補　間　定　理

永　島　孝

記号論理学で補間定理と呼ばれているもののうち，筆者の知り得た範囲から，理解し易く興味があると思われるいくつかを紹介する．証明の技術的な詳細はここでは説明せず，それぞれの文献に譲る．

まず，論理の一定の体系において，命題 A から命題 B が導かれるとき，A から C が導かれ C から B が導かれるような命題 C を求める問題を考える．ここで命題 C の形に何の制限も設けないならば，C として A を（あるいは B を）とれば明らかに成り立ち，まったくつまらないことになってしまう．問題として意味があるのは求める命題 C の形について何等かの条件を伴う場合である．そこで，A と B とに共通な概念のみによって C を構成することを目標として考えてみる．これが補間 (interpolation) の問題である．

このような基本的な問題については，かりに1940年代前半ころまでに何等かの結果が得られていたとしても不思議ではなく，またこの問題を解決するに足るだけの基礎は1930年代にすでに確立していたのである．それにもかかわらず，たまたま問題として意識されなかった故か，この種の定理が最初に得られたのは1957年と意外に遅い．

準備として，ここで用いる記法などについて説明しておく．以下，主に第一階の述語論理を考え，つぎの記号を用いる．

自由変数 $a, b, \cdots\cdots,$

束縛変数 $x, y. \cdots\cdots,$

函数記号 $f, g, \cdots\cdots,$

述語記号 $P, Q, \cdots\cdots,$

命題定数 $\vee, \curlywedge$,

論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \supset, \forall, \exists$.

式（論理式, formula）は一般にこれらの記号から一定の規則に従って構成される．なお，$A \sim B$ は $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ の省略と考える．命題定数や函数記号を式の構成に用いるか否かは個々の場合による．またゲンツェンの論理系 LK, LJ を扱うので，命題の表現として式の他に sequent も用いる．sequent とは，$A_1, \cdots\cdots, A_m, B_1, \cdots\cdots, B_n$ $(m \geqq 0, n \geqq 0)$ を式として

$$A_1, \cdots\cdots, A_m \rightarrow B_1, \cdots\cdots, B_n$$

の形のものであり，個々の式を A_i, B_j をこの sequent の要素とよぶ．この sequent はそれぞれ式

$$\begin{array}{ll} A_1 \wedge \cdots\cdots \wedge A_m \supset B_1 \vee \cdots\cdots \vee B_n & (m>0, n>0 \text{ のとき}), \\ B_1 \vee \cdots\cdots \vee B_n & (m=0, n>0 \text{ のとき}), \\ \neg(A_1 \wedge \cdots\cdots \wedge A_m) & (m>0, n=0 \text{ のとき}), \\ \curlywedge & (m=0, n=0 \text{ のとき}) \end{array}$$

と内容的に同じ意味である．式の列を $\Gamma, \varDelta, \Theta. \varLambda$ などのギリシャ大文字で表し，sequent を $\Gamma \rightarrow \Theta$ などのように表す．ゲンツェンの論理系 LK, LJ については原論文 [G 34] のほかゲンツェンの全集 [G 69] に英訳があり，日本語のものでは [Mc 70], [M 73], [TY 74] にも詳しい紹介があり，[N 83] にも簡単に述べてある．これらの論理系 LK, LJ の著しい特徴は，任意の証明図は同じ sequent の証明図で三段論法（cut, Schnitt）の推論を含まないものに変換できるというゲンツェンの基本定理 [G 34] が成立することである．LK, LJ において三段論法以外の推論には subformula property すなわち前提の要素は帰結の要素の部分式になっているという性質がある．従って三段論法を除去することによって証明図全体に subformula property がなりたつようにできる．証明される式の部分式のみからなる証明図，言い換えれば証明図の“標準型”が，一定の手続きによって必ず得られるということである．簡単な命題から次第に複雑な命題を導いてゆくような“まわり道のない”証明に価値があるのであって，三段論法の除去という言葉にとらわれて本質を見失って

はならない．具体的にいえば，ある論理系に subformula property をみたさない推論規則が三段論法の他にあった場合，三段論法の除去可能性という形の“基本定理”が成立したとしてもその結果の有効性は期待できない．

