

# Brown 運動と非定常時系列解析

田 中 勝 人

## 1 はじめに

時系列解析は定常確率過程のフレームワークのもとで議論されるのが通常であり、そのための統計的方法については数多くの研究がなされている。非定常性を示すようなデータに対しても、例えば Box-Jenkins (1976) のように、階差をとるなり、変数変換をするなりして、そのあとの系列を定常過程からの実現値とみなして分析を進めて行く。データを生成する過程がそのような操作に適合するものならば、もちろん正当化され得るわけであるが、そうでない場合や、データがもっている本質が非定常性にあるような場合には、生のデータそのものを分析対象として扱う必要が出てくる。Brown 運動は、非定常過程を描写する一つの理論モデルであり、離散的なランダム・ウォーク過程のある意味での極限である。

周知のように、Brown 運動は液体中の微粒子の運動を記述する数学モデルとして定式化されたものである。現在では、Brown 運動に関する理論は確率論の分野で最も盛んに研究されているものであり、Brown 運動の物理的イメージのように、一方では多くの分野に浸透、拡散し、他方では理論自体が深化している。統計的方法になじまない数多くの数学モデルの中で、定常過程と同様に、Brown 運動は例外的な位置を占めている。とはいえ、非定常時系列解析への適用については研究が端緒についたばかりで、統一的なアプローチが確立しているわけではない。

本稿の目的は、現時点の非定常時系列解析の研究状況をふまえ、今後の研究

に重要と思われる諸結果を紹介することにある。第2章では、確率過程、あるいは確率変数の分布の Brown 運動とその汎関数への弱収束に関する5つの極限定理を述べる。統計学における興味は、単に弱収束の問題だけでなく、具体的に分布関数を求めることにあるが、そのための議論を第3章で行う。そして、分布の特性関数導出に関する基本的な定理と方法を示す。第4章では非定常時系列モデルに関連して実際に現れる諸統計量について、それらの極限的性質を考察する。例としてあげられているものは、Hida (1980) で述べられている Lévy の確率面積、Granger-Newbold (1974), Phillips (1986) で議論された spurious regression、Engle-Granger (1987) における cointegration の問題である。なお、定理の証明などの詳細については本稿では省略した。

## 2 弱収束に関する5つの極限定理

$\{w(t)\}$  を  $[0, 1]$  上で定義され  $R^q$  に値をとる標準 Brown 運動とする。すなわち、任意の自然数  $n$ 、任意の定数  $0=t_0<t_1<\dots<t_n\leq 1$ 、任意の  $R^q$  のベクトル  $x_1, \dots, x_n$  に対して、 $w(t_1), \dots, w(t_n)$  の同時分布の密度関数  $f_w(x_1, \dots, x_n)$  が

$$f_w(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{nq}} \left[ \prod_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \right]^{-\frac{q}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - x_{j-1})'(x_j - x_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right]$$

と表されるものである。但し、 $x_0=0$ である。従って、 $E(w(t))=0$ ,  $\text{Cov}(w(s), w(t))=E(w(s)w(t)')=\min(s, t)I_q$  である。ここで、 $I_q$  は  $q$  次元の単位行列を表す。

以下4つの節に分けて、 $w(t)$  自身、およびその汎関数への弱収束に関する極限定理について述べる。

### 2.1 部分和確率過程の弱収束

確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, \tilde{P})$  上の  $q$  次元定常過程  $\{u_j\}$  を

$$(1) \quad u_j = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varepsilon_{j-i}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| < \infty, \quad A \equiv \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

によって定義する。ここで、 $\|B\|$  は  $B'B$  の最大固有値の平方根を表す。 $\{\varepsilon_j\}$

は平均 0, 共分散行列  $I_q$  の独立同一分布に従う確率変数数列である. このとき,  $\{u_j\}$  は狭義の意味での定常過程となり, エルゴード的である (Hannan (1970), p. 204).  $\{u_j\}$  のパラメタリゼーションは通常と異なるが,  $A_0$  を単位行列としないことによりバランスされる. ラグ  $h(>0)$  の自己共分散行列は,

$$(2) \quad \begin{aligned} \Gamma_h &= E(u_j u'_{j+h}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l A'_{l+h} \end{aligned}$$

であり,  $h < 0$  のときには  $\Gamma_h = \Gamma_{-h}'$  となる. さらに  $\{u_j\}$  は絶対連続なスペクトラム

$$(3) \quad \begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Gamma_h e^{-i h \omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} A_l e^{i l \omega} \sum_{m=0}^{\infty} A'_m e^{-i m \omega} \end{aligned}$$

をもつ. 特に

$$(4) \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Gamma_h = \frac{1}{2\pi} A A'$$

であり,  $A$  が正則ならばスペクトラムは原点において正值定符号となる.

