共分散行列の検定について

早　川　毅

1 序

x を p 次元正規確率ベクトルとし，平均ベクトルを μ，共分散行列を Σ とする．$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$ を random sample とし，$S=\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'$, $\bar{x}=\sum_{\alpha=1}^{N}x_\alpha/N$ とすれば，S は自由度 $n=N-1$ の Wishart 分布 $W_p(\Sigma, n)$ を持つ，共分散行別 Σ に関する仮説として，

仮説　　$H:\Sigma=\Sigma_0$（与えられた行列）

対立仮説　$K:\Sigma\neq\Sigma_0$

を考える．

仮説 H に対する検定統計量として (i) 尤度比規準 λ, (ii) Wald 型統計量 T_1, (iii) Rao 型統計量 T_2 について考える．

尤度比規準 λ は

$$\lambda=\left(\frac{e}{N}\right)^{\frac{1}{2}pN}|S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}S\Sigma_0^{-1}\right\}$$

で与えられる．

Sugiura and Nagao (1968) は λ が不偏性を持っていないことを示し，λ を改良した尤度比規準 λ^* として，

$$\lambda^*=\left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{1}{2}pn}|S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,S\Sigma_0^{-1}\right\}$$

を提案した．

$-2\log\lambda^*$ の特性関数が

$$\left(\frac{n}{2e}\right)^{ipnt}\frac{\Gamma_p\left(\frac{n}{2}(1-2it)\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{|\Sigma\Sigma_0^{-1}|^{-int}}{|I-2it\,\Sigma\Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}(1-2it)}}$$

と表現される．なを

$$\Gamma_p(a)=\pi^{\frac{1}{4}p(p+1)}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(a-\frac{i-1}{2}\right)$$

である．

特性関数が Gamma 関数の積と比で表現されるので，Gamma 関数の漸近展開を用いて仮説 $H:\Sigma=\Sigma_0$ のもとで $1/n$ の巾級数展開がなされる，特性関数を反転することにより $-2\log\lambda^*$ の分布関数の漸近展開が得られる，Sugiura (1969)．このとき係数は Bernoulli 多項式によって表現されるが，Abramowitz and Segun (1968) に 15 次までの多項式が与えられている関係で，$1/n$ の 14 次の項まで求められている，Lee, Krishnaiah and Chang (1976).

また，留数定理の使用により，λ^* の分布関数をある種の関数の積分値による級数表現として求める方法もある，Nagarsenker and Pillai (1973)．この方法は統計量の積率が Gamma 関数で表現される場合には分布関数の導出に有効な手段と言えよる．

さて，Wald 統計量，Rao 統計量は次の様に定義される，Wald (1943), Rao (1948).

母集団密度関数を $f(x|\theta)$ とし，$\theta'=(\theta_1', \theta_2'), \theta_1'=(\theta_1, \cdots\cdots, \theta_q), \theta_2'=(\theta_{q+1}, \cdots\cdots, \theta_p)$ を未知母数とする．このとき複合仮説，対立仮説を

$$H:\theta_2=\theta_{20}\ (\text{与えられたベクトル})$$

$$K:\theta_2\neq\theta_{20}$$

とするとき，Wald 統計量，Rao 統計量は各々

$$T_1=N(\hat{\theta}_2-\theta_{20})'\hat{K}_{22\cdot1}(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_{20})$$

$$T_2=\tilde{y}'\tilde{K}^{-1}\tilde{y}$$

として定義される．

ここで，$\hat{\theta}_2$ は対立仮説 K のもとでの θ_2 の最尤推定量である．また，

$$K[\theta]\equiv E\left[\frac{\partial \log f}{\partial\theta}\frac{\partial \log f}{\partial\theta'}\right]=\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} K_{11}(\theta), & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta), & K_{22}(\theta) \end{array}\right] & \begin{array}{c} q \\ p-q \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad q & \quad p-q \end{array} & \end{array}$$

を Fisher の情報行列とする．そして

$$K_{22\cdot 1}\equiv K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}$$

$$y=\frac{\partial \log f}{\partial\theta}$$

であり，

$$K_{22\cdot 1}=K_{22\cdot 1}(\theta),\quad \tilde{K}=K(\tilde{\theta}_1, \theta_{20}),$$

$$\tilde{y}=\left.\frac{\partial \log f}{\partial\theta}\right|_{(\tilde{\theta}_1, \theta_{20})}$$

である．ここで $\tilde{\theta}_1$ は仮説 H のもとでの θ_1 最尤推定量である．

また Wald 統計量の類似のものとして，次の様な統計量も定義される，Hayakawa and Puri (1985).