証明論と模型論との関係．古典述語論理においては，ゲーデルの完全性定理によって，式が恒真であるためには証明可能であることが必要十分であるから，とくに必要のある箇所をのぞいて，恒真であることと証明可能であることとを区別せずに述べる．なお，直観主義述語論理に関しても，式の直観主義的恒真性はクリプケ模型 [K 65] を用いて定義され，それが証明可能性と同値になる．

等号をもつ述語論理について．狭義の述語論理では，二項述語記号の一つとして等号があってもよいが，それに関する公理や推論規則はなく，等号の性質が必要ならばそれは数学的公理として扱われる．これに反して，等号の基本性質を論理に組み入れたのが等号をもつ論理 (logic with equality) と呼ばれるものである．具体的には（古典または直観主義などの）述語論理に例えばつぎに掲げる等号の公理を付け加える．

（反射律） $\forall x(x=x)$.

（置換律） $\forall x\forall y(x=y\supset(A(x)\supset A(y)))$ の形のすべての式.

なお，置換律における式 A は論理記号を含まない素な式に限ってもよい．

$$\forall u\forall v\forall x\forall y(x=y\supset(P(u,x,v)\supset P(u,y,v)))$$

$$\forall u\forall v\forall x\forall y(x=y\supset f(u,x,v)=f(u,y,v))$$

のような形の式（3 項述語，3 項函数についてのおのおの三つの式のうちの一つずつを例示したが，一般に n 項の函数または述語に対して n 個の式がある）をそれぞれ f の等号公理，P の等号公理という．反射律と，各述語記号（等号を含む）の等号公理と各函数記号の等号公理をすべて公理としてもよい．直観主義論理の場合については，さらに，等号に関する排中律

$$\forall x\forall y(x=y\vee\neg x=y)$$

を追加して考える場合もある．

さて，以上で準備をおわり，いよいよ本題の補間定理について述べる．まず，

つぎに述べる定理がクレイグの補間定理あるいはクレイグの補題と呼ばれ，初めて得られた補間定理として重要である.

定理 [C 57]. 古典述語論理において $A \supset B$ が証明可能であるとすると，つぎの条件をみたす式 C（これを補間式と呼ぶ）がある：

(1) $A \supset C$ と $C \supset B$ が証明可能.

(2) C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる.

(3) C に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に含まれる.

（注意1）A と B に共通な述語記号が一つもない場合，命題定数のない論理系では(3)をみたす式 C はあり得ないが，この場合は $\neg A$ か B かのいずれかが証明可能となる．このような例外について述べる煩わしさを避けるために，補間定理を考えるときは命題定数のある論理系で考えるのが便利である.

（注意2）条件のうち(2)は本質的なものではない．(1)と(3)をみたす式が得られたとして，その中の自由変数のうち A にあって B にないものはすべて存在記号で束縛し，A になくて B にあるものはすべて全称記号で束縛すれば，(2)をみたす式が得られる.

クレイグが発表した証明は特異な論理系に基づいていて難解であるが，ゲンツェンの基本定理に基づく明解な証明が前原によって得られて以来，補間定理は基本定理の典型的な応用例として知られるようになり，無限に長い論理式をもつ述語論理における補間定理 [MT 61]，直観主義述語論理やその部分系における補間定理などいろいろな論理に関する補間定理が前原の方法によって得られている．前原の証明はつぎのように行われる．列 Γ の各要素がその二つの部分列 Γ_1 と Γ_2 のいずれか一方の要素であり，Θ についても同様である

$$(\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1\,;\, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2)$$

ときを sequent $\Gamma \rightarrow \Theta$ の分割という．LK において，補間定理は sequent の分割を用いてつぎのように言い換えられる.

命題. $\Gamma \rightarrow \Theta$ が証明可能ならばその任意の分割 $(\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1\,;\, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2)$ に対してつぎの条件をみたす式 C がある：

(1′) $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, C$ および $C, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2$ が証明可能.

(2′)C に含まれる自由変数はすべて $\Gamma_1 \to \Theta_1$ と $\Gamma_2 \to \Theta_2$ とに共通に含まれる.

(3′)C に含まれる述語記号はすべて $\Gamma_1 \to \Theta_1$ と $\Gamma_2 \to \Theta_2$ とに共通に含まれる.

