのどれか2つの量を独立変数として，他の2つの量を従属変数とする4つの量の間の関係を表わしているとも言えるのである．そして，（1.19）のエントロピー s を加えると，更に $(\beta_1, \beta_2, \bar{u}, \bar{y}, s)$ の5つの量のうち2つを独立変数とした5量の間の関係を表わし，図1，2，4はその一部を示すことになる．なお $\alpha=1-\beta_2$ とおいてあるので，β_2 の代りに α を用いても同様である．

さて検討の結果は次の3点となる．

(1)　長期的な年次変化

表1によると長期に見た場合算術平均所得 $\bar{x}$（$=\bar{y}$），幾何平均所得 $\tilde{x}(=e^{\bar{u}})$ および $\alpha(1-\beta_2)$ は増加し，$\lambda(=\beta_1)$ は減少傾向になっている．まず $\bar{y}, \bar{u}$ はそれぞれ一人当りの所得，厚生（平均効用）であるから，1960～1969年の10年間にいずれも増加したことを示すし，また（1.20）より $\bar{u}-\log\bar{y}$ は α の増

図 4



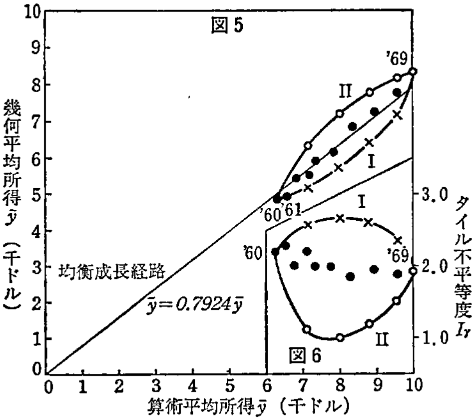
加関数になっているから，算術平均所得 $\bar{y}$ でテフレートした効用も年次的に増加傾向であったことを示す．図3は Theil の不平等度 I_T と α の関係を示すが，これも減少しており，所得の均等化が進んでいることがわかる．(各グラフで矢印で挟んだ間が 1960～1969 年の区間を表わしている．)

(2) $s, \bar{u}, \bar{y}$ の関係

(1.19) の $\sigma(\alpha)=s-\log\bar{y}$ より

$$\frac{d\sigma}{d\alpha}=1-\frac{1}{\alpha}-(\alpha-1)\psi'(\alpha)-\psi+\psi$$

であるから，$\alpha=1$ で $\sigma(\alpha)$ は最大値をとる．表1では $\alpha>1$ であるから $s-\log\bar{y}$ は減少傾向にある．ここで $\bar{y}$ を一定としたとき s と $\bar{u}$ が互いに逆方向になることは次のように説明できる．いま一定の所得を多数の個人に分配するとき，個人の効用関数が凹関数 (log 関数も含めて) ならば少人数の個人に多くを分配するよりも，できるだけ平均して分けられた方が集団全体としての厚生は大きくなる筈である．他方エントロピーについて考えると，一定の所得が平均化して分配されている状態はあまり「確からしい」とは言えない．すなわち $\alpha>1$ のとき，一定所得の均等化はいわゆる自然の進む方向とは逆方向なのである．これは厚生増大のためには自然の方向に逆って進める政策が必要とな



● 観測値(1960より1969年まで左から順に並ぶ)
○× 仮想値(仮想的成長経路)

るということを意味する．数学的に言えば，$\alpha>1$ すなわち $\beta_2<0$ であることは厚生 $\bar{u}$ の増加がエントロピー s の減少を引き起すことを表わしている(Lagrange 乗数 β_2 の意味から当然)．ただし上記のことは $0<\alpha<1$ すなわち，$0<\beta_2<1$ のようなときには事情は逆となる．α が小さな国，すなわち，厚生 $\bar{u}$ が小さい国においては，$\bar{u}$ の増加する方向は自然の進む方向である．このことは比較的高額所得者に所得が集中している国では，そのエントロピーは低い状態にあり，もっと高い状態への移行は自然の方向であることを意味する．パレート分布がよく適合した時代，19世紀にはこういう状態の国が多かったのではないであろうか．

なお (1.19) 式と (1.20) 式から，$\bar{y}$ を一定とする代りに $\bar{u}$ を一定とし，$\bar{y}$ を変えても分析に入ってくるパラメーターは $\bar{u}-\log\bar{y}$ であるから上と同様な状況が生れる．

(3)　その他の符号条件

統計的システム論の一般論から

$$\frac{\partial\bar{y}}{\partial\beta_1}<0,\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\beta_2}<0$$

という関係が成立することが証明されている．そこで表1のデータに線形回帰

式を当てはめると

$$\bar{x}(=\bar{y})=12035.3-2952.89\,\beta_1-3514.42\,\beta_2$$
$$(815.59)\ (196.77)$$
$$\log\bar{x}(=\bar{u})=9.00892-0.347194\,\beta_1-0.572196\,\beta_2$$
$$(0.05310)(0.012810)\quad(0.018852)$$

となり，$\partial\bar{y}/\partial\beta_1<0, \partial\bar{u}/\partial\beta_2<0$ となっている．しかしこのことは Salem=Mount のガンマ分布とわれわれのモデルの理論的分布関数が完全に一致することから当然の帰結と言えるだろう．

3　所得一厚生の均衡成長経路

$$\tilde{y}=e^u \tag{3.1}$$

と $\tilde{y}$ を定義すると，

$$\log\tilde{y}=\bar{u}=\sum_i p_i \log y_i$$

であるから，$\tilde{y}$ は所得の幾何平均となる．(Salem=Mount 論文では $\tilde{x}$ と表わされている．) (1.20) と (3.1) より

$$\tilde{y}/\bar{y}=e^{\tau(\alpha)} \tag{3.2}$$

が得られる．この左辺は所得の算術平均に対する幾何平均の比であり，これは所得分布が完全平等のとき 1 となり，一般には 1 より小さい．Atkinson (=Champernowne) は「均等分配等価所得額 y_e を

$$y_e=y\left|\left[u(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u(y_i)\right]\right| \tag{3.3}$$

と定めた．これは個人の集団全体の平均効用に丁度等しくなる効用に対する所得という意味である．そして不平等尺度として

$$A=1-y_e/y \tag{3.4}$$

と定義しているが，$u(y)=\log y$ とすれば y_e は $\tilde{y}$ と一致する．ただし Atkinson は $u(y)$ を効用関数とは呼んでいないことは注意を要する．

さて (3.2) 式から経済の成長経路において，もし $\tilde{y}/\bar{y}$ が一定値を取るように変動していくならば，α の値は一定となり，またガンマ分布においては Theil の不平等度は α だけの関数であるから不平等度は不変の成長経路とな

る．これを「所得一厚生の均衡成長経路」と名付けることにしよう．(ただし実際は不平等度は減少する方向に進んでいるのでこの上にはなく，「均衡」という言葉は「理想的」ということは意味してはいない.)