このような定常過程  $\{u_j\}$  に対して, 部分和

$$S_T = \sum_{j=1}^T u_j \quad (S_0 = 0)$$

を定義し, さらに各  $T (T=1, 2, \dots)$  に対して  $[0, 1]$  上の  $q$  次元部分確率過程

$$(5) \quad \begin{aligned} X_T(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{T}} S_{j-1} + \sqrt{T} \left( t - \frac{j-1}{T} \right) u_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} S_{[Tt]} + \frac{Tt - [Tt]}{\sqrt{T}} u_{[Tt]+1} \quad \left( \frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right) \end{aligned}$$

を考える. ここで,  $[a]$  は  $a$  を越えない最大整数である.  $C[0, 1]$  を,  $[0, 1]$  上で定義された実数値連続関数全体の空間とすれば,  $X_T(t, \omega)$  は  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$  で定義され, 直積空間

$$C^q[0, 1] = C[0, 1] \times \dots \times C[0, 1] \quad (q \text{ 個の直積})$$

に値をとる確率関数である。もちろん、上述の Brown 運動  $w(t)$  も同様である。  $C^q[0, 1]$  上に一様距離

$$d_q(x, y) = \max_i \{ \max_t |x_i(t) - y_i(t)| : x_i(t), y_i(t) \in C[0, 1], i=1, \dots, q \}$$

を導入して  $C^q[0, 1]$  は完備可分な距離空間となる (Billingsley (1968))。そして、一様距離に関して  $C^q[0, 1]$  の Borel 集合である  $H$  に対して、(5) の  $X_T(t, \omega)$  の  $H$  における分布を

$$P_T(H) = \tilde{P}(\omega : X_T(t, \omega) \in H)$$

で定義する。このとき次の定理が成立する。

**定理 1.**  $X_T(t, \omega)$  の分布  $P_T$  は、 $T \rightarrow \infty$  のとき  $Aw(t)$  の分布  $\tilde{P}_A$  に弱収束する。すなわち、 $P_T \Rightarrow \tilde{P}_A$  となる。

上記の弱収束を  $\mathcal{L}(X_T(t, \omega)) \rightarrow \mathcal{L}(Aw(t))$  とも表すことにする。この定理は Donsker の不変性原理の一般化である。  $\{u_j\}$  に対して別の仮定をおいた場合については、マルチンゲールからのアプローチとして Hall-Heyde (1980), Chan-Wei (1988), mixing 条件のもとでの不変性原理として Phillips (1987) がある。

## 2.2 Itô integral への弱収束

前節では部分和の Brown 運動への弱収束を考えたが、本節以降では Brown 運動の 2 次汎関数への弱収束を議論する。まず、(1) で定義された  $\{u_j\}$  に対して  $q \times q$  行列の確率変数

$$\begin{aligned} (6) \quad Q_T^{(q)} &= \frac{1}{T} \sum_{j=2}^T (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}) \varepsilon_j' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=2}^T v_{j-1} \varepsilon_j' \end{aligned}$$

を考える。但し、  $\{v_j\}$  は  $q$  次元ランダム・ウォーク過程

$$v_j = v_{j-1} + \varepsilon_j \quad (v_0 = 0)$$

である。このとき、  $Q_T^{(q)}$  の分布の弱収束に関して次の定理が成立する。

**定理 2.** (6) で定義された  $Q_T^{(q)}$  は、  $T \rightarrow \infty$  のとき、

$$\mathcal{L}(Q_T^{(q)}) \rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^1 w(t) dw(t)'\right)$$

となる。ここで、積分は Itô integral である。

$Q_T^{(q)}$  の第  $j$  対角要素  $Q_T^{(q)}(j, j)$  については、

$$\begin{aligned} \text{系 1.} \quad \mathcal{L}(Q_T^{(q)}(j, j)) &\rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^1 w_j(t) dw_j(t)\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\chi_1^2 - 1)\right) \end{aligned}$$

が成立し、 $q$  個の確率変数は互いに独立である。但し、 $\chi_m^2$  は自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布に従う確率変数である。系 1 で得られた結果からわかるように、対角要素に関しては Itô integral を導入する必要はない。しかし、非対角要素の分布の弱収束を記述するためにはその導入は不可避である。

次に、 $\varepsilon_j$  を  $u_j$  に代えた変量

$$\begin{aligned} (7) \quad Q_T^{(u)} &= \frac{1}{T} \sum_{j=2}^T (u_1 + \cdots + u_{j-1}) u_j' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=2}^T y_{j-1} u_j' \end{aligned}$$

を考える。但し、 $\{y_j\}$  は一般化されたランダム・ウォーク過程である。このとき、定理 2 の拡張として次の定理を得る。

定理 3. (7) で定義された  $Q_T^{(u)}$  は、 $T \rightarrow \infty$  のとき、

$$\mathcal{L}(Q_T^{(u)}) \rightarrow \mathcal{L}\left(A \int_0^1 w(t) w(t)' A'\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$$

となる。但し、 $\Gamma_j = E(u_k u_{k+j}')$ 。

### 2.3 対称積和行列の弱収束

(7) で定義された確率変数は

$$Q_T^{(u)} = \frac{1}{T} U' B U$$

と表現される。但し、 $U = (u_1, \dots, u_T)'$ :  $T \times q$  であり、 $T \times T$  行列  $B$  は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & \cdot & \cdot & 1 \\ & 0 & & & \cdot & 0 \end{pmatrix} : T \times T$$

である。 $B$  は明らかに対称でない。それに対して、本節で議論する変量は  $B$

が対称の場合であり,  $B_T$  を対称行列として

$$(8) \quad \begin{aligned} R_T^{(u)} &= \frac{1}{T} U' B_T U \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j,k=1}^T B_T(j,k) u_j u_k' \end{aligned}$$

と表されるものである.  $B_T(j,k)$  は  $B_T$  の  $(j,k)$  要素であり,

$$(9) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{j,k} \left| B_T(j,k) - K\left(\frac{j}{T}, \frac{k}{T}\right) \right| = 0$$

をみたす  $[0,1] \times [0,1]$  上の連続, 対称関数  $K(s,t)$  の存在を仮定する. さらに,  $[0,1]$  上の連続関数  $f(t)$  に対して, 積分方程式

$$(10) \quad f(t) = \lambda \int_0^1 K(s,t) f(s) ds$$

の固有値  $\lambda$  は, 有限個のものを除いては同符号とする. このとき, 積分核  $K(s,t)$  を, ほぼ定符号であると言うことにする.