ゲンツェンの基本定理によって，LK で証明可能な sequent にはその証明図で三段論法の推論を含まないものが存在する．従ってつぎの命題を証明すればよい.

命題. $\Delta \to \Lambda$ の証明図で三段論法を含まないものと，$\Delta \to \Lambda$ の任意の分割が与えられると，この証明図の中のおのおのの sequent $\Gamma \to \Theta$ に対して，与えられた $\Delta \to \Lambda$ の分割に対応する分割が自然に定まる．証明図の中のおのおのの $\Gamma \to \Theta$ のそのような分割 $(\Gamma_1 \to \Theta_1; \Gamma_2 \to \Theta_2)$ に対してつぎの条件をみたす式 C がある:

(1″)$\Gamma_1 \to \Theta_1, C$ および $C, \Gamma_2 \to \Theta_2$ が証明可能.

(2″)C に含まれる自由変数はすべて $\Gamma_1 \to \Theta_1$ と $\Gamma_2 \to \Theta_2$ とに共通に含まれる.

(3″)C に含まれる述語記号はすべて $\Gamma_1 \to \Theta_1$ と $\Gamma_2 \to \Theta_2$ とに共通に含まれる.

この命題の証明には $\Gamma \to \Theta$ にいたる推論の段数に関する帰納法を用いる．すなわち，推論規則の種類によって場合を分け，推論の前提に関して命題が成り立っていることを仮定し，帰結に関しても成り立つことを示せばよい．要するに，与えられた $A \supset B$ の証明図を二つに割って $A \supset C$ と $C \supset B$ の証明図を，C と同時に作るという考え方である．このような証明論的な方法では，与えられた $A \supset B$ の証明図から補間式が構成的に得られる.

述語論理の場合は補間式は $A \supset B$ の証明図から構成されるので，A, B の形だけから直接に補間式が求まるわけではない，しかし，古典命題論理においては，つぎのように補間式が求められる．B に含まれない命題変数 P に対して $A(P) \supset B$ が証明可能ならば $A(P) \supset A(A(\vee))$ と $A(A(\vee)) \supset B$ が証明可能である．従って，B に含まれない各命題変数 P についてこれを繰り返し適用

すればよい.

なお, つぎにあげるロビンソンの無矛盾性定理も, クレイグの補間定理とほぼ同じ頃にこれとは独立に得られていて, 補間定理とほぼ同じ内容である. 公理系とは, 閉じた(自由変数を含まない)式からなる集合をいう.

定理. Γ と Θ をいずれも無矛盾な公理系とする. 述語記号として Γ と Θ とに共通なものだけを含むような式 A で, $\Gamma \rightarrow A$ と $\Theta \rightarrow \neg A$ とが同時に証明可能となるものが存在しないならば, $\Gamma \cup \Theta$ は無矛盾である.

さて, クレイグの定理の拡張には, 補間式のみたすべき条件を強めること, 第一階古典述語論理以外の論理における補間定理など, さまざまな方向が考えられる. まず, 第一階古典述語論理以外の論理に関しては, つぎにあげるシュッテの補間定理の他, 無限に長い論理式をもつ述語論理や第二階の述語論理の部分系などについて試みられている. また, さまざまな補間定理に対して, 模型論的な方法による証明が行われている(例えばのちに述べるリンドンの補間定理の最初の証明). それは一般に, (2), (3)をみたす任意の式 C に対して $\{A, \neg C\}$ の模型と $\{C, \neg B\}$ の模型の少なくとも一方が存在すると仮定して, $\{A, \neg B\}$ の模型の存在を導くというものである.

定理 [シュッテの補間定理, S 62]. 直観主義述語論理において $A \supset B$ が証明可能であるとすると, つぎの条件をみたす式 C がある:

(1)$A \supset C$ と $C \supset B$ が証明可能.

(2)C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる.

(3)C に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に含まれる.

シュッテの証明も前原の方法によっている. ゲンツェンの LJ の基本定理を用い, $\Gamma \rightarrow \Theta$ の分割として $(\Gamma_1 \rightarrow ; \Gamma_2 \rightarrow \Theta)$ の形のものを考える.