図5には横軸に $\bar{y}$，縦軸に $\tilde{y}$ をとって，Salem＝Mount の家計データによるアメリカの所得一厚生の成長経路を示してある．原点を通る直線は均衡成長経路となる．表1から見れば α の値は60年の2.06から69年の2.43まで増加しているが，図5ではその増加はきわめて緩慢なものであり，60年から69年にかけて殆んど所得一厚生は均衡成長経路上を進んできたことがわかる．

図5において曲線で示した2つの経路 I, II はアメリカ経済において「仮に」所得一厚生の成長をこのように行ったとするとしたものであり，図6には I と II に対応する Theil の不平等度の変化を示してある．経路 I は急激に国民所得を増加させ，厚生がこれに追いつかない政策を取った場合を表わし，経路 II は逆のケースを表わす．経路 I に対しては明かに図6において，いわゆる Kuznets の逆 U 字型の不平等度の推移が見られる．

さらに原論文[8]では Theil の著書[22]にあるアメリカ白人・非白人家計所得分布に対しても同様な計算を行っているが，ここでは省略し，同じデータについてのヒストグラムの計算を6節で述べる．

4　個人の効用関数が凸関数の場合

われわれは個人の効用関数を対数関数（凹関数）と仮定してガンマ分布曲線を導出し，これが Salem＝Mount の論文の所得分布曲線に一致することを示した．ところで効用関数が凸であるような個人の集団の統計的性質を調べることは単に数学的のみならず経済学的にも興味のあるところである．効用関数の理論から明らかなように，その凹性は限界効用逓減を意味し，財取得に対する保守性，危険に対する安全主義を表わしている．他方凸な効用関数は財取得に対する積極性，危険に対する投機性を意味すると考えられる．従ってこれらの異った型の効用関数をもつ個人の集団の性質を比較してみるのは意味のあるところである．

計算の簡単のために所得 y に対する効用関数を

$$u(y)=y^2 \tag{4.1}$$

としよう．こうすると最尤問題の条件式は

$$\sum_i \pi_i y_i=\bar{y}, \quad \sum_i \pi_i {y_i}^2=\bar{u}$$

となる．更に条件式を簡略化するために平均所得 $\bar{y}$ を所得の単位 1 とすることにより

$$\sum_i \pi_i \left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)=1, \quad \sum_i \pi_i \left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^2=\frac{\bar{u}}{\bar{y}^2}$$

となり，$y_i/\bar{y}, \bar{u}/\bar{y}^2$ をあらためて y_i, u とかくと，条件式は

$$\sum_i \pi_i y_i=1, \quad \sum_i \pi_i {y_i}^2=u \tag{4.2}$$

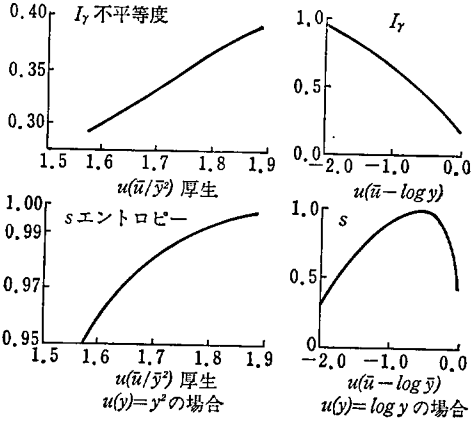
となる．これを用いて最尤問題を解くと，他の仮定や記号は全く前と同じものを用い，

(1.11) に対して，

$$Z=c\int_0^\infty e^{-\beta_1 y-\beta_2 y^2}dy$$

$$=c\frac{\exp({\beta_1}^2/4\beta_2)}{\sqrt{\beta_2}}\mathrm{Erfc}\left(\frac{\beta_1}{2\sqrt{\beta_2}}\right) \tag{4.3}$$

図 7



を得る．ここで

$$\mathrm{Erfc}(x)=\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$$

である．(1.13) より

$$-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_1}=\frac{1}{\beta_1}\omega(\gamma)=\bar{y}(=1) \tag{4.4}$$

$$-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_2}=\frac{1}{2\beta_2}(1-\omega(\gamma))=u\left(=\frac{\bar{u}}{\bar{y}^2}\right) \tag{4.5}$$

を得る．ここで

$$\gamma=\beta_1/2\sqrt{\beta_2},\ \omega(\gamma)=\frac{\gamma}{\mathrm{Erfc}(\gamma)}\exp(-\gamma^2)-2\gamma^2 \tag{4.6}$$

である．またエントロピーは

$$\begin{aligned} s&=\log Z+\beta_1\bar{y}+\beta_2 u\ \ (\bar{y}=1)\\ &=\frac{{\beta_1}^2}{4\beta_2}-\frac{1}{2}\log\beta_2+\log \mathrm{Erfc}(\gamma)+\beta_1=1+\beta_2 u\\ &=\gamma^2-\frac{1}{2}\log\beta_2+\log \mathrm{Erfc}(\gamma)+\beta_2+\frac{1}{2}(1-\omega(\gamma)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる．(4.4) と (4.5) より

$$\frac{{\beta_1}^2}{4\beta_2}=\gamma^2=\frac{u}{2}\frac{\omega^2(\gamma)}{1-\omega(\gamma)},\ u=\frac{2\gamma^2(1-\omega(\gamma))}{\omega^2(\gamma)} \tag{4.8}$$

となるから γ は u の関数として求まり，従って (4.4)，(4.5) より β_1, β_2 も u の関数として求められる．

次に Theil の不平等度 I_T であるが，分布関数 $f(y)$ に対して

$$I_T=\int\left(\frac{y}{E(y)}\right)\log\left(\frac{y}{E(y)}\right)f(y)dy$$

$$f(y)dy=\frac{1}{Z}\exp(-\beta_1 y-\beta_2 y^2)cdy$$

であるから，$y=\frac{1}{\sqrt{\beta^2}}(z-\gamma),\ \beta_2=\omega^2(\gamma)/4\gamma^2$ として，

$$I_T=\frac{1}{\mathrm{Erfc}(\gamma)}\int_\gamma^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\beta_2}}(z-\gamma)\log\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_2}}(z-\gamma)\right)e^{-z^2}dz \tag{4.9}$$

となる．以上により，γ の関数として $u, s, \beta_1, \beta_2, I_T$ を計算でき，これらの変

数間の関係を知ることができる.

