

# 逐次解析に現われる数列和の展開

杉 原 正 顯

## 1 はじめに

本論文では、逐次解析に現われる数列和

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Phi(-w\sqrt{k}), \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(-w\sqrt{k}), \quad (1)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \phi(w\sqrt{k}), \quad S_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \phi(w\sqrt{k}), \quad (2)$$

ただし、

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(u) du$$

の  $w(>0)$  に関する展開を与える。これらの数列和が逐次解析に現われる所以等については逐次解析に関する文献を参照せよ（例えば、参考文献 [4]）。

(1), (2) の数列は、 $w$  が正であれば常に収束するが、 $w$  が小さいときには収束が非常に遅く、その効率のよい計算法を求めることが問題となっていた。これに対して、1983年、鍋谷は、Euler-Maclaurin の総和公式を巧みに用いて、 $w$  が小さい時の数列和 (1), (2) の漸近展開を与え、1つの解答を与えた [3]。この鍋谷の与えた展開式は、理論上は漸近展開式であるにもかかわらず、数値的には数列和の非常によい近似値を与えた。鍋谷自身、このような事情から、その展開式は、真の展開式であろうと予想している [3]。本論文では、この予想の正しいこと、つまり、鍋谷の与えた展開式が数列和の真の展開を与えていることを証明する。

2において、数列和の展開に関する一般的定理を証明し、3において、一般

的定理を数列和 (1), (2) に適用し, 鍋谷の与えた展開が真の展開であることを示す.

## 2 数列和の展開に関する一般的定理

### 2.1 主定理

数列和の展開に関する一般的定理 (主定理) を述べる.

定理

関数  $f(z)$  を複素平面から非正の実軸部分を除いた領域  $C - (-\infty, 0]$  で正則な関数とし, 次の (i)(ii)(iii) の条件を満足するものとする.

(i)  $f(z)$  は,  $C - (-\infty, 0]$  で次のように展開可能:

$$f(z) = \sum_{i=1}^l a_i z^{\alpha_i} + a_{-1} z^{-1} + \sum_{j=1}^m b_j z^{\beta_j} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{n}{r}}. \quad (3)$$

ただし,  $\alpha_i < -1, \beta_j > -1, r$ : 自然数,  $かつ$ ,

$$R \equiv \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r} e^{-1} |c_n|^{\frac{r}{n}} > 0 \quad (4)$$

とする.

(ii) ある正数  $A$  が存在して,  $f(x) = O(e^{-Ax})$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

(iii)  $f_s(z) = \sum_{i=1}^l a_i z^{\alpha_i} + a_{-1} z^{-1}$  とおく ((i) の (3) 参照).  $f(z) - f_s(z)$  は, 正の実軸部分を含む開き角  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ) 以上の角領域内で  $z$  を無限大にするとき, 一様有界 (図1参照).

このとき,  $0 < h < 2\pi/R$  を満足する  $h$  に対して, 次式が成立つ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f(k \cdot h) &= \frac{1}{h} \left( \int_0^1 f(x) - f_s(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^l \frac{a_i}{\alpha_i + 1} \right) - a_{-1} \frac{\log h}{h} \\ &\quad + \sum_{i=1}^l a_i \zeta(-\alpha_i) h^{\alpha_i} + a_{-1} \gamma \frac{1}{h} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m b_j \zeta(-\beta_j) h^{\beta_j} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta\left(-\frac{n}{r}\right) h^{\frac{n}{r}}. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで,  $\gamma$  は Euler の定数,  $\zeta(z)$  は Riemann の  $\zeta$  関数.

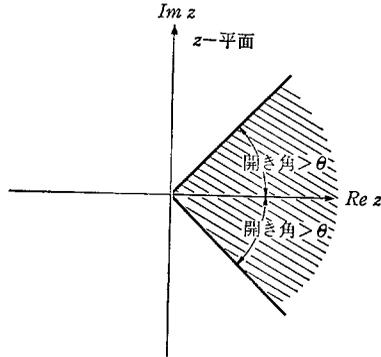


図 1 開き角  $\theta$  以上の角領域 (斜線部)

定理に与えられた数列和の展開式は、鍋谷によって与えられた数列和の (漸近) 展開式 ([3]) と一致することに注意せよ。

## 2.2 Laplace 変換論からの準備

主定理の証明では、Laplace 変換論でよく知られた結果を多く用いる。ここに、それらの結果をまとめて補題の形であげておく (補題 1~3 の詳細については、[1] を参照)。

### 補題 1

$f(x)$  を  $(0, \infty)$  上の微分可能関数で、 $(0, \infty)$  で絶対可積分とする。今、さらに、 $f(x)$  がある定数  $A$  について、

$$f(x) = O(e^{-Ax}) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

を満足するとする。この時、次の (i)(ii) が成立する。

(i) 関数  $f$  の Laplace 変換  $\mathcal{L}(f)(s) \equiv \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$  は、複素半平面  $\text{Re } s > -A$  で正則である。

(ii)  $\sigma$  を  $\sigma > -A$  なる任意の実数とすると、 $x > \sigma$  について、

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \mathcal{L}(f)(s) e^{sx} ds. \quad (6)$$

### 補題 2 (Abel の定理)

積分  $\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$  が任意の正の  $s$  について収束するとする。この時、

$f(x)$  の  $(0, \infty)$  における積分が存在すれば,

$$\lim_{s \rightarrow +0} \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} f(x) dx. \quad (7)$$

補題3 (Hardy の定理)

$f(x)$  を,  $x > 0$  で次のように展開可能な関数とする.

$$f(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\frac{n}{r}}. \quad (8)$$

ただし,  $\nu > -1$ ,  $r$ : 自然数, かつ,

$$R \equiv \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r} e^{-1} |c_n|^{\frac{r}{n}} > 0 \quad (9)$$

とする.