また, 本橋によってつぎのような精密化が証明論的に得られている.

定理 [Mt 72]. 直観主義述語論理において, A, B の中の論理記号が $\neg, \wedge, \forall$ だけであって $A \supset B$ が証明可能であるとすると, つぎの条件をみたす式 C がある:

(1)$A \supset C$ と $C \supset B$ が証明可能.

(2)C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる．

(3)C に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に含まれる．

(4)C に含まれる論理記号は $\neg, \wedge, \forall$ だけである．

(注意) クレイグ，シュッテの定理の場合と異なり，ここでは条件(4)によって存在記号が使えないので(2)は自明でない．

ここまでに述べた定理は函数記号を許す述語論理と函数記号のない述語論理とのどちらにも共通に成立するものであった．函数記号のある論理において，A と B の補間式に含まれる函数記号についても述語記号と同様に A と B とに共通なものだけにできるであろうか．クレイグや前原の方法で構成した補間式についてはそのような条件が必ずしもみたされないことは容易にわかるので，補間式の構成方法を変えねば解決できぬ問題である．これについては前原，永島の結果がある．

定理 [前原の補間定理，M 64]．等号をもつ古典述語論理において $A\supset B$ が証明可能であるとすると，つぎの条件をみたす式 C がある：

(1)$A\supset C$ と $C\supset B$ が証明可能．

(2)C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる．

(3)C に含まれる等号以外の述語記号はすべて A と B とに共通に含まれる．

(4)C に含まれる函数記号はすべて A と B とに共通に含まれる．

この定理が論文として発表されてないことが惜しまれる．証明にはヒルベルト・前原のエプシロン定理から導かれるつぎの補題が用いられる．

補題．$A(x,y), \Gamma, \Theta$ に函数記号 f が含まれないとすると，

$$\forall x A(x, f(x)), \Gamma \to \Theta$$

が証明可能ならば

$$\forall x \exists y A(x,y), \Gamma \to \Theta$$

が証明可能である．

定理 [永島の補間定理，N 66]．古典述語論理，直観主義述語論理において $A\supset B$ が証明可能であるとすると，つぎの条件をみたす式 C がある：

(1)$A\supset C$ と $C\supset B$ が証明可能．

(2)C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる.

(3)C に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に含まれる.

(4)C に含まれる函数記号はすべて A と B とに共通に含まれる.

証明はゲンツェンの LK, LJ の基本定理の応用であるが，簡単ではない．証明が複雑になる理由は証明図における函数記号と述語記号との振舞いのつぎのような違いにある．三段論法以外の推論では上の（前提の）sequent の各要素は下の（帰結）sequent の要素の部分式であるから，上にある述語記号は下にも必ずある．これに反して，(→∃)，(∀→) の推論の場合，下にない函数記号が上にあり得る．そこで，函数記号をいったん述語記号に置き換えてクレイグ・シュッテの補間定理を適用したのち述語記号をもとの函数記号に戻すという方法を用いる．その過程で等号公理が必要になるが，これもあとで取り除くことができる．模型論では函数記号も述語記号とある程度同様に扱えるらしいが，証明論では函数記号の扱いには述語記号の場合にはない困難を伴う．そして，この困難は第二階の述語論理における困難と類似している．第二階の全称記号や存在記号を導入する推論を考えると，そこで束縛された第二階の変数（述語変数）に対応する位置に，下（帰結）にはない記号が上（前提）にあり得る．第二階の場合の困難は専らこのことに起因する．

ちなみに，この補間定理の証明に当たってつぎの事実が必要になったが，意外なことにこのような基本的なことが知られていなかったので，補題として証明した．これは [M 73] に紹介されている．

補題 [N 66, Lemma. 1]. 等号を含まない式は等号公理のもとで証明可能ならば等号公理なしで証明可能である．

上述の補間定理を発表した論文 [N 66] に明示的には述べていないが，トルールストラの指摘 [Tr 77] のように，つぎの定理も実質的には含まれている．

定理. 等号をもつ古典述語論理，等号をもつ直観主義述語論理においてつぎのことが成り立つ．$A \supset B$ が証明可能であるとすると，つぎの条件をみたす式 C がある：

(1)$A \supset C$ と $C \supset B$ が証明可能.