以上の計算結果は図7に図示してある. またここには比較のために2節で計算した $u(y)=\log y$ のケースも並べてある. 両者では u や s の値そのものの比較は尺度が違うのでできないが, 傾向だけは明瞭な違いのあることがわかる. すなわち平均所得 $\bar{y}$ を一定 (=1) としたとき, 平均厚生 $\bar{u}$ を大きくすると $u(y)$ が凹の場合は不平等度は減少するのに対して, 凸の場合はむしろ不平等が助長されることになる. またこのことはエントロピーを大きくする (すなわち自然な) 方向と一致する. 他方凹の場合はエントロピー s の最大点を過ぎた点 (これは現在の経済社会の状態を表わしていることは前述した) では, 厚生を大きくすることはむしろ自然に反する方向であったのである. ここに効用関数の互いに逆な社会の特徴がでていて興味深いところである. また数学的興味も交えて考えれば効用関数が凹の主体と凸の主体が混合した経済社会システムの統計的行動も研究に値すると思われる.

5 2層系の統計的システム論

これまでは単一の経済社会システムを考え, これが外部から総所得, 総厚生を与えられて最尤状態になる過程を考察した. われわれは次に相互に作用を及ぼす2つのシステムを考え, これらの間に達せられる均衡状態および外部からの作用の変化に対するこれらのシステムの対応ないし行動を研究してみたいと思う. このような2つのシステムを2層系 (または2層システム) とよぶことにしよう.

(1) 2層系の定義

2層系をつくる2つのシステムを S_1, S_2 とし, それぞれを構成する個人の数を N_1, N_2, 全所得を Y_1, Y_2, 全厚生を U_1, U_2 とする. また S_1, S_2 の所得階層を $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_k$ で表わし, それぞれに配分される個人の数を $n_{11}, n_{12}, \cdots\cdots, n_{1k}$ および $n_{21}, n_{22}, \cdots\cdots, n_{2k}$ とする. また $N=N_1+N_2$, $Y=Y_1+Y_2$, $U=U_1+U_2$ とすると,

$$\sum_i n_{1i}=N_1, \quad \sum_i n_{2i}=N_2$$

$$\sum_i n_i y_i = Y_1, \quad \sum_i n_{2i} y_i = Y_2$$

$$\sum_i n_{1i} u(y_i) = U_1, \quad \sum_i n_{2i} u(y_i) = U_2$$

となる．以下しばらく $u_i = u(y_i)$ として進める．

更に $\pi_{1i} = n_{1i}/N_1$, $\pi_{2i} = n_{2i}/N_2$, $\pi_1 = N_1/N$, $\pi_2 = N_2/N$, $\bar{y}_1 = Y_1/N_1$, $\bar{y}_2 = Y_2/N_2$, $\bar{y} = Y/N$, $\bar{u}_1 = U_1/N_1$. $\bar{u}_2 = U_2/N_2$, $\bar{u} = U/N$ とすると，次の9個の式が成り立つ．ただし右側に書いた $\beta_{01}, \cdots\cdots, \beta_2$ は各制約式に対する Lagrange 乗数を示す．

$$\left.\begin{array}{ll}
① & \sum_i \pi_{1i} = 1 \cdots\cdots \beta_{01} \\
② & \sum_i \pi_{2i} = 1 \cdots\cdots \beta_{02} \\
③ & \pi_1 + \pi_2 = 1 \cdots\cdots \beta_0 \\
④ & \sum_i \pi_{1i} y_i = \bar{y}_1 \cdots\cdots \beta_1, \\
⑤ & \sum_i \pi_{2i} y_i = \bar{y}_2 \cdots\cdots \beta_{12} \\
⑥ & \pi_1 \sum_i \pi_{1i} y_i + \pi_2 \sum_i \pi_{2i} y_i = \bar{y} \cdots\cdots \beta_1 \\
⑦ & \sum_i \pi_{1i} u_i = \bar{u}_1 \cdots\cdots \beta_{21} \\
⑧ & \sum_i \pi_{2i} u_i = \bar{u}_2 \cdots\cdots \beta_{22} \\
⑨ & \pi_1 \sum_i \pi_{1i} u_i + \pi_1 \sum \pi_{22i} u_i = \bar{u} \cdots\cdots \beta_2.
\end{array}\right\} \quad (5.1)$$

2つのシステム S_1, S_2 を合わせた状態の数 W は

$$W = \frac{N!}{N_1!\, N_2!} \frac{N_1!}{\prod_i n_{1i}!} \frac{N_2!}{\prod_i n_{2i}!}$$

となり，$\log W$ を $N, N_1, N_2, n_{1i}, n_{2i}$ が十分大きいとして Stirling の近似公式を適すると，エントロピー θ として，

$$\theta = \frac{\log W}{N} = -(\pi_1 \log \pi_1 + \pi_2 \log \pi_2 + \pi_1 \sum_i \pi_{1i} \log \pi_{1i} + \pi_2 \sum_i \pi_{2i} \log \pi_{2i}) \quad (5.2)$$

が得られる．

さて2層系に対する制約は (5.1) の①～⑨のうちのいくつかによって表わされ，その条件のもとで θ を最大にするような状態が2層系の最尤状態となる．そこでその例として次のような問題を考えてみる．

(2) 問題

「2層 S_1, S_2 間で人口と所得と厚生の移動は自由にするが，それぞれの平均所得 $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ と総平均厚生 $\bar{u}$ を固定したとき，$N_1, N_2, Y_1, Y_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ は均衡状態

でどのようになるか.」

この問題は次の最適値問題として解ける.

$$\left.\begin{array}{l}\max\theta\\ \text{subject to ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑨.}\end{array}\right\} \quad (5.3)$$

(もし S_1, S_2 で厚生が固定しているときは⑨の代りに⑦と⑧を用いる.)

