

# ペトリネットの $\omega$ -言語と論理式

山 崎 秀 記

## 1 はじめに

ペトリネット (Petri nets) は, 非同期的かつ平行的に動作するシステムの数学的モデルとして広く研究されてきた. ペトリネットは, 2種類の, プレース (図では○で表す) と遷移 (|で表す) と呼ばれる頂点からなる2分有向グラフであり, プレースから遷移へ, または遷移からプレースへの有向辺 (またはその束) を持つ (図1参照). ペトリネットは, システムの構成要素をプレース (の集まり) で表し, システムの基本動作を遷移で表す. そして, 遷移が表す基本動作は, それに関連するプレースが表すシステム構成要素の状態を変化させる.

システムの状態は, ペトリネットの各プレースへの石の配置 (○の中の・で表す) で表現され, マーキングと呼ばれる. 言い替えると, マーキングは各プレースが持つ石の数を成分とするベクトルである. 遷移の発火 (すなわち, 基本動作の生起) 可能性は, その遷移への有向辺を持つプレースの中の石の数によって局所的に定まり, 遷移の発火は局所的に, それに関連する (その遷移と有向辺で結ばれている) プレース中の石の数を変化させる. このように, 遷移の発火可能性や発火による状態変化が局所的に記述できることがペトリネットの特徴の一つである [4, 5].

あるアルファベット (記号の有限集合) 中の記号を加算無限個並べた記号列をそのアルファベット上の  $\omega$ -語といい,  $\omega$ -語の集合をそのアルファベット上の  $\omega$ -言語という. 本論文ではペトリネットの無限の振舞いを, ペトリネット

トにおける遷移の無限発火列の集合 (ベトリネット  $\omega$ - 言語) として捉え, それを特徴付ける論理式との関係を調べる. すなわち, ベトリネット  $\omega$ - 言語の族が, 次者関数を持った自然数上の 2 階述語論理のあるクラス  $K$  によって特徴付けられることを示す. これは, 有限オートマトンに対する同様の研究のベトリネットへの拡張である [1, 2, 3, 6].

ベトリネット  $\omega$ - 言語は有限オートマトンの場合と同様いくつかの方法で定義できる. 本論文では, 与えられた「受理」マーキングのどれかより以上のマーキングを無限回通過するような無限発火列を受理発火列とする, という条件を考える. 他の条件, 例えば, 与えられた「受理」マーキングを通過する, 与えられた「受理」マーキングを無限回通過する. ある時点より先はすべて与えられた「受理」マーキングを通過する, などが [3] で研究されている.

本論文で考える 2 階述語論理  $K$  の論理式は, ある  $\omega$ - 語  $\alpha$  の条件を記述する論理式であり, その論理式を満たす  $\omega$ - 語  $\alpha$  の集合として  $\omega$ - 言語が定義される. 2 階述語論理  $K$  は, 自然数の部分集合上を動く集合変数  $X, Y, \dots$ ,  $\omega$ - 語  $\alpha$  中の  $a$  が現れる位置の集合を表す集合定数  $P_a (a \in \Sigma)$ , 自然数上を動く整数変数  $x, y, \dots$ , 次者関数  $f$  (すなわち,  $f(x) = x + 1$ ), 述語  $=, <, <$  と通常の論理記号からなる. ここで,  $X < Y$  は 1 対 1 関数  $g: Y \rightarrow X$  が存在して, すべての  $y \in Y$  にたいし,  $g(y) \leq y$  となることを意味する. 例えば, 論理式  $P_a < P_b$  が定義する  $\omega$ - 言語は,  $\{\alpha \mid \alpha$  の任意の接頭語  $u$  に対し,  $u$  中に含まれる  $a$  の個数は  $b$  の個数以上である  $\}$  である.

本論文の主要定理は次の通りである.  $\omega$ - 言語がベトリネット  $\omega$ - 言語である必要十分条件は, それが  $<$  を含まない  $K$ - 論理式と  $X < Y$  という形の論理式との正結合 ( $\vee, \wedge$  による結合) で表される論理式  $C$  を用いて, 論理式  $\exists X_1 \dots \exists X_n C(X_1, \dots, X_n)$  で定義されることである.