(2) C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる.

(3) C に含まれる等号以外の述語記号はすべて A と B とに共通に含まれる.

(4) C に含まれる函数記号はすべて A と B とに共通に含まれる.

証明はつぎの通りである. A に含まれる函数記号, 述語記号の等号公理の全体を Γ とし, B に含まれ A には含まれない函数記号, 述語記号の等号公理の全体を Δ とする.

仮定から, 等号のない述語論理で, sequent

$$\forall x(x=x), \Gamma, \Delta, A \rightarrow B$$

が証明可能である. これを $(\forall x(x=x), \Gamma, A \rightarrow; \Delta \rightarrow B)$ と分割して, 前定理による補間式を C とすると, C は (2), (3), (4) をみたす. また, 等号のない論理で

$$\forall x(x=x), \Gamma, A \rightarrow C \text{ および } C, \Delta \rightarrow B$$

が証明可能であるから, 前述の補題によって, 等号をもつ述語論理で $A \supset C$ と $C \supset B$ が証明可能である. 等号をもつ直観主義述語論理に等号に関する排中律を追加した場合についても同様に証明できる.

再び等号のない古典述語論理の場合に話を戻す. 式の中における記号の正負の符号について考慮してクレイグの定理を精密化したのがリンドンの補間定理である. 符号はつぎのように帰納的に定義される. 論理記号のない式 (atomic formula) の中の記号はすべてその式の中に正に含まれる. 論理記号のある式において, その最も外側 (outermost) の論理記号はその式の中に正に含まれる. A のなかに正に [負に] 含まれる記号は $A \wedge B, B \wedge A, A \vee B, B \vee A, B \supset A, \forall xA, \exists xA$ の中の対応する位置に正に [負に] 含まれ, また $\neg A, A \supset B$ の中の対応する位置に負に [正に] 含まれる.

定理 [リンドンの補間定理, L 59]. 古典述語論理において $A \supset B$ が証明可能であるとすると, つぎの条件をみたす論理式 C がある:

(1) $A \supset C$ と $C \supset B$ が証明可能.

(2) C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる.

(3) C に正に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に正に含まれる.

(4)C に負に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に負に含まれる.

リンドンの証明は模型論的に行われているが，証明論的には前原の方法がそのまま適用できる．ゲンツェンの基本定理を用いたクレイグの補間定理の証明で，帰納的に構成される補間式に含まれる述語記号の符号を調べて(3)，(4)をみたすことを確かめればよい．

リンドンの補間定理とゲーデルの完全性定理とを融合した興味ある定理を発表したのは，完全性定理でも知られたヘンキンである．

定理［ヘンキンの補間定理，H 63］古典述語論理において $A \supset B$ が恒真であるとすると，つぎの条件をみたす論理式 C がある：

(1)$A \supset C$ と $C \supset B$ が証明可能.

(2)C に含まれる自由変数はすべて A と B とに共通に含まれる.

(3)C に正に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に正に含まれる.

(4)C に負に含まれる述語記号はすべて A と B とに共通に負に含まれる.

式 $A \supset B$ が恒真ならば C があって(1)をみたすから，$A \supset B$ の証明可能性が導かれる.

つぎに補間定理の応用の一つについて述べる．まず，述語の定義可能性という概念を考える．記述を簡単にするためにここでは単項述語を例にとって説明するが，一般の n 項述語（$n=2, 3, \cdots\cdots$）に関してもまったく同様である．述語記号 P を含む式 $A(P)$ を考え，この式の中の P をすべて別の述語記号 Q に書きかえた結果を $A(Q)$ と記す．述語記号 Q が $A(P)$ に含まれないとして，

$$A(P), A(Q) \ \rightarrow\ \forall x(P(x) \supset Q(x))$$

が証明可能であるとき，$A(P)$ によって P が implicitly definable であるという．また，P を含まない式 $B(a)$ があって

$$A(P) \ \rightarrow\ \forall x(P(x) \sim B(x))$$

が証明可能であるとき，$A(P)$ によって P が explicitly definable であるという．さて，P が $A(P)$ によって explicitly definable ならば P は明らかに implicitly definable であるが，古典論理においてその逆が成り立つというべ