さらに

$$\left.\begin{array}{l}Z_1=\sum_i \exp(-\beta_{11}y_i-\beta_2 u_i)\\ Z_2=\sum_i \exp(-\beta_{12}y_i-\beta_2 u_i)\end{array}\right\} \quad (5.4)$$

とおき, 最尤状態における $\hat{\pi}_{1i}, \hat{\pi}_{2i}$ を p_{1i}, p_{2i} とすると,

$$\left.\begin{array}{l}p_1=\exp(-1-\beta_0)\exp\{-\sum_i p_{1i}(\log p_{1i}+\beta_{11}y_i+\beta_2 u_i)\}\\ p_2=\exp(-1-\beta_0)\exp\{-\sum_i p_{2i}(\log p_{2i}+\beta_{12}y_i+\beta_2 u_i)\}\end{array}\right\} \quad (5.5)$$

$$\sum_i p_{1i}y_i=-\frac{\partial \log Z_1}{\partial \beta_{11}}=\bar{y}_1,\ \sum_i p_{2i}y_i=-\frac{\partial \log Z_2}{\partial \beta_{12}}=\bar{y}_2 \quad (5.6)$$

および

$$\left.\begin{array}{l}\sum_i p_{1i}u_i=-\dfrac{\partial \log Z_1}{\partial \beta_2}=\bar{u}_1,\ \sum_i p_{2i}u_i=-\dfrac{\partial \log Z_2}{\partial \beta_2}=\bar{u}_2\\ -p_1\dfrac{\partial \log Z_1}{\partial p_2}-p_2\dfrac{\partial \log Z_2}{\partial \beta_2}=\bar{u}\end{array}\right\} \quad (5.7)$$

表 2

$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	p_1	p_2	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	α	$\tau(\alpha)$	$I_\gamma(\alpha)$	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$
5.0×10^3	5.0×10^3	0.500	0.500	2.98×10^3	2.98×10^3	1.10	−0.517	0.389	8.00	8.00
6.0	5.0	0.543	0.457	3.24	2.70	0.94	−0.616	0.443	8.08	7.90
7.0	5.0	0.570	0.430	3.45	2.46	0.83	−0.779	0.492	8.14	7.81
8.0	5.0	0.588	0.412	3.62	2.26	0.75	−0.793	0.533	8.19	7.72
9.0	5.0	0.601	0.399	3.77	2.09	0.70	−0.870	0.568	8.23	7.05

($u=8.0$ として計算してある)

が成り立つ. 単一システムの場合に倣って $u_i=\log y_i$ とし, 所得階層 y_i を連続変数で置きかえると (5.4) は

$$\left.\begin{array}{l}Z_1=c\boldsymbol{\Gamma}(1-\beta_2)/\beta_{11}{}^{1-\beta_2},\ \log Z_1=-(1-\beta_2)\log\beta_{11}+\log\boldsymbol{\Gamma}(1-\beta_2)\\ Z_2=c\boldsymbol{\Gamma}(1-\beta_2)/\beta_{12}{}^{1-\beta_2},\ \log Z_2=-(1-\beta_2)\log\beta_{12}+\log\boldsymbol{\Gamma}(1-\beta_2)\end{array}\right\} \quad (5.8)$$

となり (5.6), (5.7) より，$1-\beta_2=\alpha$ とおいて

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha}{\beta_{11}}=\bar{y}_1,\ \frac{\alpha}{\beta_{12}}=\bar{y}_2\\&-\log\beta_{11}+\psi(\alpha)=\bar{u}_1,\ -\log\beta_{12}+\psi(\alpha)=\bar{u}_2\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

となる．平均厚生 u の各システムへの分配は

$$p_1\bar{u}_1=p_1(\psi(\alpha)-\log\beta_{11}),\ p_2\bar{u}_2=p_2(-\log\beta_{12}+\psi(\alpha))\tag{5.10}$$

となる．(5.8) より β_{11},β_{12} を消去すると両システムに対して，均衡状態においては

$$\bar{u}_1-\log\bar{y}_1=\bar{u}_2-\log\bar{y}_2=\tau(\alpha)\tag{5.11}$$

が成立する．「すなわち均衡状態においては与えられた平均所得 $\bar{y}_1,\bar{y}_2$ に対して平均厚生 $\bar{u}_1,\bar{u}_2$ が適当に配分され，両システムにおいて $\bar{u}_1-\log\bar{y}_1$ と $\bar{u}_2-\log\bar{y}_2$ が等しくなりその値は $\tau(\alpha)$ となる．」更にまた次のことが言える．「両システムに共通な $\tau(\alpha)$ が定まれば α が決まり，α に対してガンマ分布の Theil の不平等度 $I_T=\tau(\alpha)+1/\alpha$ が一義的に定まるから均衡状態では両者の不平等度は等しい．」

(5.4) および (5.5) より

$$p_1=\exp(-1-\beta_0)Z_1,\ p_2=\exp(-1-\beta_0)Z_2.$$

故に

$$p_1=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2},\ p_2=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\tag{5.12}$$

これに (5.8) を代入すると

$$\left.\begin{aligned}&p_1=\frac{\bar{y}_1{}^{\alpha}}{\bar{y}_1{}^{\alpha}+\bar{y}_2{}^{\alpha}},\ p_2=\frac{\bar{y}_2{}^{\alpha}}{\bar{y}_1{}^{\alpha}+\bar{y}_2{}^{\alpha}}\\&p_1\bar{u}_1+p_2\bar{u}_2=\bar{u}.\end{aligned}\right\}\tag{5.13}$$

(5.11) を (5.13) に代入すると，α を決める方程式

$$F(\alpha)=\bar{y}_1{}^{\alpha}(\log\bar{y}_1-\bar{u})+\bar{y}_2{}^{\alpha}(\log\bar{y}_2-\bar{u})+(\bar{y}_1{}^{\alpha}+\bar{y}_2{}^{\alpha})\tau(\alpha)=0\tag{5.14}$$

が定まる．

(3) 計算結果と検討

(5.14) に含まれるパラメーターは $\bar{y}_1,\bar{y}_2$ および $\bar{u}$ であり，これらに値を入

れることにより α および次の諸量が計算される. p_1, p_2(5. 13), $\tau(\alpha)=\psi(\alpha)-\log\alpha$, $I_T(\alpha)=\tau(\alpha)+1/\alpha$, $\tilde{y}_1=\bar{y}_1\exp(\tau(\alpha))$, $\tilde{y}_2=\bar{y}_2\exp(\tau(\alpha))$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$(5. 11), $N_1=p_1N$, $N_2=p_2N$, $Y_1=N_1\bar{y}_1$, $Y_2=N_2\bar{y}_2$. 表 2 には $\bar{u}=8.0$, $\bar{y}_2=5.0\times10^3$ と固定して, $\bar{y}_1$ を 5.0×10^3 から 9.0×10^3 まで変えたときシステム S_1 と S_2 の人口比 p_1, p_2 がどのように変るか, Theil の不平等度がどのように変るかなどについて示してある. S_1 の方が平均所得が高くなるにつれて人口の移動が起り S_1 の人口が多くなるが各均衡状態で S_1, S_2 に対して (5. 11) が成立し, 両方の不平等度は一致する. すなわち,「$\bar{y}_1$ をどのように変えても人口の移度, 厚生の再配分が起って最後には (5. 11) が成立するような均衡状態に落ち着く.」ことになる.