このとき,  $f(x)$  の Laplace 変換を定義する積分  $\int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$  に  $f(x)$  の上記の展開を代入し形式的に項別積分した級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Gamma\left(\nu + \frac{n}{r} + 1\right) s^{-\nu - \frac{n}{r} - 1} \quad (10)$$

は, 領域  $\{s \in \mathbf{C} - (-\infty, 0] \mid |s| > R\}$  で絶対広義一様収束し, その収束値を  $g(s)$  と表わすとき, 等式:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx = g(s) \quad (11)$$

(この等式の意味は, Laplace 変換を定義する積分が, 少なくとも領域  $\{s \in \mathbf{C} - (-\infty, 0] \mid |s| > R\}$  に属する  $s$  に対して存在し, かつ, この領域における Laplace 変換の値が  $g(s)$  に等しいという意味) が成立する.

注意:  $|s| > R$  と次式が同値であることを注意.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|c_n| \Gamma\left(\nu + \frac{n}{r} + 1\right) |s|^{-\nu - \frac{n}{r} - 1})^{1/n} < 1.$$

補題4

(i)  $m$  を非負の整数とするととき,  $x > 0$  に対して

$$\frac{1}{x^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_\theta} (-1)^{m+1} \frac{s^m}{m!} \log s e^{sx} ds. \quad (12)$$

ただし, 積分路  $B_\theta$  は, 原点を避け, 角領域  $\{s \in \mathbf{C} \mid |\arg s| \leq \pi/2 + \theta\}$  ( $\theta$  は,

$0 < \theta < \pi/2$  を満たす実数であればなんでもよい) の縁に沿って走る曲線 (図 2 参照),  $\log s$  の分枝は,  $s > 0$  で  $\log s$  が実数となるような分枝をとるものとする。

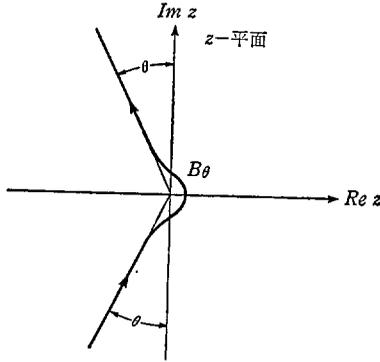


図 2 積分路  $B_\theta$

(ii)  $\alpha$  を  $\alpha < -1$  なる整数でない実数とするとき,

$$x^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_\theta} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} e^{sx} ds. \tag{13}$$

積分路  $B_\theta$  は, (i) における積分路と同じ積分路,  $s^{\alpha+1}$  の分枝は,  $s > 0$  における値が実数となるような分枝とする。

この結果は, Laplace 変換論の範疇に入るが, 標準的とは言い難いので, 略証を与えておく。

(略証) (i) (ii) とともに証明は, ほぼ同様に行えるので, (i) についてのみ証明を与える。

被積分関数の正則性と,  $s \rightarrow \infty$  の時の減衰度に注意すれば, 積分路を図 3 に描いたような 2 本の半直線  $\Gamma_1 = \{s = -0i + re^{-i\theta} | \epsilon \leq r < +\infty\}$ ,  $\Gamma_3 = \{s = +0i + re^{i\theta} | \epsilon \leq r < +\infty\}$  と円の一部  $\Gamma_2 = \{s = \epsilon e^{i\theta} | -\pi + 0 \leq \theta \leq \pi - 0\}$  から成る積分路に変形できることがわかる。ここで,  $\epsilon \rightarrow +0$  とすると, 容易に分かるように  $\Gamma_2$  上の積分は 0 に収束し,  $\Gamma_1, \Gamma_3$  上の積分は次のように評価される。

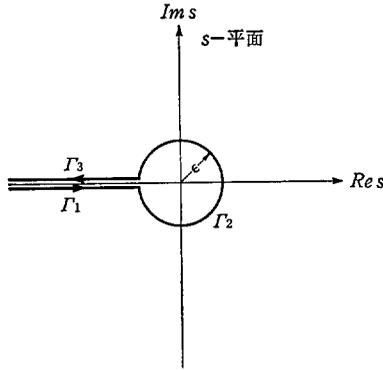


図 3 積分路  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} (-1)^{m+1} \frac{s^m}{m!} \log s e^{sx} ds = \\
 & = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+0} (-1)^{m+1} \frac{(-r)^m}{m!} (\log r - \pi i) e^{-rx} (-dr) \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{+0}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{(-r)^m}{m!} (\log r + \pi i) e^{-rx} (-dr) \\
 & = \int_0^{\infty} \frac{r^m}{m!} e^{-rx} dr = \frac{1}{x^{m+1}}.
 \end{aligned}$$