## 2 基本定義

$Z$  を整数の集合,  $N$  を非負整数の集合とする.  $Z^X$  で集合  $X$  から  $Z$  への関数全体の集合を表し,  $N^X$  も同様であるとする.  $X$  が有限集合  $\{x_1, x_2, \dots\}$ ,

$x_n$  のとき,  $Z^X$  中の関数  $f$  とベクトル  $\langle f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \rangle$  を同一視する. このとき,  $Z^X$  中の関数  $f, g$  と整数  $z$  にたいし, 加算  $f+g$ , スカラー積  $z \cdot f$ , そして部分順序関係  $f \leq g$  をそれぞれ成分毎の演算で定義する.  $f \leq g$  かつ  $f \neq g$  のとき  $f < g$  と書く. 各  $n \in N$  にたいし,  $n^X$  で, すべての  $x \in X$  にたいし  $n^X(x) = n$  となる定数関数を表す. したがって,  $f$  が  $N^X$  に属す必要十分条件は  $0^X \leq f$  である.

$X, Y$  を共通部分のない集合とする. 関数  $u \in Z^X$  と  $v \in Z^Y$  にたいし,  $u * v$  は  $Z^{X \cup Y}$  中の関数で  $u * v|_X = u$  かつ  $u * v|_Y = v$  となる関数を表す. 例えば,

$$0^X * 1^Y(x) = \begin{cases} 0 & x \in X \text{ のとき} \\ 1 & x \in Y \text{ のとき} \end{cases}$$

である.

記号 (文字) の空でない有限集合をアルファベットという. 本論文で扱うベトリネットは, あるアルファベット  $\Sigma$  の元をラベルに持つラベル付きベトリネット  $M = (P, T, A, e, m_0, F)$  である. ここで,

$P$  は**プレース**の有限集合,  $T$  は**遷移**の有限集合,

$A$  は  $(P \times T \cup T \times P)$  から非負整数の集合  $N$  への関数,

$e: T \rightarrow \Sigma$  は**ラベル関数**,

$m_0$  は**初期マーキング**と呼ばれる  $M$  のマーキング,

$F$  は**受理マーキング**と呼ばれる  $M$  のマーキングの有限集合である.

ここで, ベトリネット  $M$  の**マーキング**とは, 各プレースにたいする石の割当, すなわち,  $P$  から  $N$  への関数である.

本論分では, 遷移のラベルとして空列  $\lambda$  を許していない. とくに  $\lambda$  を許している場合と区別するときには,  $\lambda$ -なしラベル付きベトリネットということもある.  $A(a, b) > 1$  のとき, 辺  $(a, b) (\in P \times T \cup T \times P)$  を**多重辺**と呼ぶ. したがって, ベトリネット  $M$  の基礎グラフ  $(PUT, A)$  は多重辺を許す2分有向グラフである.

ベトリネット  $M$  の各遷移  $t$  にたいし,  $P$  上のベクトル  $t^1$  と  $t^0$  を次のように定義する. 各プレース  $p$  にたいし,



ここで,  $t, t'$  は項で,  $X, Y$  は集合変数またはある  $a \in \Sigma$  にたいする  $P_a$  である。  $K$  の論理式,  $K$ -論理式と呼ぶ, を再帰的に次のように定義する。

(1)  $K$  の原子論理式は  $K$ -論理式である。

(2)  $C$  と  $D$  が  $K$ -論理式ならば

$C \vee D, C \wedge D, \sim C, C \rightarrow D, C \leftrightarrow D,$  は  $K$ -論理式である。

(3)  $C$  が  $K$ -論理式で  $x$  が整数変数のとき,  $\forall x C, \exists x C$  は  $K$ -論理式である。

(4)  $C$  が  $K$ -論理式で  $X$  が集合変数のとき,  $\forall X C, \exists X C$  は  $K$ -論理式である。

さらに, 述語記号  $<$  を含まない  $K$ -論理式を  $K_1$ -論理式と呼ぶ。

$\alpha$  をアルファベット  $\Sigma$  上の  $\omega$ -語とする。  $K$ -論理式  $C$  の  $\alpha$ -解釈を次のように定義する。