現実の 2 層系と考えられる都市と農村, 第 2 次産業と第 3 次産業等にこのような考え方を当てはめても恐らく直ぐには成立しないであろう. このためには人口, 所得や厚生の自由な移動を妨げる別の制約ないし強い相互作用を取り入れることも必要と考えられるし, また不均衡状態から均衡状態への移行に長い時間を要することも考えねばならない.

6 所得分布ヒストグラムの導出

実際のデータと理論を比較しようとするとき, 与えられるものは連続的曲線ではなく階級の級間隔のいろいろ異ったヒストグラムである. これに対して曲線を当てはめる方向で考えることもできるが, 与えられたヒストグラムをそのまま受け取って, それに統計的システム論を適用することを以下考えてみよう.

(1) 定式化

いま n 個の所得階級を考え, それらの階級界を $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{n1}(n_1=n+1)$

図 8

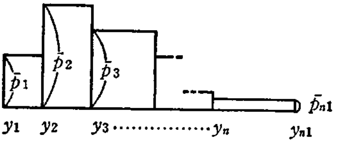


表 3　エントロピー s

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{u}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	1.604	1.156	
−2.2	1.662	1.458	
−2.1	1.675	1.674	
−2.0	1.638	1.833	0.9983
−1.9	1.542	1.946	1.427
−1.8	1.369	2.016	1.705
−1.7	1.066	2.046	1.910
−1.6		2.033	2.060
−1.5		1.969	2.164
−1.4		1.838	2.225
−1.3		1.575	2.241
−1.2			2.206
−1.1			2.100
−1.0			1.824

表 5　$\bar{y}$ に対するラグランジュ乗数 β_1

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{u}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	0.0996	−1.156	
−2.2	0.3145	−0.7201	
−2.1	0.5498	−0.4622	
−2.0	0.8296	−0.2634	−2.092
−1.9	1.193	−0.0897	−1.086
−1.8	1.722	0.6923	−0.7363
−1.7	2.783	0.2359	−0.5067
−1.6		0.4168	−0.3240
−1.5		0.6325	−0.1620
−1.4		0.9381	−0.0634
−1.3		1.758	0.1488
−1.2			0.3363
−1.1			0.6092
−1.0			1.505

表 4　Theil の不平等度 I_T

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{u}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	0.5298	0.7395	
−2.2	0.4436	0.6669	
−2.1	0.3613	0.5981	
−2.0	0.2836	0.5316	0.6288
−1.9	0.2109	0.4667	0.5671
−1.8	0.1438	0.4045	0.5112
−1.7	0.0815	0.3422	0.4577
−1.6		0.2808	0.4055
−1.5		0.2202	0.3541
−1.4		0.1593	0.3034
−1.3		0.0912	0.2540
−1.2			0.2030
−1.1			0.1493
−1.0			0.0797

表 6　$\bar{u}$ に対するラグランジュ乗数 β_2

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{u}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	0.8140	3.658	
−2.2	0.3583	2.515	
−2.1	−0.1143	1.851	
−2.0	−0.6459	1.346	6.014
−1.9	−1.303	0.9082	3.300
−1.8	−2.234	0.5077	2.365
−1.7	−4.216	0.0881	1.753
−1.6		−0.3709	1.261
−1.5		−0.9297	0.8181
−1.4		−1.758	0.3815
−1.3		−4.179	−0.0731
−1.2			−0.6513
−1.1			−1.572
−1.0			−5.005

図9

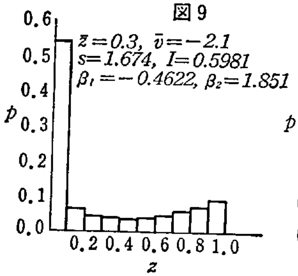


図10

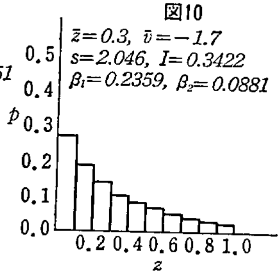


図11

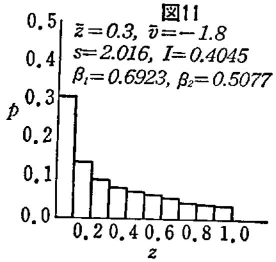
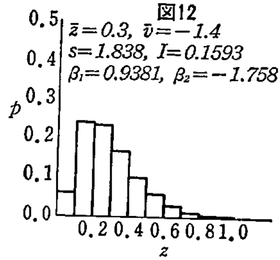


図12



とし，所得 y に対する未知の確率密度関数 $\pi(y)$ を次のような不連続関数

$$\pi(y)=\bar{p}_j,\ y_j \leqq y < y_{j+1},\ j=1,2,\cdots\cdots,n$$

とする．ただしここではまだ $\bar{p}_j$ は未知の変数である．これを図示すれば図8のようになる．いま単位所得中にあるミクロな所得階級の数（密度）を一定 c とすると，(1.7), (1.8), (1.9) のなかの$\sum$に対して次のような積分で置き換えることができる．

$$\sum_i \pi_i = 1:\ \int_{y_1}^{y_{n1}} \pi(y)^c dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \bar{p}_j c\, dy$$

$$= \sum_j \bar{p}_j c (y_{j+1} - y_j) = 1 \tag{6.1}$$

$$\sum_i \pi_i y_i = \bar{y}:\ \int_{y_1}^{y_{n1}} \pi(y) y c\, dy = \sum_j \int_{y_j}^{y_{j+1}} \bar{p}_j y c\, dy$$

$$= \sum_j \bar{p}_j c (y_{j+1} - y_j) \frac{(y_{j+1} + y_j)}{2} = \bar{y} \tag{6.2}$$

$$\sum_i \pi_i u(y_i) = \bar{u}:\ \int_{y_1}^{y_{n1}} \pi(y) u(y) c\, dy = \sum_j \int_{y_j}^{y_{j+1}} \bar{p}_j \log y c\, dy$$

$$= \sum \bar{p}_j c \{(y_{j+1} \log y_{j+1} - y_{j+1}) - (y_j \log y_j - y_j)\} = \bar{u} \tag{6.3}$$