従って、補題 4 にいう等式を得る。

### 2.3 主定理の証明

いくつかの段階に分けて証明を行う。

(I)  $f(x) - f_s(x)$  の Laplace 変換  $\mathcal{L}(f - f_s)(s)$  は、 $\operatorname{Re} s > 0$  で定義可能である (つまり、 $f - f_s$  の Laplace 変換を定義する積分が収束する)。

(証明) 定理の仮定 (条件) (i) (ii) から明らか。

(II) (I) で定義された  $\mathcal{L}(f - f_s)(s)$  は、角領域  $\{s \in \mathbb{C} \mid |\arg s| < \pi/2 + \theta\}$  までは解析接続可能である。

(証明) まず、任意の正の実数  $s$  に対して、

$$\mathcal{L}(f - f_s)(s) = \int_0^{\infty} \{f(x) - f_s(x)\} e^{-sx} dx$$

$$= \int_0^\infty \{f(re^{-i\theta}) - f_s(re^{-i\theta})\} e^{-sr e^{-i\theta}} e^{-i\theta} dr \quad (14)$$

が成立つことを示す。

関数  $(f(z) - f_s(z))e^{-sz}$  は  $C - (-\infty, 0]$  において正則であるから、Cauchy の定理より、次の等式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} \int_0^R \{f(x) - f_s(x)\} e^{-sx} dx &= \int_{\Gamma_\epsilon} \{f(z) - f_s(z)\} e^{-sz} dz \\ &+ \int_0^R \{f(re^{-i\theta}) - f_s(re^{-i\theta})\} e^{-sr e^{-i\theta}} e^{-i\theta} dr \\ &+ \int_{\Gamma_R} \{f(z) - f_s(z)\} e^{-sz} dz. \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $\Gamma_\epsilon = \{z = \epsilon e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq -\theta\}$ ,  $\Gamma_R = \{z = R e^{i\theta} | -\theta \leq \theta \leq 0\}$ .

ここで、 $\epsilon \rightarrow +0, R \rightarrow +\infty$  とすると、(15) の右辺第1項は  $f - f_s$  の原点近傍における振舞から0に収束し、右辺第3項も定理の条件 (iii) から0に収束する。このことは (14) の成立を意味する。

今、(14) の右辺の積分は、半平面  $\{s \in C | \operatorname{Re}(s e^{-i\theta}) > 0\}$  に含まれる  $s$  について収束し、かつ、この積分によって定義される関数は、この半平面において微分可能 (正則) である。従って、 $\mathcal{L}(f - f_s)(s)$  は、半平面  $\{s \in C | \operatorname{Re}(s e^{-i\theta}) > 0\}$  へ解析接続可能である。

同様にして、 $\mathcal{L}(f - f_s)(s)$  は、半平面  $\{s \in C | \operatorname{Re}(s e^{i\theta}) > 0\}$  へも解析接続可能であることがわかる。

$\{s \in C | \operatorname{Re}(s e^{-i\theta}) > 0\} \cup \{s \in C | \operatorname{Re}(s e^{i\theta}) > 0\} = \{s \in C | \arg s < \pi/2 + \theta\}$  であるからこれで (II) の主張が証明された。 ■

(III) (II) で解析接続された関数も、 $\mathcal{L}(f - f_s)(s)$  と表わすことにするとき、任意の正数  $x$  に対する  $f(x) - f_s(x)$  は、次のように複素積分表示される。

$$f(x) - f_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\theta, \delta}} \mathcal{L}(f - f_s)(s) e^{sx} ds. \quad (16)$$

ここで、 $\delta$  は、 $0 < \delta < \theta$  なる任意の実数で、積分路  $B_{\theta, \delta}$  は、図2に描いた積分路で  $\theta = \theta - \delta$  ととったものである。

(証明) 補題1より,  $\sigma$  を  $0 < \sigma < x$  ととるとき,

$$f(x) - f_s(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \mathcal{L}(f - f_s)(s) e^{sx} ds \quad (17)$$

である。右辺の積分において, 積分路を  $B_{\theta-\delta}$  に変形できることを示せばよい。そのためには,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f - f_s)(Re^{i\theta}) = 0 \quad (18)$$

が,  $|\theta| \leq \pi/2 + \theta - \delta$  なる  $\theta$  について一様に成立することを示せばよい。このことは,  $\mathcal{L}(f - f_s)(s)$  を解析接続するのに用いた  $\mathcal{L}(f - f_s)(s)$  の積分表示を用いて容易に証明される。実際,  $0 \leq \theta \leq \pi/2 + \theta - \delta$  なる  $\theta$  について, (18) が一様に成立することは, (14) を用いて次のように証明される。

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} |\mathcal{L}(f - f_s)(Re^{i\theta})| \\ & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\infty} \{f(re^{-i\theta}) - f_s(re^{-i\theta})\} e^{-Re^{i\theta}re^{-i\theta}} e^{-i\theta} dr \right| \\ & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |f(re^{-i\theta}) - f_s(re^{-i\theta})| e^{-Rr \cos(\theta - \theta)} dr \\ & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |f(re^{-i\theta}) - f_s(re^{-i\theta})| e^{-Rr \cos(\pi/2 - \delta)} dr \end{aligned}$$