**定理 4.** (8) で定義された確率変数  $R_T^{(u)}$  は, 上述の条件のもとで,  $T \rightarrow \infty$  のとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(R_T^{(u)}) &\rightarrow \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} A z_n z_n' A'\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\int_0^1 \int_0^1 K(s,t) A dw(s) dw(t)' A'\right) \end{aligned}$$

となる. 但し,  $\lambda_n$  は積分方程式 (10) における固有値であり, 重複度もこめて定義される. 又,  $\{z_n\}$  は  $NID(0, I_q)$  に従う  $q$  次元確率変数である.

#### 2.4 2 次形式の弱収束

(8) で定義された確率変数  $R_T^{(u)}$  は  $q \times q$  の行列であるが, 本節では  $q=1$  の場合を特殊ケースとして含むスカラー量

$$(11) \quad \begin{aligned} r_T^{(u)} &= \frac{1}{T} \sum_{j,k=1}^T B_T(j,k) u_j' H u_k \\ &= \frac{1}{T} u' (B_T \otimes H) u \end{aligned}$$

を考える. ここで,  $H$  は  $q \times q$  の 0 でない対称行列,  $\otimes$  は Kronecker 積,

$u = (u_1', \dots, u_T')' : qT \times 1$  である。

定理 5. (11) で定義された  $r_T^{(u)}$  は, 定理 4 と同じ条件のもとで,  $T \rightarrow \infty$  のとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r_T^{(u)}) &\rightarrow \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} z_n' A' H A z_n\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\int_0^1 \int_0^1 K(s, t) dw(s)' A' H A dw(t)\right) \end{aligned}$$

となる。

### 3 極限分布の特性関数

前章では弱収束に関する極限定理を与えたが, 極限確率変数の分布関数がどのようなものになるかはこれらの定理からすぐには出てこない。前章で現れた確率変数は次の通りである。

$$(12) \quad Aw(t) \quad (\text{定理 1})$$

$$(13) \quad \int_0^1 w(t) dw(t)' \quad (\text{定理 2})$$

$$(14) \quad A \int_0^1 w(t) dw(t)' A' + \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \quad (\text{定理 3})$$

$$(15) \quad \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) A dw(s) dw(t)' A' \quad (\text{定理 4})$$

$$(16) \quad \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) dw(s)' A' H A dw(t) \quad (\text{定理 5})$$

(12) の確率変数の分布以外は自明でない。又, (13), (14), (15) は行列値確率変数であるので, このままの形で分布を議論することは, 可能であるけれどもあまり見通しがよくない。そこで, まず (16) のスカラー確率変数の分布を考えて, その結果を使って (13), (14), (15) の特殊な場合の分布を導くことにする。

定理 6. (16) で与えられた確率変数の分布の特性関数  $\phi(\theta)$  は,

$$\phi(\theta) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^q \left(1 - \frac{2i\xi_j \theta}{\lambda_n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{j=1}^q [D(2i\xi_j\theta)]^{-\frac{1}{2}}$$

与えられる。但し、 $D(\lambda)$  は積分核  $K(s, t)$  に対応する Fredholm 行列式であり、 $\xi_j$  は行列  $H$  の固有値である。

この定理は、Anderson-Darling (1952), Varberg (1966), Nabeya-Tanaka (1988) で議論された場合の一般化である。なお、Fredholm 行列式を含めた理論については、Courant-Hilbert (1953), Hochstadt (1973) が詳しい。

定理 6 を使えば (15) の各要素の分布の特性関数も容易に求めることができる。(13), (14) の各要素の特性関数については

$$(17) \quad \int_0^1 w_1(t) dw_2(t)$$

の特性関数について考えればよい。但し、 $w_1(t), w_2(t)$  は  $w(t)$  のそれぞれ第 1, 第 2 成分である。これに対応して、(6) における  $v_1$  の第 1 成分を  $v_{1j}, \varepsilon_j$  の第 2 成分を  $\varepsilon_{2j}$  とすれば定理 2 より

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{T} \sum_{j=2}^T v_{1,j-1} \varepsilon_{2j}\right) \rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^1 w_1(t) dw_2(t)\right)$$

が成立する。ここで、

$$(18) \quad \sum_{j=2}^T v_{1,j-1} \varepsilon_{2j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & C' \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} - \varepsilon_1' \varepsilon_2$$

但し、 $\varepsilon_k = (\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{k2}, \dots, \varepsilon_{kT})'$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix} : T \times T$$

であり、(18) の右辺第 2 項については

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \varepsilon_1' \varepsilon_2 = 0$$

となっている。不変性原理より、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  に最初から正規性を仮定すると、(18) の右辺第 1 項を  $T$  でわったものの特性関数として

$$\phi_T(\theta) = E \left[ \exp \left\{ \frac{i\theta}{2T} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & C' \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right\} \right]$$



$$= \left| I_T - (2i\theta)^2 \frac{C'C}{(2T)^2} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。ここで、定理 6' と Fredholm 行列式に関する理論を使えば次の定理が得られる。

定理 7. (17) で与えられた確率変数の分布の特性関数  $\phi(\theta)$  は、

$$\phi(\theta) = (\cosh \theta)^{-\frac{1}{2}}$$

となる。

(17) の形より直観的には明らかであるが、特性関数が実数であることより、分布は原点に関して対称である。さらに、特性関数の形より、

$$(19) \quad \mathcal{L} \left( \int_0^1 w_1(t) dw_2(t) \right) = \mathcal{L} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2 - Y_n^2}{(2n-1)\pi} \right)$$