ここで $\bar{p}_j c(y_{j+1}-y_j)$ は第 j 階級の確率となるので，これを改めて p_j とおき，また後の便宜のために $w_j=z_{j+1}-z_j$, $w=y_{n+1}-y_1$, $z_j=y_j/w$ とおくと，(6.2), (6.3) は

$$\textstyle\sum_j p_j(z_{j+1}+z_j)/2=\bar{y}/w \tag{6.4}$$

$$\textstyle\sum_j p_j\{z_{j+1}\log z_{j+1}-z_{j+1})-(z_j\log z_j-z_j)\}/w_j$$
$$=\bar{u}-\log w=\log(\tilde{y}/w) \tag{6.5}$$

となる．また

$$\bar{z}_j=(z_{j+1}+z_j)/2$$
$$\bar{v}_j=\{(z_{j+1}\log z_{j+1}-z_{j+1})-(z_j\log z_j-z_j)\}/w_j$$
$$\bar{z}=\bar{y}/w,\ \bar{v}=\log(\tilde{y}/w)$$

とおく．同様にしてエントロピーは

$$\theta=\textstyle\sum_i-\pi_i\log\pi_i:\ \theta=\sum_j-p_j\log(p_j/w_j)+\log w+\log c \tag{6.6}$$

となる．

そこで最尤状態を求める最大値問題は

$$\textstyle\sum_j p_j=1 \tag{6.7}$$

$$\textstyle\sum p_j\bar{z}_j=\bar{z} \tag{6.8}$$

$$\textstyle\sum p_j\bar{v}_j=\bar{v} \tag{6.9}$$

のもとで，エントロピー θ を最大にするような $p_j(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ を求めることになる．(6.7), (6.8), (6.9) に対する Lagrange 乗数を β_0,β_1,β_2 とすると，Lagrange 関数は

$$L=\textstyle\sum_j-p_j\log(p_j/w_j)-\beta_0(\sum_j p_j-1)-\beta_1(\sum_j p_j\bar{z}_j-\bar{z})-\beta_2(\sum_j p_j\bar{v}_j-\bar{v})$$

となり，これから

$$p_j=w_j\exp(-1-\beta_0)\exp(-\beta_1 z_j-\beta_2 v_j) \tag{6.10}$$
$$(j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

が得られる．ここで

$$w_j>0,\quad \textstyle\sum_j w_j=1$$

である．従って問題は (6.7) ～ (6.10) を満足する β_0,β_1,β_2 および $p_1,p_2,\cdots\cdots,p_n$ を求める問題に帰着する．

(2) Darroch=Ratcliff の方法による計算結果

(6.6) ~ (6.9) の最大値問題は (6.6) が $p_j(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ の凹関数であり，(6.7) ~ (6.9) が p_j について線形であるから解は唯一に定まる．(6.7) ~ (6.10) の解法としてはいくつか考えられるが，現時点で最良のものは Darroch=Ratcliff の反復尺度法 (iterative scaling method) であろう[2),13)]．これは

$$p_j=w_j\prod_{i=1}^{3}\lambda_i^{a_{ij}},\ \sum_j w_j=1,\ m_j>0 \qquad (6.11)$$

$$j=1,2,\cdots\cdots,n$$

$$\sum_j a_{ij}p_j=h_i,\ a_{ij}\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{3}a_{ij}=1 \qquad (6.12)$$

$$h_i>0,\ \sum_{i=1}^{3}h_i=1$$

の形の $n+3$ 個の関係式を満す $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ および $p_1,\cdots\cdots,p_n$ を iteration によって決定する方法である．(6.7) ~ (6.10) の4式から適当に変換することにより，(6.11), (6.12) を一義的に導くことができ，また β_0,β_1,β_2 は $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ と関係づけられる．以下ではまず所得分布ヒストグラムの導出を簡単なモデルによって実行してみることにする．

モデルは階級数 n を10とし，平均所得 $\bar{y}$，平均厚生 $\bar{u}$ の値を与えてエントロピー最大となる状態を求め，その分布確率 p_j，エントロピー s, Theil の不平等度 I_T Lagrange 乗数 β_1,β_2 その他を計算し，各 $\bar{y},\bar{u}$ の組に対する最尤状態の性質を調べることにする．計算結果の一部を表3～表6および図9～図12に示してある．ここで $\bar{z},\bar{v}$ は (6,8), (6,9) で用いてあるもので，$\bar{z}=\bar{y}/w=\bar{y}/10,\ \bar{v}=\log(\bar{y}/w)=\log(\bar{y}/10)=\bar{u}-\log 10$ のように級間隔を全体の幅 w で正規化した級間隔のもとでの平均所得，平均厚生である．この変換は単に計算の都合上のものであるから定性的には $\bar{y},\bar{u}$ と同じものである．なお表5の β_1 は $\bar{z}$ に対するものではなくそれを10で割って $\bar{y}$ に対するものを示してある．また表3～表6のすべてについて，横方向に平均所得 $\bar{z}$，縦方向に平均厚生 $\bar{v}$ をそれぞれ同じ組の値に対して，s, I_T,β_1,β_2 が対応するように書き入れてある．

まず表3を見ると，平均所得を一定にして平均厚生を増加するとき，初めはエントロピーは増加するので，厚生の制約を緩めると自然に厚生の増加する方

表 7

年		階級数 n	所　得（単位ドル） 算術平均 $\bar{y}$	幾何平均 $\tilde{y}$	$\tilde{y}/\bar{y}$	原　デ エントロピー s_0
	1947	13	3760	2829	0.7526	9.055
	1948	13	3892	2922	0.7507	9.087
	1949	14	3737	2768	0.7406	9.069
	1950	14	3978	2935	0.7378	9.125
白	1951	15	4382	3349	0.7642	9.193
	1952	16	4682	3542	0.7567	9.260
人	1954	16	4946	3662	0.7406	9.348
	1955	16	5207	3960	0.7605	9.376
家	1956	16	5657	4322	0.7640	9.447
	1957	16	5755	4449	0.7730	9.455
計	1958	16	5988	4622	0.7719	9.502
	1959	17	6375	4908	0.7698	9.571
	1960	17	6663	5094	0.7645	9.622
	1961	17	6896	5229	0.7583	9.674
	1962	17	7140	5525	0.7738	9.694
	1947	13	2036	1417	0.6959	8.539
	1948	13	2122	1463	0.6892	8.582
	1949	14	1957	1314	0.6717	8.521
	1950	14	2148	1451	0.6757	8.595
非	1951	15	2352	1618	0.6879	8.687
	1952	16	2648	1963	0.7413	8.737
白	1954	16	2787	1889	0.6779	8.865
人	1955	16	2903	2055	0.7079	8.885
	1956	16	3087	2156	0.6986	8.957
家	1957	16	3254	2235	0.6869	9.018
計	1958	16	3354	2310	0.6888	9.051
	1957	17	3523	2430	0.6898	9.099
	1960	17	3950	2705	0.6849	9.223
	1961	17	4091	2809	0.6865	9.249
	1962	17	4043	2875	0.7113	9.227