- 整数変数は  $N$  上を動く。
- 集合変数は  $N$  のべき集合上を動く。  $X(x)$  が真になるのは  $x \in X$  のときである。
- 定数記号  $0$  は自然数の  $0$ , 関数記号  $f$  は  $N$  上の次者関数であると解釈する。
- 述語記号  $=$  と  $<$  はそれぞれ通常の,  $N$  上の, 「等しい」と「より小」という関係であると解釈する。
- 各  $a$  にたいし,  $P_a$  は集合  $\{n | \alpha(n) = a\}$  と解釈される。 すなわち,  $P_a(n)$  が真である必要十分条件は  $\alpha$  の  $n$  番目の文字が  $a$  であることである。
- $X < Y$  が真である必要十分条件は 1対1関数  $g: Y \rightarrow X$  が存在して, すべての  $y \in Y$  にたいし,  $g(y) \leq y$  となることであると解釈する。

最後に論理記号はすべて通常どおりに解釈する。

論理式中に現れるすべての変数 (整数変数および集合変数) が量化記号  $\forall, \exists$  で束縛されている論理式を閉論理式という。すると, 閉  $K$ -論理式を用いて次のように  $\omega$ -言語を表すことができる。閉  $K$ -論理式  $C$  が定義する  $\omega$ -言語  $L(C)$  は,  $L(C) = \{\alpha | C \text{ は } \alpha\text{-解釈のもとで真である}\}$ 。

### 3 ペトリネットの標準形

この節ではペトリネットの標準形を定義し、任意のペトリネットがそれと無限の振舞いが等価な標準形に変換できることを示す。同時にペトリネット  $\omega$ -言語のいくつかの演算のもとでの閉包性をしめす。

ペトリネット  $M=(P, T, A, e, m_0, F)$  が標準形であるというのは次の条件を満たすときである。

(C1) 初期ブレースと呼ぶブレース  $p_0$  が存在して、 $m_0=1^{(p_0)} * 0^{P-(p_0)}$ .

(C2) 受理ブレースと呼ぶブレース  $p_f$  が存在して、

$$F=\{m_f\}, \text{ ただし, } m_f=1^{(p_f)} * 0^{P-(p_f)}.$$

(C3) 任意の  $(a, b)$  にたいし、 $A(a, b) \leq 1$ .

**定理 1.** 任意のペトリネット  $M$  にたいし、 $L(M)=L(M')$  を満たす標準形ペトリネット  $M'$  が構成できる。

この定理は次の補題 2, 3 から証明できる。

**補題 2.** 任意のペトリネット  $M$  にたいし、 $L(M)=L(M')$  で上記の条件 (C1) と (C2) を満たすペトリネット  $M'$  が構成できる。

**証明.**  $M=(P, T, A, e, m_0, F)$  とおく。ペトリネット  $M'$  を構成するために、新たに3個のブレース  $p_0, p_f, p_c$  を  $P$  に付け加える。 $T$  に含まれる各遷移  $t$  にたいし、2本の有向辺  $(t, p_c)$  と  $(p_c, t)$  を付け加えて、遷移  $t$  が発火可能であるのは「制御」ブレース  $p_c$  が石を持つときだけになるようにする。 $M$  の初期マーキング  $m_0$  で発火可能な各遷移  $t \in T$  にたいし、 $t$  と同じラベルを持つ新しい遷移  $t'$  を付け加えて、

$$t'^I=0^{P \cup \{p_f, p_c\}} * 1^{(p_0)}, \quad t'^O=(m_0+\bar{t}) * 0^{(p_0, p_f)} * 1^{(p_c)}$$

とする。こうすると、 $\bar{t}'|_P=t'^O|_P=m_0+\bar{t}$  であり、 $t'$  の発火は  $p_0$  の石を  $p_c$  に移す。

さらに、 $T$  の各遷移  $t$  と各受理マーキング  $m$  にたいし、 $t$  と同じラベルを持つ新しい遷移  $t_m$  を付け加え、

$$t_m^I=(\text{sup}(t^O, m)-\bar{t}) * 0^{(p_0, p_f)} * 1^{(p_0)}, \quad t_m^O=\text{sup}(t^O, m) * 0^{(p_0, p_c)} * 1^{(p_f)}$$

とおく. ここで,  $\sup(t^0, m)$  は  $t^0$  と  $m$  の ( $N^P$  における) 最小上界である. すなわち, 任意のプレース  $p$  にたいし,  $\sup(t^0, m)(p) = \max\{m(p), t^0(p)\}$  が成り立つ. このとき,  $t_m|_P = \bar{t}$  が成り立つこと,  $t$  の発火は石を  $p_c$  から  $p_f$  へ移すこと, そして  $t$  が発火した後のマーキングでは  $P$  中のプレースにある石の数は  $m$  のそれより多いことが, 容易に示せる.