が成立する。但し、 $\{X_n\}$ ,  $\{Y_n\}$  は互いに独立で  $NID[0, 1]$  に従う確率変数列である。連続、対称、ほぼ定符号の積分核で表現される確率変数は、無限の加重表現を用いたときの係数の和が絶対収束するのに対して、Itô integral のような場合には、(19) の右辺からわかるようにその収束は一般に保証されない。(19) の分布の  $2p$  次のキュムラント  $\kappa_{2p}$  は、

$$\log \phi(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{4\theta^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right)$$

より、

$$\kappa_{2p} = \frac{2^{2p-1} (2p)!}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2p} \pi^{2p}}$$

となる。奇数次のキュムラントは 0 である。分布の分位点と密度関数は次章の第 1 節に示されている。

#### 4 時系列統計量の極限分布

本章では非定常時系列に関連して現れる諸統計量の極限分布を導出する。

##### 4.1 確率面積

Hida (1980), pp. 168—170 では、Lévy が議論した確率面積

$$(20) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^1 [w_1(t)dw_2(t) - w_2(t)dw_1(t)]$$

の特性関数が与えられている。ここでは我々のアプローチで求め、さらに  $w_1(t)$  と  $w_2(t)$  が独立でない場合についても議論する。

第3章の結果より、まず

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2T}\left[\sum_{j=2}^T v_{1j}\varepsilon_{2j} - \sum_{j=2}^T v_{2j}\varepsilon_{1j}\right]\right) \rightarrow \mathcal{L}(S)$$

が成立する。ここで、左辺の確率変数は

$$\frac{1}{4T} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & C' - C \\ C - C' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

となる。その特性関数  $\phi_T(\theta)$  は、正規性のもとで

$$\phi_T(\theta) = |I_T - \left(\frac{i\theta}{2T}\right)^2 (C - C')(C' - C)|^{-\frac{1}{2}}$$

と表され、 $(C - C')(C' - C)/T$  の  $(j, k)$  要素  $B_T(j, k)$  は、(9) をみたく関数

$$K(s, t) = 1 - 2|s - t|$$

に一樣収束することがわかる。そして、これに対応する Fredholm 行列式  $D(\lambda)$  は

$$D(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\sqrt{\lambda})$$

となる。従って、定理6を使って

**定理 8.** (20) で与えられた確率面積の分布の特性関数  $\phi(\theta)$  は、

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \left[ D\left(\left(\frac{i\theta}{2}\right)^2\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \cosh \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

となる。

$S$  の分布は原点に関して対称であり、

$$(21) \quad \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n^2 + W_n^2 - X_n^2 - Y_n^2}{(2n-1)\pi}\right)$$

となる。但し、 $(V_n, W_n, X_n, Y_n)' \sim NID(0, I_4)$  である。さらに、

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \int_0^1 [w_1(t)dw_2(t) + w_3(t)dw_4(t)]\right)$$

とも表される. 定理 7 との関連で言えば,  $S$  の分布は (17) の確率変数の  $\frac{1}{2}$  と, これとは独立に同じ分布に従う確率変数とのたたみ込みとなる. このことは, (19), (21) のそれぞれの右辺を比較しても明らかである.  $S$  の分布の  $2p$  次のキュムラント  $\kappa_{2p}$  は

$$\kappa_{2p} = \frac{(2p)!}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2p} \pi^{2p}}$$

となり, 奇数次のキュムラントは 0 となる.

表 1 には (17) と (20) の分布の分位点が示されている. これらは, 特性関数の反転を数値積分を使って求められた. 対称な分布なので片側だけの分位点を示しておいた.

表 1 (17) と (20) の確率変数の分布の分位点\*)

確率	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99
(17)	0	0.12235	0.26178	0.44837	0.77422	1.12111	1.48699	1.99125
(20)	0	0.10169	0.21463	0.35784	0.58656	0.80917	1.03030	1.32210

\*) (17) =  $\int_0^1 w_1(t)dw_2(t)$

(20) =  $\frac{1}{2} \int_0^1 [w_1(t)dw_2(t) - w_2(t)dw_1(t)]$

図 1 には, これら 2 つの確率変数の密度関数が描かれている. 参考のため標準正規分布の密度関数も図示しておいた. キュムラントの結果より, 分散  $\kappa_2$  は (17) では  $\frac{1}{2}$ , (20) では  $\frac{1}{4}$ , 又, 4 次のモーメント  $\kappa_4 + 3\kappa_2^2$  は, (17) では  $7/4$ , (20) では  $5/16$  となっている.