(ここで,  $0 \leq \theta \leq \pi/2 + \theta - \delta$  なることを用いた。)

$$\begin{aligned} & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{C}{r^\beta} e^{-Rr \cos(\pi/2 - \delta)} dr \\ & \quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} M e^{-Rr \cos(\pi/2 - \delta)} dr \end{aligned}$$

(ここで,  $r \in (0, 1)$  において,  $|f(re^{-i\theta}) - f_s(re^{-i\theta})| \leq Cr^\beta$  ( $C > 0, \beta > -1$ ) となること, および,  $r \in [1, \infty]$  において,  $|f(re^{-i\theta}) - f_s(re^{-i\theta})| \leq M$  ( $M > 0$ ) となることを用いた。)

$$= 0.$$

$-\pi/2 - \theta + \delta \leq \theta \leq 0$  なる  $\theta$  についても, (18) が一様に成立することが同様に証明される。

(IV)  $f_s(z) = \sum_{i=1}^l a_i z^{\alpha_i} + a_{-1} z^{-1}$  に対応して,

$$\mathcal{L}(f_s)(s) \equiv \sum_{\substack{l=1 \\ \alpha_l \neq \text{整数}}}^l a_l \frac{\Gamma(\alpha_l + 1)}{s^{\alpha_l + 1}} + \sum_{\substack{l=1 \\ \alpha_l = \text{整数}}}^l a_l \frac{(-1)^{\alpha_l} s^{-\alpha_l - 1}}{(-\alpha_l - 1)!} \log s - a_{-1} \log s \quad (19)$$

とおくと、補題 4 より、次の式が成立する。

$$f_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\theta, \delta}} \mathcal{L}(f_s)(s) e^{sx} ds, \quad (20)$$

( $x > 0$ ). 従って、(16), (20) から、任意の正数  $x$  に対する  $f(x)$  は次のように複素積分表示される。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\theta, \delta}} \{\mathcal{L}(f - f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s)\} e^{sx} ds. \quad (21)$$

今、さらに、(21) における積分路は原点を越えて図 4 に描いたような積分路  $\Gamma$  に変形でき、 $f(x)$  は次のように複素積分表示できる。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \{\mathcal{L}(f - f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s)\} e^{sx} ds. \quad (22)$$

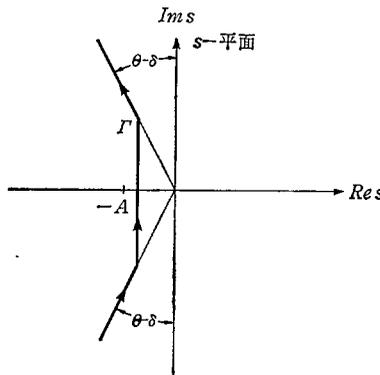


図 4 積分路  $\Gamma$

(証明) (22) を証明するためには、 $\mathcal{L}(f - f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s)$  が  $\text{Re } s > -A$  で正則であることを示せばよい。そこで、この関数を次のように分解する。

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(f - f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s) \\ &= \mathcal{L}((f - f_s) \cdot (H(x) - H(x-1)))(s) \\ &+ \mathcal{L}(f \cdot H(x-1))(s) \end{aligned}$$

$$+[\mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s)]. \quad (23)$$

ここで、 $H(x)$  は、次のように定義される Heaviside 関数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(23) の右辺第1項は、台が有界な関数の Laplace 変換であるから整関数 (複素平面全体で正則な関数)、右辺第2項は、定理の条件(ii), および、補題1から、 $\operatorname{Re} s > -A$  で正則である。(23) の右辺第3項も整関数であることが次のように示される。(i)  $f_s(x) = 1/x$ , (ii)  $f_s(x) = 1/x^{(m+1)}$  ( $m$ : 正の整数), (iii)  $f_s(x) = x^\alpha$  ( $\alpha < -1$ ,  $\alpha \neq$  整数) の場合に分けて証明する。

(i)  $f_s(x) = 1/x$  の場合

$\mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s)$  は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s) &= -\log s - \int_1^\infty \frac{1}{x} e^{-sx} dx \\ &= \int_s^1 \frac{1}{x} dx - \int_s^\infty \frac{1}{x} e^{-sx} dx \\ &= \int_s^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} e^{-x} \right) dx - \int_1^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

$(1/x - e^{-x}/x)$  は整関数であるから、(24) の最右辺は整関数である。従って、(24) の左辺も整関数である。[(24) で  $s=0$  とおくと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_s)(0) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(0) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} e^{-x} \right) dx - \int_1^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx \\ &= \gamma \text{ (Euler の定数)} \quad ([2], \text{p. } 19) \end{aligned} \quad (25)$$

この結果は後に用いる.]