$$T_1'=N(\hat{\theta}_2-\theta_{20})\tilde{K}_{22\cdot 1}(\hat{\theta}_2-\theta_{20})$$

さて，母集団分布を p 次元正規分布とし，仮説 $H:\Sigma=\Sigma_0$ に対する T_1, T_1', T_2ー統計量は各々

$$T_1=\frac{N}{2}\mathrm{tr}(NS^{-1}\Sigma_0-I)^2$$

$$T_1'=T_2=\frac{N}{2}\mathrm{tr}(S\Sigma_0^{-1}/N-I)^2$$

となる．故に Wald 統計量を改良した T_1' は Rao 統計量と一致することとなる．また，T_1, T_2 に於いて N を $n=N-1$ で置き換えたとき，特に T_2 は Nagao (1973) の定義した統計量となることは興味深い．今後の議論では

$$T_1=\frac{n}{2}\mathrm{tr}(nS^{-1}\Sigma_0-I)^2,$$

$$T_2=\frac{n}{2}\mathrm{tr}(S\Sigma_0^{-1}/n-I)^2$$

の分布について考察するが，$\Sigma_0=I$ としても一般性を失わない．

2 漸近展開

T_1, T_2 の正確な積率を求めることが出来ないので，前述の様な形では分布関数を求めることは出来ない．この為，T_1, T_2 を適当に変換して漸近展開式を求める．

Jack (1964—65), Nagao (1973) による変換

$$S/n=\exp\left\{\sqrt{\frac{2}{n}}Y\right\}$$

は，正値対称行列 S を $\frac{1}{2}p(p+1)$ 次元の全空間に変換する．この変換の Jacobian は

$$J(S\to Y)=(2n)^{\frac{1}{4}p(p+1)}\exp\left[\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{p+1}{2}\mathrm{tr}\ Y+\frac{1}{12n}\{p\mathrm{tr}\,Y^2-(\mathrm{tr}\,Y)^2\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{72n^2}\{3(\mathrm{tr}\,Y^2)^2-4\mathrm{tr}\,Y\mathrm{tr}\,Y^3+p\mathrm{tr}\,Y^4\}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

と漸近展開される．Nagao (1973) は $1/n$ の項まで求めている．

この変換により Y の確率密度関数 $f(Y)$ は次式で与えられる．

$$f(Y)=f_0(Y)\exp\left[\sqrt{\frac{2}{n}}A_1+\frac{1}{n}A_2+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}A_3+\frac{1}{n^2}A_4+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

$$f_0(Y)=\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{1}{4}p(p+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ Y^2\right\}$$

$$A_1=-\frac{1}{6}\mathrm{tr}\ Y^3$$

$$A_2=-\frac{1}{12}\mathrm{tr}\,Y^4+\frac{1}{12}\{p\ \mathrm{tr}\,Y^2-(\mathrm{tr}\ Y)^2\}$$
$$-\frac{1}{24}p(2p^2+3p-1),$$

$$A_3=-\frac{1}{60}\mathrm{tr}\ Y^5$$

$$A_4=-\frac{1}{180}\mathrm{tr}\ Y^6-\frac{1}{720}\{3(\mathrm{tr}\,Y^2)^2-4\ \mathrm{tr}\ Y\,\mathrm{tr}\ Y^3+p\ \mathrm{tr}\ Y^4\}$$

$$-\frac{1}{48}p(p-1)(p+1)(p+2)$$

さて，Wald 統計量 T_1 の Y による漸近展開は

$$T_1=\mathrm{tr}\,Y^2-\sqrt{\frac{2}{n}}\mathrm{tr}\,Y^3+\frac{7}{6n}\mathrm{tr}\,Y^4-\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{2}{n}}\mathrm{tr}\,Y^5$$
$$+\frac{31}{90n^2}\mathrm{tr}\,Y^6+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる．

これより T_1 の特性関数 $\varphi_1(t)$ は

$$\varphi_1(t)=E[\exp\{itT_1\}]$$
$$=\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{1}{4}p(p+1)}}\int_Y\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-2it)\mathrm{tr}Y^2\right\}$$
$$\exp\left[\sqrt{\frac{2}{n}}q_1+\frac{1}{n}q_2+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}q_3+\frac{1}{n^2}q_4\right]dY+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$q_1=-it\ \mathrm{tr}\ Y^3+A_1,\ q_2=\frac{7}{6}it\ \mathrm{tr}\ Y^4+A_2$$
$$q_3=-\frac{it}{2}\mathrm{tr}\ Y^5+A_3,\ q_4=\frac{31}{90}it\ \mathrm{tr}\ Y^6+A_4$$