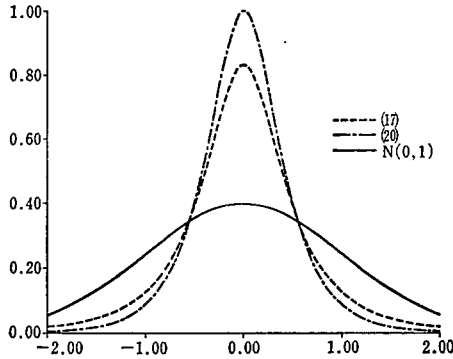
次に, (20) の  $S$  を拡張した

$$(22) \quad S' = \frac{1}{2} \int_2^1 [\tilde{w}_1(t)d\tilde{w}_2(t) - \tilde{w}_2(t)d\tilde{w}_1(t)]$$

を考える. 但し,  $\tilde{w}_1(t), \tilde{w}_2(t)$  は相関のある Brown 運動で

$$d\tilde{w}(t) = \begin{pmatrix} d\tilde{w}_1(t) \\ d\tilde{w}_2(t) \end{pmatrix} \sim NID\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} dt\right)$$

に従っているものとする.  $S'$  の分布を考えるために, 2次元のランダム・ウォ

図1 (17), (20) および  $N(0,1)$  の密度関数

一ク過程

$$x_j = x_{j-1} + v_j \quad (x_0 = 0)$$

を定義する。但し、 $v_j = G\varepsilon_j \sim NID(0, GG')$  とし、行列  $G$  は

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \sqrt{\sigma_{22} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}}} \end{pmatrix}$$

とする。このとき、定理3を使って

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T x_j v_j\right) &\rightarrow \mathcal{L}\left(G \int_0^1 w(t) dw(t)' G'\right) + GG' \\ &= \mathcal{L}\left(\int_0^1 \tilde{w}(t) d\tilde{w}(t)'\right) + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。これより、

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2T} \left[ \sum_{j=1}^T x_{1j} v_{2j} - \sum_{j=1}^T x_{2j} v_{1j} \right]\right) \rightarrow \mathcal{L}(S')$$

が成立するから、前と同様にして左辺の分布の特性関数を計算することにより次の定理を得る。

**定理 9.** (22) で与えられた一般化確率面積の分布の特性関数は

$$\phi(\theta) = \left( \cosh \frac{\theta}{2} \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}} \right)^{-1}$$

となる。

## 4.2 Spurious regression

Granger-Newbold (1974), および Phillips (1986) で議論されている時系列回帰の問題を取り上げる. 今,  $q_1$  次元,  $q_2$  次元の一般化されたランダム・ウォーク過程  $\{x_{1j}\}, \{y_{2j}\}$  が

$$\begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,j-1} \\ y_{2,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \end{pmatrix} \quad (y_{10}=0, y_{20}=0)$$

により生成されているとする. ここで,  $y_j = (y_{1j}', y_{2j}')'$ ,  $u_j = (u_{1j}', u_{2j}')'$  とおき,  $\{u_j\}$  は (1) の条件に加えて,  $A$  を正則行列とする. このとき, 推定回帰式

$$y_{2j} = \hat{B}y_{1j} + \hat{u}_{2j}$$

を定義する. ここで,

$$\hat{B} = \sum_{j=1}^T y_{2j} y_{1j}' \left( \sum_{j=1}^T y_{1j} y_{1j}' \right)^{-1}$$

であり,  $\hat{u}_{2j}$  は回帰の残差ベクトルである.

上述の回帰に関連して, Granger-Newbold (1974) は,  $\{y_{1j}\}$  と  $\{y_{2j}\}$  が独立の場合に, シミュレーションにより次のような事実を見出した. まず,  $\hat{B}$  は定常過程の場合と異なり 0 には収束せず, 退化しない分布をもつ. そして, 通常の  $t$  統計量は発散する. 従って, 係数  $B$  は有意となる. さらに, Durbin-Watson 統計量は 0 に収束する. それに対して, 決定係数は退化しない分布をもつ. 彼らが名付けた spurious regression とは, このような事実に由来する. Phillips (1986) は, 以上の事実を弱収束に関する極限理論によって説明している. そして, 上述の現象は 2 つの系列の独立性とは無関係に起こることを証明した.

以下では  $q_1 = q_2 = 1$  の場合について,  $\hat{B} = \hat{\beta}$  の極限分布を導出する. 簡単な計算により,  $\hat{\beta}$  は

$$(23) \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{j,k=1}^T B_T(j,k) u_j' H_1 u_k}{\sum_{j,k=1}^T B_T(j,k) u_j' H_2 u_k}$$

と表現されることがわかる。但し、

$$B_T(j, k) = \frac{1}{T} \min(T-j+1, T-k+1), H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。これより、定理5を使って  $\hat{\beta}$  の弱収束に関する次の定理を得る。

**定理 10.** (23) で定義された  $\hat{\beta}$  は、 $\{u_j\}$  が (1) の条件をみたし、さらに  $A$  が正則ならば、 $T \rightarrow \infty$  のとき

$$(24) \quad \mathcal{L}(\hat{\beta}) \rightarrow \mathcal{L} \left( \frac{\int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(s, t)] dw(s)' A' H_1 A dw(t)}{\int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(s, t)] dw(s)' A' H_2 A dw(t)} \right)$$

となる。

この定理より、

$$(25) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P(\hat{\beta} < x) = P\left(\frac{U}{V} < x\right) = P(xV - U > 0)$$

という関係が得られる。但し、 $U, V$  は (24) の右辺の確率変数のそれぞれ分子と分母である。そして次の定理を得る。

**定理 11.** 定理10の条件のもとで、(25)において定義された確率変数  $xV - U$  の分布の特性関数  $\phi_x(\theta)$  は

$$\phi_x(\theta) = [\cos \sqrt{2i\xi_1(x)\theta} \cos \sqrt{2i\xi_2(x)\theta}]^{-\frac{1}{2}}$$

となる。但し、 $\xi_1(x)$  と  $\xi_2(x)$  は  $A'(xH_2 - H_1)A$  の固有値で、

$$\xi_1(x), \xi_2(x) = \frac{1}{2} [A_1'(xA_1 - A_2) \pm \sqrt{(A_1'(xA_1 - A_2))^2 + |A|^2}]$$