さらに,  $T$  に含まれる各遷移  $t$  にたいし,  $t$  と同じラベルを持つ新しい遷移  $t''$  を付け加え,

$$t''^I = t^I * 0^{(P_0, P_c)} * 1^{(P_f)},$$

$$t''^0 = t^0 * 0^{(P_0, P_f)} * 1^{(P_c)}$$

とおく.  $t''|_P = \bar{t}$  かつ,  $t''$  の発火により, 石は  $p_f$  から  $p_c$  に戻る.

最後に,

$$m_0' = 0^{P \cup (P_f, P_c)} * 1^{(P_0)},$$

$$F' = \{m_f'\} \text{ ただし, } m_f' = 0^{P \cup (P_0, P_c)} * 1^{(P_f)}$$

とおく. こうして構成した新しいベトリネット  $M'$  が条件 (C1) と (C2) を満たし,  $L(M) = L(M')$  となることは, 容易に示せる.  $\square$

**補題 3.** 補題 2 で構成された任意のベトリネット  $M'$  にたいし,  $L(M') = L(M'')$  を満たす標準形ベトリネット  $M''$  が構成できる.

**証明.**  $M' = (P', T', A', e', m', F')$  とし,  $Q \subseteq P'$  を, 多重辺を持つプレースの集合とする. すなわち,  $Q = \{p \mid \text{ある遷移 } t \text{ が存在して, } A'(t, p) > 1 \text{ または } A'(p, t) > 1\}$ .

我々は定理を  $Q$  の要素数に関する帰納法で証明する. 言い替えると,  $Q$  の要素数をどうやって減らすことができるかを示す.  $q \in Q$  とし,  $n = \max\{A'(q, t), A'(t, q) \mid t \in T'\}$  とおく.

まず, プレース  $q$  を  $n$  個の新しいプレース  $q_1, q_2, \dots, q_n$  で置き換える.  $P'' = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  とする.  $A'(t, q) + A'(q, t) \geq 1$  となる遷移  $t$  に対し,  $D_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $E_j$  ( $1 \leq j \leq m'$ ) を, それぞれ  $A'(q, t), A'(t, q)$  個の元からなる  $P''$  の部分集合全体の数え上げとする. そして, 遷移  $t$  を  $t$  と同じラベルを持つ  $m \times m'$  個の遷移  $t_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m'$ ) で置き換え,

$$t_{i,j}^I = (t|_{P'-(q)}) * 0^{P''-D_i} * 1^{D_i}, \quad t_{i,j}^O = (t|_{P'-(q)}) * 0^{P''-E_j} * 1^{E_j}$$

とする。ここで、 $M'$  の初期ブレース  $p_0$  と受理ブレース  $p_f$  は多重辺を持たないので、これらのブレースは置き替わらない。それゆえ、新しい初期マーキングは、 $1^{(p_0)} * 0^{P \cup P'' - (p_0)}$ 、新しい受理マーキングは  $1^{(p_f)} * 0^{P \cup P'' - (p_f)}$  とすればよい。ベトリネット  $M'$  とこうして構成されたベトリネットが同じ  $\omega$ -言語を受理すること、そして新しいベトリネットでは多重辺を持つブレースの個数が減っていることは簡単に示すことができる。□

次に主要定理を示すために必要な、ベトリネット  $\omega$ -言語の族の閉包性を示そう。すなわち、ベトリネットで受理される  $\omega$ -言語の族  $P$  は、和集合、共通部分の演算のもとで閉じていることを示す。 $\Sigma, A$  をアルファベット、 $h: \Sigma \rightarrow A$  とする。関数  $h$  は  $\Sigma$  上の  $\omega$ -言語の族から  $A$  上の  $\omega$ -言語の族への関数に自然に拡張できる。すなわち、 $h(L) = \{h(a_0)h(a_1)h(a_2)\cdots | a_0a_1a_2\cdots \in L\}$ 。この様にアルファベット上の関数を拡張して得られる関数を  $\omega$ -言語の族の射影という。 $P$  は射影のもとでも閉じていることを示す。