向へ向う．しかし最大値になると（例えば，$\bar{z}=3.0$, $\bar{v}=-1.7$ の近辺），今度は厚生を増大するには自然に逆ってある種の力を加えなければならない．同様なことは厚生を一定にして所得を増加する場合も言える．

データ縮約エントロピー	最尤値エントロピー s	s_0/s	Theil 不平等度 I_T	ラグランジュ乗数 β_1	β_2
0.8230	9.092	0.9959	0.2419	10.14	−0.9432
0.8205	9.128	0.9955	0.2370	9.736	−0.9312
0.8428	9.107	0.9958	0.2417	9.593	−0.8336
0.8360	9.171	0.9950	0.2416	8.924	−0.8177
0.8080	9.246	0.9942	0.2175	11.53	−1.034
0.8090	9.320	0.9936	0.2286	12.64	−0.9855
0.8413	9.397	0.9947	0.2330	11.09	−0.8396
0.8178	9.424	0.9949	0.2171	11.43	−0.9971
0.8059	9.053	0.9940	0.2124	10.65	−1.020
0.7973	9.506	0.9947	0.2036	10.96	−1.116
0.8046	9.548	0.9951	0.2075	10.44	−1.095
0.8105	9.615	0.9954	0.2099	9.663	−1.070
0.8181	9.666	0.9955	0.2146	9.032	−1.023
0.8355	9.703	0.9970	0.2261	8.611	−0.9964
0.8206	9.716	0.9977	0.2123	8.942	−1.146
0.9198	8.554	0.9982	0.2934	15.52	−0.5938
0.9222	8.600	0.9980	0.2905	14.45	−0.5504
0.9422	8.537	0.9982	0.2985	14.98	−0.4714
0.9232	8.627	0.9963	0.2907	13.60	−0.4717
0.9238	8.705	0.9979	0.2847	16.72	−0.5754
0.8553	8.777	0.9954	0.2426	21.03	−0.8556
0.9321	8.887	0.9975	0.2843	15.76	−0.4724
0.9115	8.900	0.9983	0.2566	17.03	−0.6536
0.9221	8.971	0.9984	0.2671	15.33	−0.5860
0.9301	9.032	0.9985	0.2749	13.99	−0.5278
0.9336	9.060	0.9991	0.2929	13.65	−0.5364
0.9323	9.113	0.9985	0.2870	12.81	−0.5164
0.9417	9.228	0.9995	0.2949	11.31	−0.5028
0.9328	9.265	0.9983	0.3055	10.77	−0.4824
0.9223	9.226	1.000	0.2792	12.26	−0.6652

表 4 の不平等度を見ると，厚生を増大する方向ではつねに不平等度は減少し，所得を増大する方向で増加する．このことは経験的法則と一致し，とくに経済の成長率の高いときは不平等度が増すことはよく知られたところである．

表 8　1959年　所得分布

	所得階級（単位ドル）	原データ	最尤値
	1.0— 500.0	0.02100	0.00725
	500.0— 1000.0	0.02100	0.02691
	1000.0— 1500.0	0.03200	0.04010
	1500.0— 2000.0	0.03800	0.04910
	2000.0— 2500.0	0.04300	0.05477
白	2500.0— 3000.0	0.04400	0.05784
	3000.0— 3500.0	0.05000	0.05890
人	3500.0— 4000.0	0.04800	0.05845
	4000.0— 4500.0	0.05900	0.05690
家	4500.0— 5000.0	0.05700	0.05456
	5000.0— 6000.0	0.13800	0.10016
計	6000.0— 7000.0	0.11600	0.08682
	7000.0— 8000.0	0.08900	0.07334
	8000.0—10000.0	0.11200	0.10982
	10000.0—15000.0	0.09900	0.12575
	15000.0—25555.0	0.02600	0.03698
	25000.0—30000.0	0.00800	0.00234

表 9　1959年　所得分布

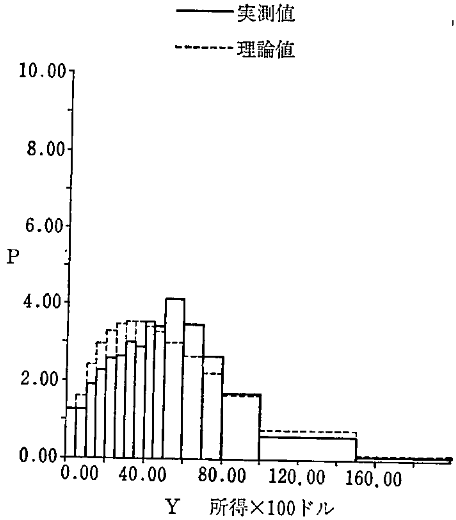
	所得階級（単位ドル）	原データ	最尤値
	1.0— 500.0	0.06100	0.05923
	500.0— 1000.0	0.09000	0.09747
	1000.0— 1500.0	0.11600	0.10315
	1500.0— 2000.0	0.09500	0.09929
	2000.0— 2500.0	0.07700	0.09137
非	2500.0— 3000.0	0.07600	0.08189
白	3000.0— 3500.0	0.08100	0.07211
	3500.0— 4000.0	0.05500	0.06272
人	4000.0— 4500.0	0.06000	0.05404
家	4500.0— 5000.0	0.06200	0.04623
	5000.0— 6000.0	0.07400	0.07237
計	6000.0— 7000.0	0.04900	0.05147
	7000.0— 8000.0	0.03800	0.03616
	8000.0—10000.0	0.04300	0.04184
	10000.0—15000.0	0.02100	0.02772
	15000.0—25000.0	0.00200	0.00286
	25000.0—30000.0	0.00100	0.00007

表5, 表6は $\bar{y}, \bar{u}$ に対する Lagrange 乗数で $\beta_1=(\partial s/\partial \bar{y})_{\bar{u}}, \beta_2=(\partial s/\partial \bar{u})_{\bar{y}}$ という関係がある．従ってそれらの正負は最尤状態から更 $\bar{y}, \bar{u}$ を変化させるとき，その方向が自然な方向か否かの判定に役立つ．