ートの定義可能性定理が1953年に補間定理と関わりなく得られている．しかし，クレイグが補間定理を用いてこれを示して以来これは補間定理の応用の典型的な例として知られている．また，この定理の意味は，述語に関してはそれが“陰函数”として定まるならばそれは“陽函数”として表せる，ということであって，補間定理の帰結として興味あるものと思う．

定理. 古典述語論理において，述語 P が式 $A(P)$ によって implicitly definable ならば P は $A(P)$ によって explicitly definable である．

補間定理を用いた証明はつぎのように行う．仮定から，Q を $A(P)$ に含まれない述語記号，a を $A(P)$ に含まれない自由変数として，

$$A(P), A(Q), P(a) \to Q(a)$$

が証明可能である．これを $A(P), P(a) \to$ と $A(Q) \to Q(a)$ に分割して，クレイグの補間定理によるその補間式を $B(a)$ とする．$B(a)$ は P も Q も含まず，$A(P), P(a) \to B(a)$ と $B(a), A(Q) \to Q(a)$ が証明可能である．後者の sequent の中の述語記号 Q に述語記号 P を代入し，これと前者から

$$A(P) \to P(a) \sim B(a),$$

従って

$$A(P) \to \forall x(P(x) \sim B(x))$$

が証明可能であることがわかる．なお，この証明でクレイグの補間定理のかわりにシュッテの補間定理を用いれば，この定理が直観主義述語論理においても同様に成り立つことがわかる．

函数記号についても同様に，等号をもつ論理において

$$A(f), A(g) \to \forall x(f(x) = g(x))$$

が証明可能のとき f は $A(f)$ によって implicitly definable，また f を含まない項 $t(a)$ があって

$$A(f) \to \forall x(f(x) = t(x))$$

が証明可能であるとき f は $A(f)$ によって explicitly definable であると定義する．さて，函数の場合は述語の場合と異なって，implicitly definable であっても explicity definable であるとは限らない．例えば，群の公理

$$\forall x \forall y \forall z((xy)z = x(yz)),\ \forall x \forall y \exists z(xz = y)$$

のもとで逆元の演算は定まるが，逆元を積の合成では表せない．そこで，結論を弱めてみると，つぎの定理が得られる．$C(y)$ をみたす y が一つだけ存在するとき，その y を $\iota y C(y)$ と記し，この ι をイオタ演算子という．

定理　等号をもつ述語論理において，函数 f が式 $A(f)$ によって implicitly definable ならば f を含まない式 $B(a, b)$ が存在して

$$A(f) \rightarrow \forall x \forall y(f(x) = y \sim B(x, y))$$

が証明可能である．従って，イオタ演算子を追加した論理系で

$$A(f) \rightarrow \forall x(f(x) = \iota y B(x, y))$$

が証明可能となる．証明は，永島の補間定理を用い，述語の定義可能性定理の証明と同様にすればよい．

古典述語論理においてもまた直観主義述語論理においても，ゲンツェンの基本定理から補間定理が導かれ，また補間定理から定義可能性定理が導かれる．ところで，その逆は正しいであろうか．言い換えれば，基本定理が成立せず補間定理の成立するような論理系，また補間定理が成立せず定義可能性定理が成立する論理系は，それぞれ存在するかという問題である．

例えば古典論理と直観主義論理との間に多くの論理が知られていて，中間論理と総称されている．その中間述語論理のなかには基本定理の成り立たないものがあるが，そのような論理において補間定理や定義可能性定理は成立するかというのは興味ある問題と思われる．この問題が未解決であるような中間述語論理の一つの具体例 LD について述べる．直観主義述語論理に公理として

$$\forall x(A(x) \vee B) \supset \forall x A(x) \vee B$$

の形の式をすべて追加して得られる論理を梅沢は LD と名付けた．一方，これとは独立にギャベイは個体領域が一定であるようなクリプケ模型で特徴付けられる中間述語論理を考え，定領域 (constant domain) の論理 CD と名付けた．のちにゲルネマン，クレムケらはこれらの二つの論理が実は同一のものであると発表している．永島 [N 73] はこれをゲンツェンの LK に制限“推論規則 $(\rightarrow \neg)$, $(\rightarrow \supset)$ において，下の sequent の右辺は主式のみからなる