**定理 4.**  $P$  は和集合の演算のもとで閉じている。

**証明.** 任意の標準形ベトリネット  $M=(P, T, A, e, m_0, F)$  と  $M'=(P', T', A', e', m'_0, F')$  にたいし、 $L(M'')=L(M) \cup L(M')$  を満たすベトリネット  $M''$  を構成するのはやさしい。実際、 $M''$  を構成するには、 $M$  と  $M'$  の初期ブレースを同一視すればよいだけなので、詳しい構成法は省略する。□

**定理 5.**  $P$  は共通部分の演算のもとで閉じている。

**証明.**  $M=(P, T, A, e, m_0, \{m_f\}), M'=(P', T', A', e', m'_0, \{m'_f\})$  を標準形ベトリネットとし、

$$U = \{ \langle t, t' \rangle \mid t \in T, t' \in T' \text{ かつ } e(t) = e'(t') \},$$

とする。 $L(M) \cap L(M')$  を受理するベトリネット  $M''$  を構成するには、新しいブレース  $p_1, p_2, p_3$  を付け加え、 $M''$  のブレースの集合を  $P \cup P' \cup \{p_1, p_2, p_3\}$  とする。 $M''$  の遷移の集合は、 $U$  の元の5つのコピー、すなわち、

$$\{ \langle t, t' \rangle_i \mid 1 \leq i \leq 5, \langle t, t' \rangle \in U \}$$

からなる。各  $\langle t, t' \rangle_i$  は  $t$  と同じラベルを持ち、



$$\begin{aligned}
\langle t, t' \rangle_1^I &= t^I * t'^I * 0^{(P_2, P_3)} * 1^{(P_1)}, & \langle t, t' \rangle_1^O &= t^O * t'^O * 0^{(P_2, P_3)} * 1^{(P_1)}, \\
\langle t, t' \rangle_2^I &= (\sup(t^O, m_f) - \bar{t}) * t'^I * 0^{(P_2, P_3)} * 1^{(P_1)}, \\
\langle t, t' \rangle_2^O &= \sup(t^O, m_f) * t'^O * 0^{(P_2, P_3)} * 1^{(P_1)}, \\
\langle t, t' \rangle_3^I &= t^I * t'^I * 0^{(P_1, P_3)} * 1^{(P_2)}, & \langle t, t' \rangle_3^O &= t^O * t'^O * 0^{(P_1, P_3)} * 1^{(P_2)}, \\
\langle t, t' \rangle_4^I &= t^I * (\sup(t'^O, m_f) - \bar{t}') * 0^{(P_1, P_3)} * 1^{(P_2)}, \\
\langle t, t' \rangle_4^O &= t^O * \sup(t'^O, m_f) * 0^{(P_1, P_3)} * 1^{(P_2)}, \\
\langle t, t' \rangle_5^I &= t^I * t'^I * 0^{(P_1, P_3)} * 1^{(P_2)}, & \langle t, t' \rangle_5^O &= t^O * t'^O * 0^{(P_1, P_3)} * 1^{(P_2)}.
\end{aligned}$$

とする。最後に、 $M''$  の初期マーキングは、 $m_0 * m_0' * 0^{(P_2, P_3)} * 1^{(P_1)}$ 、受理マーキングは  $0^{P \cup \{P_1, P_2\}} * 1^{(P_3)}$  とする。□

**定理 6.**  $P$  は射影のもとで閉じている。

**証明.** 定義より明かである。□

#### 4 論理式による特徴付け

この節では本論文の中心定理を証明する。  $W$  を論理式の集合とする。  $W$  の  $\vee$  と  $\wedge$  のもとでの閉包に含まれる論理式を  $W$  の論理式の**正結合**という。  $W$  の論理式の正結合は、  $W$  の論理式の、論理積の論理和または論理和の論理積で表すことができることは明かだろう。

**定理 7.**  $W = \{C \mid C \text{ は } K_1\text{-論理式}\} \cup \{X < Y \mid X, Y \text{ は 集合変数か } P_a(a \in \Sigma)\}$  とおく。任意の  $\omega$ - 言語  $A$  が  $P$  に属す必要十分条件は、  $W$  の論理式の正結合  $C$  が存在して  $A = L(\exists X_1 \cdots \exists X_j C(X_1, \dots, X_j))$  と書けることである。