(ii)  $f_s(x) = 1/x^{(m+1)}$  ( $m$ : 正の整数) の場合

まず、 $\mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s)$  を次のように部分積分を用いて変形する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s) &= \int_1^\infty \frac{1}{x^{m+1}} e^{-sx} dx \\ &= -\frac{e^{-s}}{(-m)} + \int_1^\infty \frac{1}{(-m)} \frac{1}{x^m} s e^{-sx} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots \\ & = - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k e^{-s}}{(-m)(-m+1)\cdots(-m+k)} \\ & \quad + (-1)^m \frac{s^m}{m!} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{-sx} dx. \end{aligned}$$

これを  $\mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s)$  に代入すると

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s) \\ & = (-1)^{m+1} \frac{s^m}{m!} \log s - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{m+1}} e^{-sx} dx \\ & = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k e^{-s}}{(-m)(-m+1)\cdots(-m+k)} \\ & \quad + (-1)^m \frac{s^m}{m!} \left( -\log s - \int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{-sx} dx \right) \end{aligned} \tag{26}$$

を得る。(26) の最右辺第 2 項が整関数であることは、すでに (i) で示した。第 1 項も、勿論、整関数であるから、 $\mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s)$  は整関数である。〔(26) で  $s=0$  とおくと、

$$\mathcal{L}(f_s)(0) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(0) = -1/m. \tag{27}$$

この結果も後に用いる。]

(iii)  $f_s(x) = x^\alpha$  ( $\alpha < -1$ ,  $\alpha \neq$  整数) の場合

$\alpha$  を  $\alpha = -n - \lambda$  ( $n$ : 整数,  $0 < \lambda < 1$ ) とおく。 $\mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s)$  を次のように部分積分を用いて変形する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s) & = \int_1^{\infty} x^{-n-\lambda} e^{-sx} dx \\ & = -\frac{e^{-s}}{-n-\lambda+1} + \int_1^{\infty} \frac{x^{-n-\lambda+1}}{-n-\lambda+1} s e^{-sx} dx \\ & \dots\dots \\ & = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k e^{-s}}{(-n-\lambda+1)\cdots(-n-\lambda+k+1)} \\ & \quad + \int_1^{\infty} \frac{x^{-\lambda}}{(-n-\lambda+1)\cdots(-\lambda)} s^n e^{-sx} dx. \end{aligned}$$

次に、 $\mathcal{L}(f_s)(s)$  を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_s)(s) &= \frac{\Gamma(-n-\lambda+1)}{s^{-n-\lambda+1}} \\ &= \frac{\Gamma(1-\lambda)s^{n+\lambda-1}}{(-n-\lambda+1)\cdots(-\lambda)} \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{-\lambda}}{(-n-\lambda+1)\cdots(-\lambda)} s^n e^{-sx} dx. \end{aligned}$$

これらの結果から

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k e^{-s}}{(-n-\lambda+1)\cdots(-n-\lambda+k+1)} \\ &\quad + \int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{(-n-\lambda+1)\cdots(-\lambda)} s^n e^{-sx} dx. \end{aligned} \tag{28}$$

(28) の右辺第 2 項は整関数であり、第 1 項は、勿論、整関数であるから、 $\mathcal{L}(f_s)(s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(s)$  は整関数である。 [(28) で  $s=0$  とおくと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_s)(0) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1))(0) &= 1/(-n-\lambda+1) \\ &= 1/(\alpha+1). \end{aligned} \tag{29}$$

この結果も後に用いる。]

以上で (IV) の証明は完了した。 ■

(V)  $f(x)$  の複素積分表示 (22) を用いて、問題の数列和を複素積分表示する。数列和の定義式に、(22) を代入すると

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^\infty f(k \cdot h) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^\infty \int_\Gamma \{ \mathcal{L}(f-f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s) \} e^{skh} ds \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Gamma$  上における被積分関数の振舞いに注意すれば、積分と和の順序交換が可能であることがわかる。従って、数列和は次のように、被素積分表示される。

$$\sum_{k=1}^\infty f(k \cdot h) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \{ \mathcal{L}(f-f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s) \} \frac{1}{e^{-hs} - 1} ds. \tag{30}$$

(VI) 次に、(30) の右辺の積分において、積分路  $\Gamma$  を原点を囲むように変形する（このようにして得られた積分路を  $\Gamma'$  とする—図5参照）。このとき、積分路が、被積分関数の 1 位の極 ( $s=0$ )—被積分関数の  $s=0$  における極の位数が 1 になることは、 $\mathcal{L}(f-f_s)(s)+\mathcal{L}(f_s)(s)$  が  $\text{Re } s > -A$  で正則であることによる—を過ぎることに注意すると、次の等式を得る。

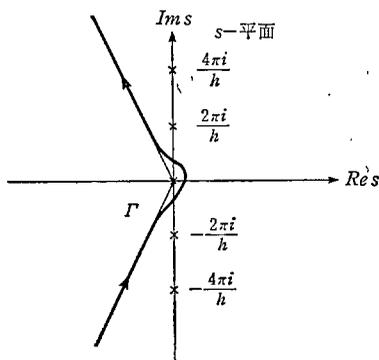


図5 積分路  $\Gamma'$  (×は、積分 (30) の被積分関数の極)

$$(30) \text{ の右辺} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \{ \mathcal{L}(f-f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s) \} \frac{1}{e^{-hs}-1} ds - \text{res} \left( s=0; \{ \mathcal{L}(f-f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s) \} \frac{1}{e^{-hs}-1} \right). \quad (31)$$

ここで、 $\text{res}()$  は留数を表わす。

(31) における留数は、(23) を用いて次のように与えられることがわかる。

$$(31) \text{ における留数} = -[ \mathcal{L}((f-f_s) \cdot (H(x)-H(x-1)))(0) + \mathcal{L}(f \cdot H(x-1))(0) + (\mathcal{L}(f_s) - \mathcal{L}(f_s \cdot H(x-1)))(0) ] / h. \quad (32)$$