(すなわち LJ の推論になっている)”を設けた体系として形式化し，基本定理が成立しないことを示した．そして，LD で補間定理や定義可能性定理が成立するか否か未だわかっていない．

なお，ゲンツェンの基本定理に関してつぎのことに留意する必要がある．ある論理に関して，与えられた証明図から三段論法が除去できるか否かは推論規則の選び方に依存する．論理として同じ（すなわち証明可能な式の集合が一致する）であっても，どのように形式化するかによるのである．すでに述べたように，基本定理の本質は subformula property にあり，これをみたすように証明図をつねに変形し得るような形式化が可能か否かを考えねばならない．極端な例として，LD を [N 73] のように形式化すれば基本定理は成立しないが，この体系に推論規則

$$A \supset A, \Gamma \rightarrow \Theta \ / \ \Gamma \rightarrow \Theta$$

を追加しても論理としては同じ LD であり，この体系では三段論法の除去が明らかに可能である．

おわりに．記号論理の教科書で補間定理を載せているものはまだ多くないと思われるが，教育的見地からも，クレイグ・シュッテの補間定理などは入門の教科書にも取り上げることが望ましいと思う．まず，定理の内容が初心者にも理解し易く，しかも自明ではないので，興味が感じられるであろう．また，その証明で，ゲンツェンの基本定理の典型的な応用例を学ぶことができるであろう．証明論の手法を学ぶ入門的な題材として，自然数論の無矛盾性などではまだ難しすぎるような段階に適当だと思う．

文　献

[B 77] Barwise, J. (ed.): Handbook of mathematical logic. North-Holland, 1977.

[C 57] Craig, W.: Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem. J. Symbolic Logic 22(1957), 250—268.

[G 34] Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schliessen. Math. Zeitschr. 39 (1934), 176—210, 405—431.

[G 69] Gentzen, G. (ed. Szabo, M. E.): The collected papers of Gerhard Gentzen. North-Holland, 1969.

[Gb 69] Gabbay, D.: Model theory for intuitionistic logic. Zeitschr. Math. Logik Grundl. Math. 18 (1972), 49—54.

[H 63] Henkin, L.: An extension of the Craig-Lyndon interpolation theorem. J. Symbolic Logic 28 (1963), 201—216.

[K 65] Kripke, S. A.: Semantical analysis of intuitionistic logic I. in: Crossley, J. N. and Dummet, M. A. (eds.): Formal systems and recursive functions, North-Holland, 1965.

[L 59] Lyndon, R. C.: An interpolation theorem in the predicate calculus. Pacific J. Math. 9 (1959), 129—142.

[M 61] 前原昭二：Craig の interprolation theorem. 数学 12 (1961), 235—237.

[MT 61] Maehara, S. and Takeuti, G.: A formal system of first-order predicate calculus with infinitely long expressions. J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 357—370.

[M 64] 前原昭二：ε-operator について．日本数学会数学基礎論分科会第4回数学基礎論シンポジウム (1964) 口頭発表 (数学 16 (1965), 39—40).

[M 73] 前原昭二：数理論理学—数学的理論の論理的構造—．培風館，1973.

[Mc 70] 松本和夫：数理論理学．共立．1970.

[Mt 72] Motohashi, N.: A note on Schütte's interpolation theorem. Proc. Japan Academy 48 (1972), 56—58.

[N 66] Nagashima, T.: An extension of the Craig-Schütte interpolation theorem. Ann. Japan Assoc. Philos. Sci. 3 (1966), 12—18.

[N 73] Nagashima, T.: An intermediate predicate logic. Hitotubashi J. Arts Sci. 14 (1973), 53—58.

[N 83] 永島孝：ゲンツェンの基本定理．数学セミナー増刊「数学100の定理」，日本評論社，1983.

[S 62] Schütte, K.: Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik. Math. Ann. 148 (1962), 192—200.

[Tr 77] Troelstra, A. S.: Aspects of constructive mathematics. in [B 77].

[TY 74] 竹内外史，八杉満利子：数学基礎論．共立，1974.

[U 59] Umezawa, T.: On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic. J. Symbolic logic 24 (1959), 141—153.

(一橋大学教授)