**十分性の証明:** まず、  $L(C)$  の定義を、すべての  $K$ - 論理式 (閉  $K$ - 論理式だけでなく) にたいして、拡張する。アルファベット  $\Sigma$  上の任意の  $\omega$ - 語  $\alpha$  とアルファベット  $A$  上の任意の  $\omega$ - 語  $\beta$  にたいし、  $\langle \alpha, \beta \rangle$  は  $\Sigma \times A$  上の  $\omega$ - 語で、任意の  $n$  にたいし、  $\langle \alpha, \beta \rangle$  の  $n$  番目の文字  $\langle \alpha, \beta \rangle(n)$  が、  $\alpha$  と  $\beta$  の  $n$  番目の文字の対  $\langle \alpha(n), \beta(n) \rangle$  であるものと定義し、  $\langle \alpha, \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$  も同様に定義する。任意の非負整数の集合  $I \subseteq \mathbb{N}$  にたいし、  $q_I$  を  $\{0, 1\}$  上の  $\omega$ - 語で、  $q_I(n) = 1$  と  $n \in I$  が同値になるものであるとする。そこで、  $K$ -論理式  $C(X_1, \dots, X_j, x_1, \dots, x_k)$  ( $C$  の自由変数は  $X_1, \dots, X_j, x_1, \dots,$

$x_k$  に含まれるとする) に対し,

$$L(C(X_1, \dots, X_j, x_1, \dots, x_k))$$

$$= \{ \langle \alpha, q_{I_1}, \dots, q_{I_j}, q_{(i_1)}, \dots, q_{(i_k)} \rangle \mid C(I_1, \dots, I_j, i_1, \dots, i_k) \text{ は } \alpha\text{-解積のもとで真} \}$$

と定義する.

$C$  が  $K_1$ -論理式ならば,  $L(C)$  は  $\omega$ -正則言語である. それゆえ, 非決定性有限オートマン  $A=(Q, \Sigma, \delta, s, F)$  が存在して,

$$L(C) = \{ \alpha \mid \text{入力 } \alpha \text{ にたいするオートマン } A \text{ の動作列 } \beta \text{ が存在して, 無限個の } n \text{ にたいし } \beta(n) \in F \text{ が成り立つ} \}$$

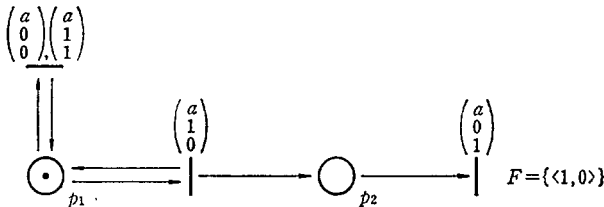
(詳しくは [6] を見よ). 有限オートマン  $A$  は次のようなベトリネット  $M$  で模倣できる.  $M$  のプレースは  $A$  の状態で, 遷移は  $A$  の遷移  $\langle p, a, q \rangle$  ただし  $q \in \delta(p, a)$ , である.  $M$  の遷移  $\langle p, a, q \rangle$  はラベルは  $a$  持ち,  $p$  からの辺と  $q$  への辺を一本ずつ持つ.  $M$  の初期マーキングはプレース  $s$  ( $A$  の初期状態に対応する  $M$  のプレース) に一つだけ石があるマーキングである.  $M$  の受理マーキングは (どれかの) 受理プレース (すなわち,  $A$  の受理状態に対応するプレース) に一つだけ石があるようなマーキングである. このとき, 明かに,  $L(M) = L(C)$  が成り立つ.

$\omega$ -言語族  $\mathbf{P}$  は和集合と共通部分の演算で閉じているので,  $L(X < Y) \in \mathbf{P}$  が示されれば,  $W$  の論理式の任意の正結合  $C$  にたいし,  $L(C)$  は  $\mathbf{P}$  に含まれる. さらに, 任意の集合変数  $X$  にたいし,

$$L(X < P_a) = L(\exists Y[(X < Y) \wedge \forall x(Y(x) \leftrightarrow P_a(x))])$$

なので,  $X$  と  $Y$  が集合変数のとき,  $L(X < Y)$  が  $\mathbf{P}$  に属することを示せば十

図 1



分である。そして実際、任意の集合変数  $X$  と  $Y$  にたいし、 $L(X < Y) = \{ \langle \alpha, q_I, q_J \rangle \mid I < J \}$  は図1のベトリネット  $M$  で受理される。