(32) の右辺大カッコ内の第 1 項、第 2 項は、補題 2 から、

$$\int_0^1 f(x) - f_s(x) dx, \quad \int_1^\infty f(x) dx \quad (33)$$

に等しく、第 3 項は、(IV) で得られた結果 (25), (27), (29) から、

$$\sum_{i=1}^l a_i \frac{1}{\alpha_i + 1} + a_{-1} r \quad (34)$$

に等しい。従って、これらの結果を (31) に代入して、次の等式を得る。

$$\begin{aligned} (30) \text{ の右辺} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \{ \mathcal{L}(f-f_s)(s) + \mathcal{L}(f_s)(s) \} \frac{1}{e^{-hs}-1} ds \\ &\quad + \frac{1}{h} \left( \int_0^1 f(x) - f_s(x) dx + \int_1^\infty f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^l a_i \frac{1}{\alpha_i + 1} + a_{-1} r \right) \quad (35) \end{aligned}$$

(VII) (35) の右辺の積分部分で  $\mathcal{L}(f_s)$  に関する部分の評価を行う。まず、  
(i)  $f_s(x) = 1/x$ , (ii)  $f_s(x) = 1/x^{(m+1)}$  ( $m$ : 正の整数), (iii)  $f_s(x) = x^\alpha$  ( $\alpha < -1$ ,  $\alpha \neq$  整数) の場合について評価を行う。

(i)  $f_s(x) = 1/x$  の場合

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f_s)(s) \frac{1}{e^{-hs}-1} ds = -\frac{\log h}{h} \text{ である。}$$

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f_s)(s) \frac{1}{e^{-hs}-1} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} -\log s \frac{1}{e^{-hs}-1} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-\log \xi + \log h) \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

(ここで、 $\tilde{\Gamma}'$  は、変数変換  $\xi = hs$  によって  $\Gamma'$  から得られる積分路)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}'} -\log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} \frac{1}{h} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}'} \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} \frac{\log h}{h} \\ &= -\log h/h. \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}'} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} = 0$  (付録1参照), および、 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}'} \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} = \text{res}$   
( $\xi=0; \frac{1}{e^{-\xi}-1}$ )  $= -1$  を用いた。

(ii)  $f_s(x) = 1/x^{(m+1)}$  ( $m$ : 正の整数) の場合

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f_s)(s) \frac{ds}{e^{-hs}-1} = \frac{\zeta(m+1)}{h^{m+1}} \text{ である.}$$

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f_s)(s) \frac{ds}{e^{-hs}-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-1)^{m+1} \frac{s^m \log s}{m!(e^{-hs}-1)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-1)^{m+1} \frac{\xi^m (\log \xi - \log h)}{m!(e^{-\xi}-1)} d\xi \frac{1}{h^{m+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-1)^{m+1} \frac{\xi^m \log \xi}{m!} \frac{1}{e^{-\xi}-1} d\xi \cdot \frac{1}{h^{m+1}} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-1)^{m+1} \frac{\xi^m}{m!} \frac{1}{e^{-\xi}-1} d\xi \frac{\log h}{h^{m+1}} \\ &= \zeta(m+1)/h^{(m+1)}. \end{aligned}$$

ここで,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-1)^{m+1} \frac{\xi^m}{m!} \log \xi \frac{1}{e^{-\xi}-1} d\xi = \zeta(m+1)$  (付録2参照), および,

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-1)^{m+1} \frac{\xi^m}{m!} \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} = 0$  (被積分関数が原点近傍で正則であるから) なることを用いた. ■

(iii)  $f_s(x) = x^\alpha$  ( $\alpha < -1$ ,  $\alpha \neq$  整数) の場合

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f_s)(s) \frac{ds}{e^{-hs}-1} = \zeta(-\alpha) h^\alpha \text{ である.}$$

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f_s)(s) \frac{ds}{e^{-hs}-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \frac{ds}{e^{-hs}-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\xi^{\alpha+1}} \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} h^\alpha \\ &= \zeta(-\alpha) h^\alpha \end{aligned}$$

ここで  $\zeta(-\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \Gamma(\alpha+1) \int_{\Gamma'} \frac{\xi^{-\alpha-1}}{e^{-\xi}-1} d\xi$  なること ([2], p. 54) を用いた. ■

以上 (i)(ii)(iii) の結果から,  $\mathcal{L}(f_s)(s)$  の積分は,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f_s)(s) \frac{ds}{e^{-hs}-1} = \sum_{i=1}^l a_i \zeta(-\alpha_i) h^{\alpha_i - a_i - 1} \frac{\log h}{h} \quad (36)$$

と評価される.

(VIII) 最後に, (35) の右辺の積分部分で  $\mathcal{L}(f-f_s)(s)$  に関する部分の評価を行う.