となるが，$\varphi_1(t)$ を $1/n^2$ の項まで求めるには $(\mathrm{tr}\ Y^3)^4$, $(\mathrm{tr}\ Y^3)^2\,\mathrm{tr}\ Y^4$, $(\mathrm{tr}\ Y^4)^2$ 等をウエイト関数 $\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-2it)\mathrm{tr}\ Y^2\right\}/2^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{1}{4}p(p+1)}$ に関して積分せねばならない．これらの積分については Hayakawa and Kikuchi (1979) が $\Pi(\mathrm{tr}Y^\alpha)^{\nu_\alpha}$, $\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots\cdots\leq 8$ について求めている．$\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots\cdots=10, 12$ については Appendix に与える．なお 9, 11 次については積分値は0である．

反転公式を用いて T_1 の分布関数の漸近展開は次の様になる．

$$P\{T_1\leq x\}=P_f+\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{3}a_{1\alpha}P_{f+2\alpha}+\frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=0}^{6}b_{1\alpha}P_{f+2\alpha}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ここで，

$$a_{10}=-\frac{1}{24}p(2p^2+3p-1)$$

$$a_{11}=\frac{1}{2}p(p+1)^2$$

$$a_{12}=-\frac{1}{8}p(14p^2+31p+24)$$

$$a_{13}=\frac{1}{3}p(4p^2+9p+7)$$

$$b_{10}=\frac{1}{1152}p(4p^5+12p^4-19p^3-54p^2+25p+48)$$

$$b_{11}=-\frac{1}{48}p^2(2p^4+7p^3+7p^2+p-1)$$

$$b_{12}=\frac{1}{192}p(52\,p^5+200\,p^4+485\,p^3+806\,p^2+745\,p+288)$$

$$b_{13}=-\frac{1}{144}p(142\,p^5+591\,p^4+2909\,p^3+7413\,p^2+10021\,p+5436)$$

$$b_{14}=\frac{1}{384}p(844\,p^5+3692\,p^4+23207\,p^3+65030\,p^2+97531\,p+57552)$$

$$b_{15}=-\frac{1}{24}p(56\,p^5+250\,p^4+1717\,p^3+4984\,p^2+7817\,p+4776)$$

$$b_{16}=\frac{1}{18}p(16\,p^5+72\,p^4+521\,p^3+1542\,p^2+2473\,p+1536)$$

ここで，$f=\frac{1}{2}p(p+1)$．$P_\beta=P\{\chi_\beta{}^2\leq x\}$，$\chi_\beta{}^2$ は自由度 β のカイ自乗変数である．

T_2 も同様にして分布関数の漸近展開が得られる，Nagao (1973).

$$P\{T_2\leq x\}=P_f+\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{3}a_{2\alpha}P_{f+2\alpha}+\frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=0}^{6}b_{2\alpha}P_{f+2\alpha}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ここで

$$a_{20}=-\frac{1}{24}p(2\,p^2+3\,p-1)$$

$$a_{21}=\frac{1}{2}p(p+1)^2$$

$$a_{22}=-\frac{1}{8}p(6p^2+13p+9)$$

$$a_{23}=\frac{1}{12}p(4p^2+9p+7)$$

$$b_{20}=\frac{1}{1152}p(4p^5+12p^4-19p^3-52p^2+25p+48)$$

$$b_{21}=-\frac{1}{288}p^2(12p^4+42p^3+42p^2+6p-6)$$

$$b_{22}=\frac{1}{1152}p(216p^5+840p^4+2466p^3+4692p^2+4554p+1728)$$

$$b_{23}=-\frac{1}{288}p(116p^5+480p^4+2071p^3+4890p^2+5987p+2952)$$

$$b_{24}=\frac{1}{1152}p(516p^5+2220p^4+12021p^3+31578p^2+43905p+24336)$$

$$b_{25}=-\frac{1}{288}p(72p^5+318p^4+2025p^3+5700p^2+8613p+5112)$$

$$b_{26}=\frac{1}{288}p(16p^5+72p^4+521p^3+1542p^2+2473p+1536)$$

これより，T_1, T_2 の上側 α-% 点は Cornish-Fisher 展開として Hill and Davis (1968) を用いて得られる．

u_k を T_k の上側 α-% 点，x を自由度 $f=\frac{1}{2}p(p+1)$ のカイ自乗変数の上側 α-% 点とするとき，

$$u_k=x+\frac{2}{n}\sum_{\alpha=1}^{3}A_{k\alpha}x^{\alpha}+\frac{1}{n^2}\Big[(2B_{k6}-A_{k3}{}^2)x^6$$

$$+\{2B_{k5}+(f+10)A_{k3}{}^2-2A_{k2}A_{k3}\}x^5$$
$$+\{2B_{k4}-A_{k2}{}^2-2A_{k1}A_{k2}+2(f+8)A_{k2}A_{k3}\}x^4$$
$$+\{2B_{k3}+(f+6)A_{k2}{}^2+2(f+6)A_{k1}A_{k3}-2A_{k1}A_{k2}\}x^3$$
$$+\{2B_{k2}-A_{k1}{}^2+2(f+4)A_{k1}A_{k2}\}x^2$$
$$+\{2B_{k1}+(f+2)A_{k1}{}^2\}x\Big]+0(1/n^2)$$