それゆえ、 $L(X < Y)$  は  $P$  に属す。 $P$  はまた射影のもとで閉じているので、これで十分性が証明されたことになる。

**必要性の証明:** 与えられたベトリネットの無限の振舞いを記述する論理式を構成しなければならない。 $M = (P, T, A, e, m_0, \{m_f\})$  を標準形のベトリネットとし、 $p_0$  を  $M$  の初期プレス、 $p_f$  を  $M$  の受理プレスとする。次のような集合変数を用いる。

- 各  $t \in T$  にたいし、 $X_t$  で  $t$  が発火する時刻を表す。
- 各  $p \in P$  にたいし、 $E_p$  で  $p$  が石を一つ得る時刻を表す。
- 各  $p \in P$  にたいし、 $S_p$  で  $p$  が石を一つ失う時刻を表す。

(標準形ベトリネットではプレスは一度に一つづつしか石を得たり失ったりしないことに注意)。

$$C_1 = \forall x [\bigvee_{t \in T} [X_t(x) \wedge P_{e(t)}(x) \wedge [\bigwedge_{t' \neq t} \sim X_{t'}(x)]]]$$

$$C_2 = \forall x [\bigwedge_{p \in P} [S_p(x) \leftrightarrow \bigvee_{A(p,t) > 0} X_t(x)]]]$$

$$C_3 = \forall x [\bigwedge_{p \in P} [E_p(x+1) \leftrightarrow \bigvee_{A(t,p) > 0} X_t(x)]]]$$

$$C_4 = E_{p_0}(0) \wedge [\bigwedge_{p \neq p_0} [\sim E_p(0)]]]$$

$$C_5 = \forall x \exists y [x < y \wedge E_{p_f}(y)]$$

$$C_6 = \bigwedge_{p \in P} [E_p < S_p]$$

とする。直観的には、論理式  $C_1$  は各時刻  $x$  において、その時刻に発火する遷移はただ一つであることを意味する。 $C_2$  はプレス  $p$  が石を失うのは  $p$  からの辺を持つ遷移  $t$  ( $A(p,t) > 0$ ) がその時刻に発火したときそのときに限られることを、 $C_3$  はプレス  $p$  が石を時刻  $(x+1)$  に得るのは  $p$  への辺を持つ遷移  $t$  ( $A(t,p) > 0$ ) が時刻  $x$  に発火したとき、そのときだけであることを意味し、 $C_4$  は初期マーキングに対応する条件を表し、 $C_5$  はベトリネット  $M$  が受理マーキングより以上のマーキングを無限回通過することを意味し、最後に  $C_6$  にはどのプレス  $p$  も以前に得た石以上の石を失うことはないという条件を表している。

さて、次の論理式で  $\omega$ -言語  $L(M)$  を定義できる。

$$\exists E_{p_j} \exists E_{p_0} \exists E_{p_1} \cdots \exists E_{p_k} \exists S_{p_j} \exists S_{p_0} \exists S_{p_1} \cdots \exists S_{p_k} \exists X_{t_0} \exists X_{t_1} \cdots \exists X_{t_j} \\ [C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \wedge C_5 \wedge C_6]$$

ここで  $P = \{p_j, p_0, p_1, \dots, p_k\}$  かつ  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_j\}$  である。  $\square$

#### 参考文献

- [1] K. Kobayashi, M. Takahashi and H. Yamasaki, Characterization of  $\omega$ -regular languages by first-order formulas, Theoretical Computer Science 23 (1984) 315—327.
- [2] M. Fargot and E. Pelz, A logical approach of Petri net Languages, Theoretical Computer Science 39 (1985) 155—169.
- [3] E. Pelz,  $\omega$ -languages of Petri nets and logical formulas, Proceedings of Seventh European Workshop on Application and Theory of Petri Nets (1985) 311—326.
- [4] J. Peterson, Petri net theory and the modelling of systems, (Prentice-Hall, 1981).
- [5] H. Yamasaki, ペトリネットの理論と応用, 情報処理 25-3 (1984) 188—193.
- [6] H. Yamasaki, M. Takahashi and K. Kobayashi, Characterization of  $\omega$ -regular languages by monadic second-order formulas, Theoretical Computer Science 46 (1986) 91—99.

(一橋大学助教授)