まず、定理の条件 (i), および、補題 3 から級数:

$$\sum_{j=1}^m b_j \Gamma(\beta_j + 1) s^{-\beta_j - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right) s^{-\frac{n}{r} - 1} \quad (37)$$

が、領域  $\{s \in \mathbf{C} - (-\infty, 0] \mid |s| > R\}$  で絶対広義一様収束し、この領域内で、その収束値が  $\mathcal{L}(f-f_s)(s)$  に等しいことに注意する。そして、 $2\pi/h > R$  (つまり、 $2\pi/R > h$ ) となるように  $h$  をとり、積分路  $\Gamma'$  を変形して、積分路が領域  $\{s \in \mathbf{C} - (-\infty, 0] \mid |s| > R\}$  内を走るようにする (このようにして得られた積分路を  $\Gamma''$  とする—図 6 参照)。この時、 $\mathcal{L}(f-f_s)(s)$  の積分に関して、次の一連の評価が成立する。

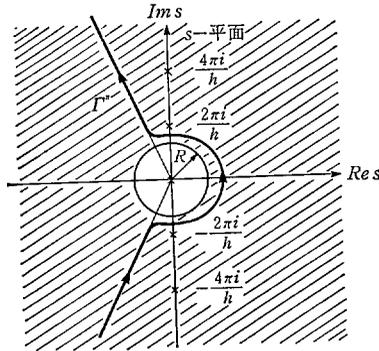


図 6 積分路  $\Gamma''$  (斜線部は級数 (37) の収束領域,  $\times$  は  $(e^{-hs} - 1)^{-1}$  の極)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \mathcal{L}(f-f_s)(s) \frac{ds}{e^{-hs} - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \mathcal{L}(f-f_s)(s) \frac{ds}{e^{-hs} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \left( \sum_{j=1}^m b_j \Gamma(\beta_j + 1) s^{-\beta_j - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right) s^{-\frac{n}{r} - 1} \right) \frac{ds}{e^{-hs} - 1} \\ &= \sum_{j=1}^m b_j \frac{\Gamma(\beta_j + 1)}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{s^{\beta_j - 1}}{e^{-hs} - 1} ds + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{s^{-\frac{n}{r} - 1}}{e^{-hs} - 1} ds \\ &= \sum_{j=1}^m b_j \frac{\Gamma(\beta_j + 1)}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{\xi^{-\beta_j - 1}}{e^{-\xi} - 1} d\xi \cdot h^{\beta_j} \\ & \quad + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{\xi^{-\frac{n}{r} - 1}}{e^{-\xi} - 1} d\xi \cdot h^{\frac{n}{r}} \end{aligned}$$

(ここで,  $\tilde{\Gamma}'''$  は変数変換  $\xi=hs$  によって  $\tilde{\Gamma}'''$  から得られる積分路)

$$= \sum_{j=1}^m b_j \zeta(-\beta_j) h^{\beta_j} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta\left(-\frac{n}{r}\right) h^{\frac{n}{r}}. \quad (38)$$

ここで,  $\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \tilde{\Gamma}(1-z) \int_{\tilde{\Gamma}'''} \frac{\xi^{z-1}}{e^{-\xi}-1} d\xi$  ( $z \neq$  正の整数) ([2], p. 54) を用いた.

(IX) (30), (35), (36), (38) をまとめて, 定理の数列和に関する展開式 (5) を得る. 以上で主定理は証明された. ■

### 3 主定理の数列和 (1), (2) への適用

主定理が適用可能なように数列和 (1), (2) を次のように書きかえる.

$$\begin{aligned} S_1 &= w^2 \sum_{k=1}^{\infty} f_1(w^2 k), \quad \text{ここで } f_1(x) = \frac{1}{t} \Phi(-\sqrt{t}), \\ S_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_2(w^2 k), \quad \text{ここで } f_2(x) = \Phi(-\sqrt{t}), \\ S_3 &= w \sum_{k=1}^{\infty} f_3(w^2 k), \quad \text{ここで } f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\sqrt{t}), \\ S_4 &= \frac{1}{w} \sum_{k=1}^{\infty} f_4(w^2 k), \quad \text{ここで } f_4(x) = \sqrt{t} \phi(\sqrt{t}). \end{aligned} \quad (39)$$

$f_1 \sim f_4$  が主定理の条件を満足することを示す. まず, (i) については, 明らかに,  $f_1 \sim f_4$  のいずれの関数もこの条件を満足する. また,  $f_1 \sim f_4$  のいずれの関数についても  $R=1/2$  となる. 次に, (ii)(iii) について考える. 容易にわかるように, (i) の条件を満足する  $f(z)$  が条件

(ii') 正の実軸を含む開き角  $\theta(0 < \theta < \pi/2)$  以上の角領域内で  $z$  を無限大にするとき,

$$f(z) = O(e^{-A'|z|}) \quad (A' \text{ はある正数}).$$

を満足すれば, (ii)(iii) は自動的に満たされる. そこで, この条件 (ii') を調べる.  $f_3, f_4$  については, (ii') が満足されることは自明である. 次に,  $f_1, f_2$  について考える.  $\Phi(-\sqrt{t})$  が問題である. まず,  $t > 0$  に対して,

$$\Phi(-\sqrt{t}) = \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v}{2}} \frac{dv}{2\sqrt{v}}. \quad (40)$$

この表式を用いると、 $t = Re^{i\theta}$  ( $R > 0, |\theta| \leq \theta < \pi/2$ ) に対して

$$\Phi(-\sqrt{t}) = \int_R^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}re^{i\theta}} \frac{e^{i\theta} dr}{2\sqrt{r} e^{i\theta/2}} \quad (41)$$

となることがわかる (被積分関数の無限遠点近傍の振舞い—減衰性—に注意).