で与えられる。ここで、 $A_1', A_2'$  はそれぞれ  $A$  の第1行、第2行の行ベクトルである。

特性関数  $\phi_x(\theta)$  を基にして、 $\hat{\beta}$  の極限分布の分布関数、密度関数、モーメントなどを求めることができる。

**定理 12.**  $\hat{\beta}$  の極限分布は平均に関して対称であり、平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$ 、平均回りの3次のモーメント  $\mu_3$ 、4次のモーメント  $\mu_4$  は次のようになる。

$$\mu = \frac{A_1' A_2}{A_1' A_1}, \sigma^2 = k_1 \frac{|A|^2}{(A_1' A_1)^2}, \mu_3 = 0, \mu_4 = k_2 \sigma^4.$$

但し,

$$k_1 = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} u (\cosh u)^{-\frac{1}{2}} du - \frac{1}{2} = 0.89072$$

$$k_2 = \frac{1}{k_1^2} \left[ -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} u (\cosh u)^{-\frac{1}{2}} du + \frac{7}{192} \int_0^{\infty} u^3 (\cosh u)^{-\frac{1}{2}} du + \frac{3}{8} \right]$$

$$= 4.95393$$

この定理より、分布のとがり  $\mu_4/\sigma^4 - 3$  は、1.95393 となることがわかる。

$\hat{\beta}$  を標準化することにより、さらに次のことがわかる。

**定理 13.**  $\hat{\beta}$  を標準化した量  $(\hat{\beta} - \mu)/\sigma$  の極限分布は原点に関して対称であり、 $A$  の値に依存しない。実際、極限分布関数は

$$(26) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P\left(\frac{\hat{\beta} - \mu}{\sigma} < x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} I_m(\phi_x^{(0)}(\theta)) d\theta$$

と表現される。但し、

$$\phi_x^{(0)}(\theta) = [\cos \sqrt{2i\nu_1(x)\theta} \cos \sqrt{2i\nu_2(x)\theta}]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\nu_1(x), \nu_2(x) = \sqrt{k_1 x \pm \sqrt{k_1 x^2 + 1}}.$$

表 2 には  $(\hat{\beta} - \mu)/\sigma$  の極限分布の分位点 (片側のみ) を示してある。 $\hat{\beta}$  自体の極限分布の分位点は、表中の値を  $\sigma$  倍して  $\mu$  を加えればよい。

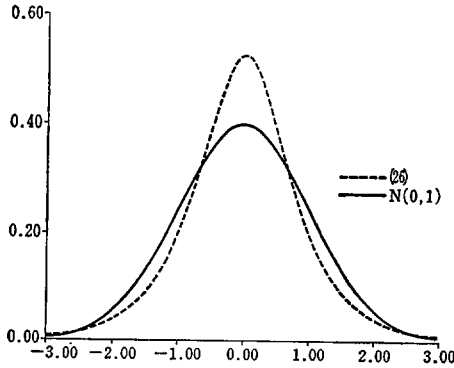
表 2  $(\hat{\beta} - \mu)/\sigma$  の極限分布の分位点

確率	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99
分位点	0	0.20553	0.43324	0.72052	1.17607	1.61712	2.05470	2.63320

図 2 には、 $(\hat{\beta} - \mu)/\sigma$  の極限分布の密度関数が、 $N(0, 1)$  の密度関数とともに描かれてある。前者の分布のとがりは、上述のようにほぼ 2 である。

2 つの確率過程が独立、あるいは無相関の場合には  $A$  の非対角要素は 0 となる。しかし、その場合でも  $\hat{\beta}$  は退化しない極限分布をもつことは上の諸結果より明らかである。 $\hat{\beta}$  以外の統計量についても、連続写像の定理を使って Phillips (1986) が行ったように弱収束に関する定理を導くことは可能である

図2 (26) および  $N(0,1)$  の密度関数



が、特性関数導出は不可能なので、ここではこれ以上ふれないことにする。

本節では行列  $A$  を正則と仮定して議論を進めてきたが、そうでない場合は次節で考察する cointegration という興味ある現象が起こることになる。

### 4.3 Cointegration

前節では2つの一般化されたランダム・ウォーク過程  $\{y_{1j}\} : q_1 \times 1, \{y_{2j}\} : q_2 \times 1$  を考え、後者を前者に回帰して  $\hat{B} : q_2 \times q_1$  を得た。今、行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} A_1' \\ \vdots \\ A_{q_1}' \\ A_{**}' \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow q_1 \\ \downarrow q_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} A_*' \\ A_{**}' \end{pmatrix}$$

と分割すると、定理4と連続写像の定理により、定理10より一般的な次の定理を得る。

定理14. 前節で定義された  $\hat{B}$  は、 $A_*$  の階数が  $q_1$  ならば、 $T \rightarrow \infty$  のとき、

$$\mathcal{L}(\hat{\beta}) \rightarrow \mathcal{L}(A_{**}' W A_* (A_*' W A_*)^{-1})$$

となる。但し、

$$W = \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) dw(s) dw(t)'$$

次に、 $A$  が正則でなく、しかも  $A_{**}$  の各列が  $A_*$  の  $q_1$  個の列ベクトルの1次結合で表される場合を考える。すなわち、0行列でない  $q_2 \times q_1$  行列  $B$  に



より

$$(27) \quad A_{**}' = BA_{*}'$$

と表されたとする。  $A_{*}$  の階数を  $q_1$  とすれば、  $B$  は一意であり  $A_{**}'A_{*}$  ( $A_{*}'A_{*}$ )<sup>-1</sup> となる。このときには、定理 14 より  $\hat{B}$  は明らかに  $B$  に確率収束する。この状況は  $A$  が正則の場合とは異なっている。