図9～図12には平均所得 $\bar{z}$ を 0.3 とし，平均厚生 $\bar{v}$ を -2.1, -1.8, -1.7, -1.4 と変えた場合の最尤状態の所得分布ヒストグラムを示してある．まず第一に所得に比して厚生が極端に低い社会（図9）では最低所得層が多いのは当然であるが最高所得層も多くなり中間の階層が少なくなることがわかる．しかもこの状態では $\beta_1<0, \beta_2>0$ となる．このような分布は Pareto 以後は見当らないが，それ以前は実際にあったのではないであろうか．（あるいは単なる数学的結果かもしれない．）所得を一定にして厚生を増大させると，図10, 11, 12 と分布は次第に近代型から現代型へと変化する．図10がいわゆる Pareto 型，図12がガンマ分布に対応するのであろう．

最後に統計値を用いた計算結果を示しておく．用いた資料は H. Theil の著

図 13 1959年白人家計

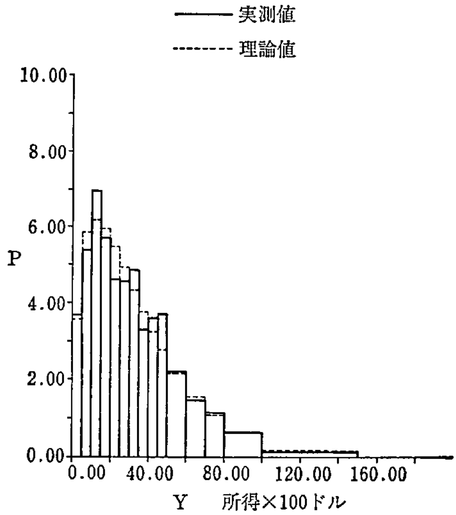


書[22)]にある，アメリカの白人と非白人家計の調査データから得られた所得分布表である．計算の方式は階級数，階級界，所得者パーセントから所得の算術平均 $\bar{y}$，幾何平均 $\tilde{y}$，平均厚生 $\bar{u}=\log\tilde{y}$ を求める．次に全階級幅 w で正規化した平均所得 $\bar{z}=\bar{y}/w$，平均厚生 $\bar{v}=\log(\tilde{y}/w)$ を計算し，(6. 8), (6. 9) に代入して最尤解を求める．

表 7 には計算結果がまとめて示してある．階級数の列からわかるように，これは年次によって異なりまた同時に階級間隔の変更も行われている．これらが違うと計算値の連結性が失われるのが普通であるから，同じ資料でも全年次の経年変化を統一的に得ることは厳密にはできない．しかし結果を長期的に見ると，階級数，間隔の変更がそれほど大きな影響を与えているようには見えない．

さて表 7 において，原データのエントロピー s_0 とその最尤値 s との比をみると，いずれの年次も白人，非白人ともに非常に 1 に近い．これからわれわれの理論の仮定がかなりよく成り立っているように思われる．なお表 8，表 9 には白人，非白人家計の所得分布確率の原データによる実測値と理論による最尤値が示してあり，図 13，図 14 は対応するヒストグラムである．

図 14　1959 年非白人家計



結び

本論文は先に発表したものの一部をまとめたものである．システムを構成する経済主体間の直接の相互作用を含めた議論は省略したがこれは文献 11 で少し取扱ってあるが，将来はこの方向を発展させたいと考えている．

最後に発表の機会を与えて下さいました一橋論叢編集委員の先生方，並びにいろいろお世話いただきました山崎昭先生に謝意を呈します．また本研究の計算には情報処理センターを長年利用させていただいたことを付記して感謝の意を表わします．

参考文献

1) Atkinson A. B. ed., *Wealth Income and Inequality*, Penguin Education, 1973.

2) Darroch J. N., D. Ratcliff, "Generalized Iterative Scaling for Log-Linear Models", *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 43, 1972, pp. 1470—1480.

3) Georgescu-Roegen N., *Entropy Law and the Economic Process*, Harvward University Press, 1972.

4) Jaynes E. T., "Information Theory and Statistical Mechanics", *Physical Review*, vol. 42, No. 6, pp. 1115—1127, 1949.

5) 片岡信二,「経済現象における最大原理」, 一橋論叢第三十三巻第三号一九五四年.

6) 片岡信二,「不確実性と最適化(統計的システム論への一試論」経済研究(一橋大学経済研究所編), 第24巻, 第4号, pp. 307—313, 1973.

7) 片岡信二,「統計的システム論 I」, 一橋大学研究年報『自然科学研究 17』, pp. 31—67, 1977.

8) 片岡信二,「統計的システム論II」, 一橋大学研究年報『自然科学研究 19』, pp. 1—21, 1979.

9) 片岡信二,「統計的システム論III」, 一橋大学研究年報『自然科学研究 20』, pp. 1—17, 1980.

10) 片岡信二,「所得分布曲線とエントロピー」, 一橋論叢, 第八十六巻, 第六号, pp. 48—64, 1981.

11) 片岡信二,「統計的システム論IV」, 一橋大学研究年報『自然科学研究 22』, pp. 3—25, 1983.

12) Khinchin A. I., *Mathematical Foundation of Statistical Mechanics*, translated by Gamov, Dover Publication, Inc., 1949.

13) 国沢清典,「エントロピー・モデル」, 日科技連, 1975.

14) Lisman, J. H. C., "Econometrics and Thermodynamics : A Remark on Davis' Theory of Budgets", *Econometrica*, Vol. 17, pp. 55—62, 1949.

15) Mizoguchi T., "A Note on Income Distribution by Sectors of Japan (1953—1973)," Income und Assets Distribution Research Project, Hitostubashi University, 1976. 他

16) Naslund B., *An Analysis of Economic Size Distribution*, Heidelberg, 1977.

17) Naslund B., "Entropy and Income Distribution", *Personal Income Disiribution*, ed. W. Krelle, A. F. Shorrocks, North-Holland, pp. 305—313, 1977.

18) Pikler A., "Optimum Allocation in Econometrics and Physics", *Weltschaftliches Archiv*, vol. 66, pp. 97—132, 1951.

19) Salem A. B. Z., T. D. Mount, "A Convenient Descriptive Model of Income Distribution : The Gamma Density", *Econometrica*, vol. 42, pp. 1115—1127, 1974.

20) Sen A., *On Economic Inequality*, Oxford Univ. 1973.
杉山武彦訳,『不平等の経済理論』, 日本経済新聞社, 1977.

21) 高橋長太郎,『所得分布の変動様式』, 岩波書店, 1955.

22) Theil H., *Economics and Informaiion Theory*, North-Holland, 1967.

23) Tinbergen J., *Income Distribution, Analysis and Policies*, North-Holland, 1975.

金森久雄，川勝昭平訳，『不平等の経済理論』，日本経済新聞社，1977.

（一橋大学名誉教授）