この  $\Phi(-\sqrt{t})$  の表現から、 $R \geq 1$  の時、 $\Phi(-\sqrt{t})$  は次のように評価される.

$$\begin{aligned} |\Phi(-\sqrt{t})| &\leq \int_R^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r\cos\theta} \frac{dr}{2\sqrt{r}} \\ &\leq \int_R^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r\cos\theta} \frac{dr}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cos\theta} e^{-\frac{1}{2}R\cos\theta}. \end{aligned}$$

従って、 $f_1, f_2$  とともに条件 (ii) を満足する. 以上で、 $f_1 \sim f_4$  が主定理の (i) (ii) (iii) の条件を満たすことがわかった. ここで、主定理で述べた注意に注意すれば、鍋谷の与えた数列和 (1), (2) の漸近展開式が真の展開式であることがわかる.

次に念のために展開式を与えておく.

$0 < w < 2\sqrt{\pi}$  (これは、 $w^2 < 2\pi/R (= 4\pi)$  から導びかれる) なる  $w$  に対して、

$$S_1 = -\log w - \frac{1}{2} \log 2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k \zeta\left(-k + \frac{1}{2}\right)}{2^k k!} w^{2k+1},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{w^2} - \frac{1}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k \zeta\left(-k - \frac{1}{2}\right)}{2^k k!} w^{2k+1},$$

$$S_3 = \frac{1}{w} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \zeta\left(-k + \frac{1}{2}\right) w^{2k},$$

$$S_4 = \frac{1}{w^3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \zeta\left(-k - \frac{1}{2}\right) w^{2k}.$$

謝辞

$S_1 \sim S_4$  の漸近展開が真の展開であるに違いないことを示唆され、私をこの方

面の研究にお導びき下さった鍋谷教授に感謝いたします。

参考文献

- [1] P. Henrici: Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [2] 小松勇作: 特殊関数, 朝倉書店, 東京, 1967.
- [3] S. Nabeya: "Asymptotic Expansions for the Sum of the Series U sed in Sequential Analysis", J. Statist. Comput. Simul. Vol. 16 (1983), pp. 223—240.
- [4] 高橋一: "非線型更新理論と逐次分析の問題", 数学 Vol. 37 (1985), pp. 113—127.

付録 1.  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} = 0$

(証明) 積分路  $\Gamma'$  を図 3 に描いたような積分路  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  に変形してよいことは明らかである。そこで、 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  上の積分を評価する (殊に、 $\varepsilon \rightarrow +0$  の時の評価を行う)。

(i)  $\Gamma_1 + \Gamma_3$  上の積分

$\Gamma_1 + \Gamma_3$  上の積分は以下のように評価される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{\varepsilon} (\log r - i\pi) \frac{-dr}{e^r-1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} (\log r + i\pi) \frac{-dr}{e^r-1} \\ &= - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dr}{e^r-1} \\ &= - \int_{\varepsilon^e}^{\infty} \frac{du}{u(u-1)} \quad (u=e^r) \\ &= \log(1-e^{-\varepsilon}) \\ &= \log \varepsilon + o(1) \quad (\varepsilon \rightarrow +0) \end{aligned}$$

(ii)  $\Gamma_2$  上の積分

$\Gamma_2$  上の積分は以下のように評価される。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi}-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \log(\varepsilon e^{i\theta}) \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{e^{-\varepsilon e^{i\theta}}-1} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{e^{-\varepsilon i \theta} - 1} d\theta \cdot \log \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} i\theta \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{e^{-\varepsilon i \theta} - 1} d\theta \\
&= \operatorname{res} \left( z=0; \frac{1}{e^{-z} - 1} \right) \log \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} i\theta \cdot (-1) d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} i\theta \left\{ \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{e^{-\varepsilon i \theta} - 1} + 1 \right\} d\theta \\
&= -\log \varepsilon + 0 + O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow +0)
\end{aligned}$$

(i)(ii) の結果から

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi} - 1} = O(1) \quad (\varepsilon \rightarrow +0).$$

$\varepsilon$  の任意性より,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi} - 1} = 0$$

付録 2.  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-1)^{m+1} \frac{\xi^m}{m!} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi} - 1} = \zeta(m+1)$

(証明) 積分路  $\hat{\Gamma}'$  を図に描いたような積分路  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  に変形してよいことは明らかであるから,  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  上で積分を評価する ( $\varepsilon \rightarrow +0$  の時の評価を行う).

$\Gamma_2$  上の積分は容易に分るように  $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき 0 に収束する. 従って,  $\Gamma_1 + \Gamma_3$  上の積分を評価すればよい. その評価は以下のように簡単に行え, 求める結果を得る.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} (-1)^{m+1} \frac{\xi^m}{m!} \log \xi \frac{d\xi}{e^{-\xi} - 1} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 (-1)^{m+1} \frac{(-r)^m}{m!} (\log r - i\pi) \frac{-dr}{e^r - 1} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(-r)^m}{m!} (\log r + i\pi) \frac{-dr}{e^r - 1} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{r^m}{m!} \frac{dr}{e^r - 1} \\
&= \zeta(m+1) \quad ([2], \text{p. 50 参照})
\end{aligned}$$

(一橋大学助教授)