このことは、次のようにも説明できる。ラグ・オペレータ  $L$  を使ってモデルは

$$(28) \quad (1-L)y_j = A(L)\varepsilon_j$$

と表現できる。  $A(L)$  の係数行列  $A_l$  に関して、(1) の他にさらに

$$\sum_{l=1}^{\infty} l \|A_l\| < \infty$$

を仮定すると、(28) は

$$(29) \quad (1-L)y_j = A\varepsilon_j + (A(L) - A)\varepsilon_j \\ = \begin{pmatrix} A_{*}' \\ A_{**}' \end{pmatrix} \varepsilon_j + (1-L)F(L)\varepsilon_j$$

とも表現できる。但し、

$$F(L) = - \sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{l-1} L^m \right) A_l$$

である。(29) の両辺に (27) をみたす行列  $B$  を含む行列  $(-B, I_{q_2})$  をかけることにより、

$$(30) \quad y_{2j} = By_{1j} + G(L)\varepsilon_j$$

を得る。但し、

$$G(L) = (-B, I_{q_2})F(L)$$

である。  $G(L)\varepsilon_j$  は定常過程である。すなわち、  $A$  が正則でない上述のような場合には、(27) の行列  $B$  を使って、2 つの非定常過程を線形変換して定常過程にすることができる。Engle-Granger (1987) は、この場合に 2 つのランダム・ウォークが cointegrate していると表現し、行列  $(-B, I_{q_2})$  を cointegrating 行列と呼んだ。

前節で議論した  $q_1 = q_2 = 1$  の場合に戻って、 $\hat{\beta}$  を取り上げよう。  $A$  は、

$A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$  が  $\{u_j\}$  の定常性から仮定されているが、正則ではないとする。このとき、(27) で定義される  $B$  は、 $A$  が正則の場合の  $\hat{\beta}$  の極限分布の平均  $\mu$  に一致することがわかる。 $A$  が正則でなければ  $\hat{\beta}$  は  $\mu$  に確率収束するが、以下では  $\hat{\beta}$  を適当に標準化した場合の極限分布を導出する。(30) の表現は  $q_1=q_2=1$  の場合には

$$(31) \quad y_{2j} = \beta y_{1j} + v_{2j}$$

となる。但し、 $\beta = \mu = A_1' A_2 / A_1' A_1, v_{2j} = G'(L) \varepsilon_j$  で

$$G'(L) = (-\beta, 1) \frac{A(L) - A}{1 - L}$$

である。定理3と4を適用するために、 $\{u_{1j}\}$  と (31) の  $\{v_{2j}\}$  から生成される非定常過程

$$\begin{pmatrix} y_{1j} \\ z_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,j-1} \\ z_{2,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1j} \\ v_{2j} \end{pmatrix}$$

を考える。 $x_j = (y_{1j}, z_{2j})', x_0 = 0, w_j = (u_{1j}, v_{2j})'$  とすると、定理3より

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T x_j w_j'\right) \rightarrow \mathcal{L}\left(\bar{A} \int_0^1 w(t) dw(t)' \bar{A}'\right) + \sum_{j=1}^{\infty} E(w_{1j} w_j')$$

を得る。但し、

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1' \\ G'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ \mu \left[ \sum_{l=1}^{\infty} l A_l \right]_{(1,1)} - \left[ \sum_{l=1}^{\infty} l A_l \right]_{(2,1)}, \mu \left[ \sum_{l=1}^{\infty} l A_l \right]_{(1,2)} - \left[ \sum_{l=1}^{\infty} l A_l \right]_{(2,2)} \end{pmatrix}$$

である。他方、定理4より

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T x_j x_j'\right) \rightarrow \mathcal{L}\left(\bar{A} \int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(s, t)] dw(s) dw(t)' \bar{A}'\right)$$

を得る。これより、連続写像の定理を使って次の定理が得られる。

**定理 15.**  $A$  が正則でないならば、 $T \rightarrow \infty$  のとき、

$$\mathcal{L}(T(\hat{\beta} - \mu)) \rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{A_1' \int_0^1 w(t) dw(t)' G(1) + \sum_{j=1}^{\infty} E(u_{1j} v_{2j})}{A_1' \int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(s, t)] dw(s) dw(t) A_1}\right)$$

となる。

この定理を使って、 $T(\hat{\beta}-\mu)$  の極限分布の分布関数は次のように求めることができる。まず、 $HH'=\bar{A}\bar{A}'$  をみたす下三角行列  $H$  を考える。すなわち、

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{A_1' A_1} & 0 \\ A_1' G(1) & \sqrt{G'(1)G(1) - \frac{(A_1' G(1))^2}{A_1' A_1}} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1' \\ H_2' \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $\mathcal{L}(\bar{A}w(t)) = L(Hw(t))$  であり、従って  $\mathcal{L}(T(\hat{\beta}-\mu)) \rightarrow \mathcal{L}(U/V)$  となる。但し、

$$U = H_1' \int_0^1 w(t) dw(t)' H_2 + \sum_{j=1}^{\infty} E(u_{11} v_j), \\ V = H_1' \int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(s, t)] dw(s) dw(t)' H_1$$