ここで

$$A_{k3}=a_{k3}/f(f+2)(f+4),\quad A_{k2}=(a_{k3}+a_{k2})/f(f+2)$$
$$A_{k1}=(a_{k3}+a_{k2}+a_{k1})/f$$
$$B_{k6}=b_{k6}/\prod_{\alpha=0}^{5}(f+2\alpha),\quad B_{k5}=(b_{k6}+b_{k5})/\prod_{\alpha=0}^{4}(f+2\alpha)$$
$$B_{k4}=(b_{k6}+b_{k5}+b_{k4})/\prod_{\alpha=0}^{3}(f+2\alpha),$$
$$B_{k3}=\left(\sum_{\alpha=3}^{6}b_{k\alpha}\right)/f(f+2)(f+4),\quad B_{k2}=\left(\sum_{\alpha=2}^{6}b_{k\alpha}\right)/f(f+2),$$
$$B_{k1}=\sum_{\alpha=1}^{6}b_{k\alpha}/f$$

である．

さて，尤度比規準 $T_0=-2\log\lambda^*$，Wald 統計量 T_1，Rao 統計量 T_2 の比較をする為に各々の検出力を比較する必要がある．ここでは対立仮説として Pitman による局所対立仮説

$$K_n:\Sigma=I+\Theta/\sqrt{n}$$

を考える．

T_0, T_1, T_2 の検出力関数は各々次の様になる．なお T_0 は Sugiura (1973), T_2 は Nagao (1974) による．

$$P\{T_0\geq x\}=\tilde{P}_f+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\alpha=0}^{3}\tilde{a}_{0\alpha}\tilde{P}_{f+2\alpha}+\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{6}\tilde{b}_{0\alpha}\tilde{P}_{f+2\alpha}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ここで

$$\tilde{a}_{00}=\frac{1}{6}\mathrm{tr}\,\Theta^3,\ \tilde{a}_{01}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Theta^3,\ \tilde{a}_{02}=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\Theta^3$$

$$\tilde{b}_{00}=\frac{1}{18}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2-\frac{3}{8}\mathrm{tr}\,\Theta^4-\frac{1}{24}p(2p^2+3p-1)$$

$$\tilde{b}_{01}=-\frac{1}{6}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2+\frac{3}{4}\mathrm{tr}\,\Theta^4+\frac{1}{24}p(2p^2+3p-1)$$

$$\tilde{b}_{02}=\frac{13}{72}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Theta^4$$

$$\tilde{b}_{03}=-\frac{1}{12}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2+\frac{1}{8}\mathrm{tr}\,\Theta^4$$

$$\tilde{b}_{04}=\frac{1}{72}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2$$

$$P\{T_1\geq x\}=\tilde{P}_f-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\alpha=0}^{3}\tilde{a}_{1\alpha}\tilde{P}_{f+2\alpha}+\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{6}\tilde{b}_{1\alpha}\tilde{P}_{f+2\alpha}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ここで

$$\tilde{a}_{10}=-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\Theta^3$$

$$\tilde{a}_{11}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Theta^3-(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta$$

$$\tilde{a}_{12}=-\tilde{a}_{11},\quad \tilde{a}_{13}=-\tilde{a}_{10}$$

$$\tilde{b}_{10}=\frac{1}{18}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2-\frac{3}{8}\mathrm{tr}\,\Theta^4-\frac{1}{24}p(2p^2+3p-1)$$

$$\tilde{b}_{11}=-\frac{1}{6}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2+\frac{3}{4}\mathrm{tr}\,\Theta^4+\frac{1}{3}(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta\mathrm{tr}\,\Theta^3$$
$$-(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta^2+\frac{1}{2}p(p+1)^2$$

$$\tilde{b}_{12}=\frac{7}{24}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2-\frac{3}{2}\mathrm{tr}\,\Theta^4-\frac{5}{6}(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta\,\mathrm{tr}\,\Theta^3$$
$$+\frac{1}{4}(2p^2+4p+5)(\mathrm{tr}\,\Theta)^2+\frac{1}{4}(14p+17)\mathrm{tr}\,\Theta^2$$
$$-\frac{1}{8}p(14p^2+31p+23)$$