である。今、非定常過程  $z_j = z_{j-1} + \varepsilon_j (z_0 = 0)$ ,  $\varepsilon_j \sim NID(0, I_2)$  を定義すれば、定理 3 と 4 より、任意の実数  $x$  に対して

$$\mathcal{L}\left(\frac{x}{T^2} H_1' \sum_{j=1}^T z_j z_j' H_1 - \frac{1}{T} H_1' \sum_{j=2}^T z_{j-1} \varepsilon_j' H_2 - \sum_{j=1}^{\infty} E(u_{11} v_{2j})\right) \\ \rightarrow \mathcal{L}(xV - U)$$

となる。 $2T \times 1$  ベクトル  $\varepsilon = (\varepsilon_1', \varepsilon_2')'$  を

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1T}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2T})'$$

とすれば  $H$  の定義より

$$H_1' \sum_{j=1}^T z_j z_j' H_1 = a^2 \varepsilon' \begin{pmatrix} C' C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon, \\ H_1' \sum_{j=2}^T z_{j-1} \varepsilon_j' H_2 = \frac{1}{2} \varepsilon' \begin{pmatrix} abe e' & acC' \\ acC & 0 \end{pmatrix} \varepsilon - \frac{ab}{2} \varepsilon_1' \varepsilon_1 - ac \varepsilon_1' \varepsilon_2,$$

となる。但し、 $e = (1, \dots, 1)'$ :  $T \times 1$  である。従って

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(T(\hat{\beta}-\mu) < x) \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} P\left(\varepsilon' \begin{pmatrix} \left(\frac{2a^2 x}{T^2} C' C - \frac{ab}{T} ee' - \frac{ac}{T} C'\right) & \\ -\frac{ac}{T} C & 0 \end{pmatrix} \varepsilon + ab - 2d > 0\right)$$

が成立する。但し、

$$d = \sum_{j=1}^{\infty} E(u_{11}v_{2j}).$$

最後の確率表現において、不等号の左辺にある確率変数の分布の特性関数は

$$\phi_T(\theta) = \left| I_T - 2i\theta \left( \frac{2a^2x}{T^2} C'C - \frac{ab}{T} ee' + 2i\theta \frac{(ac)^2}{T^2} C'C \right) \right|^{-\frac{1}{2}}$$

であり、Fredholm 行列式の理論より次の定理が得られる。

**定理 16.**  $A$  が正則でないならば、

$$(32) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P(T(\hat{\beta} - \mu) < x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} I_m(\phi_x(\theta)) d\theta$$

であり、 $\phi_x(\theta)$  は

$$\phi_x(\theta) = \exp(i\theta(ab - 2d)) [D_x(2i\theta)]^{-\frac{1}{2}}$$

で与えられる。但し、

$$D_x(\lambda) = \cos a\sqrt{\lambda(2x + \lambda c^2)} + ab\lambda \frac{\sin a\sqrt{\lambda(2x + \lambda c^2)}}{a\sqrt{\lambda(2x + \lambda c^2)}},$$

$$a = \sqrt{A_1' A_1}, \quad b = A_1' G(1)/a,$$

$$c = \sqrt{G'(1)G'(1) - b^2}, \quad d = \sum_{j=1}^{\infty} E(u_{11}v_{2j}).$$

この定理の中で、 $d$  の計算は次のように行えばよい。定義より、

$$u_{11} = A_1'(L)\varepsilon_1 = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \varepsilon_{1,1-l} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \varepsilon_{2,1-l},$$

$$v_{2j} = G'(L)\varepsilon_j = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varepsilon_{1,j-m} + \sum_{m=0}^{\infty} d_m \varepsilon_{2,j-m},$$

と表現すれば、

$$d = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (a_l c_{j+l-1} + b_l d_{j+l-1})$$

となる。

$T(\hat{\beta} - \mu)$  を変換してその極限分布を  $a, b, c, d$  の値に依存しないようにすることは、特性関数の形より不可能である。 $a, b, c, d$  の値が与えられれば (32)

の右辺は計算できるが、その結果についてはここでは省略する。

## References

- Anderson, T. W. and D. A. Darling (1952). "Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes," *Annals of Mathematical Statistics*, 23, 193—212.
- Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. New York: John Wiley.
- Box, G. E. P. and G. M. Jenkins (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco: Holden—Day.
- Chan, N. H. and C. Z. Wei (1988). "Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes," *Annals of Statistics*, 16, 367—401.
- Courant, R. and D. Hilbert (1953). *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*. New York: Interscience Publishers.
- Engle, R. F. and C. W. J. Granger (1987). "Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing," *Econometrica*, 55, 251—276.
- Granger, C. W. J. and P. Newbold (1974). "Spurious regressions in econometrics," *Journal of Econometrics*, 2, 111—120.
- Hall, P. and C. C. Heyde (1980). *Martingale Limit Theory and Its Application*. New York: Academic Press.
- Hannan, E. J. (1970). *Multiple Time Series*. New York: John Wiley.
- Hida, T. (1980). *Brownian Motion*. New York: Springer—Verlag.
- Hochstadt, H. (1973). *Integral Equations*. New York: John Wiley.
- Nabeya, S. and K. Tanaka (1988). "Asymptotic theory of a test for the constancy of regression coefficients against the random walk alternative," *Annals of Statistics*, 16, 218—235.
- Phillips, P. C. B. (1986). "Understanding spurious regressions in econometrics," *Journal of Econometrics*, 33, 311—340.
- Phillips, P. C. B. (1987). "Asymptotic expansions in nonstationary vector autoregressions," *Econometric Theory*, 3, 45—68.
- Varberg, D. E. (1966). "Convergence of quadratic forms in independent random variables," *Annals of Mathematical Statistics*, 37, 567—576.

(一橋大学助教授)