$$\tilde{b}_{13}=-\frac{13}{36}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2+\frac{5}{2}\mathrm{tr}\,\Theta^4+(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta\,\mathrm{tr}\,\Theta^3$$

$$-\frac{1}{4}(4p^2+8p+11)(\operatorname{tr}\Theta)^2-\frac{1}{4}(22p+29)\operatorname{tr}\Theta^2$$

$$+\frac{1}{3}p(4p^2+9p+7)$$

$$\tilde{b}_{14}=\frac{7}{24}(\operatorname{tr}\Theta^3)^2-\frac{19}{8}\operatorname{tr}\Theta^4-\frac{5}{6}(p+1)\operatorname{tr}\Theta\operatorname{tr}\Theta^3$$

$$+\frac{1}{2}(p^2+2p+3)(\operatorname{tr}\Theta)^2+(3p+4)\operatorname{tr}\Theta^2$$

$$\tilde{b}_{15}=-\frac{1}{6}(\operatorname{tr}\Theta^3)^2+\operatorname{tr}\Theta^4+\frac{1}{3}(p+1)\operatorname{tr}\Theta\operatorname{tr}\Theta^3$$

$$\tilde{b}_{16}=\frac{1}{18}(\operatorname{tr}\Theta^3)^2$$

$$P\{T_2\geq x\}=\tilde{P}_f+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\alpha=0}^{3}\tilde{a}_{2\alpha}\tilde{P}_{f+2\alpha}+\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{6}\tilde{b}_{2\alpha}\tilde{P}_{f+2\alpha}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ここで

$$\tilde{a}_{20}=\frac{1}{3}\operatorname{tr}\Theta^3,\quad \tilde{a}_{21}=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Theta^3-\frac{1}{2}(p+1)\operatorname{tr}\Theta$$

$$\tilde{a}_{22}=\frac{1}{2}(p+1)\operatorname{tr}\Theta,\ \tilde{a}_{23}=\frac{1}{6}\operatorname{tr}\Theta^3$$

$$\tilde{b}_{20}=\frac{1}{18}(\operatorname{tr}\Theta^3)^2-\frac{3}{8}\operatorname{tr}\Theta^4-\frac{1}{24}p(2p^2+3p-1)$$

$$\tilde{b}_{21}=-\frac{1}{6}(\operatorname{tr}\Theta^3)^2+\frac{3}{4}\operatorname{tr}\Theta^4-\frac{1}{6}(p+1)\operatorname{tr}\Theta\operatorname{tr}\Theta^3$$

$$+\frac{1}{2}(p+1)\operatorname{tr}\Theta^2+\frac{1}{2}p(p+1)^2$$

$$\tilde{b}_{22}=\frac{1}{8}(\operatorname{tr}\Theta^3)^2+\frac{5}{12}(p+1)\operatorname{tr}\Theta\operatorname{tr}\Theta^3$$

$$+\frac{1}{8}(p+1)^2(\operatorname{tr}\Theta)^2-\frac{1}{4}(p+1)\operatorname{tr}\Theta^2$$

$$-\frac{1}{8}p(6p^2+13p+9)$$

$$\tilde{b}_{23}=\frac{1}{18}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Theta^4-\frac{1}{4}(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta\,\mathrm{tr}\,\Theta^3$$
$$-\frac{1}{4}(p^2+2p+2)(\mathrm{tr}\,\Theta)^2-\frac{1}{4}(4p+5)\mathrm{tr}\,\Theta^2$$
$$+\frac{1}{12}p(4p^2+9p+7)$$
$$\tilde{b}_{24}=-\frac{1}{12}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2-\frac{1}{8}\mathrm{tr}\,\Theta^4-\frac{1}{12}(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta\,\mathrm{tr}\,\Theta^3$$
$$+\frac{1}{8}(p^2+2p+3)(\mathrm{tr}\,\Theta)^2+\frac{1}{4}(3p+4)\mathrm{tr}\,\Theta^2$$
$$\tilde{b}_{25}=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,\Theta^4+\frac{1}{12}(p+1)\mathrm{tr}\,\Theta\,\mathrm{tr}\,\Theta^3$$
$$\tilde{b}_{26}=\frac{1}{72}(\mathrm{tr}\,\Theta^3)^2$$

このとき，$\tilde{P}_{f+2\alpha}=P\{\chi^2{}_{f+2\alpha}(\delta^2)\geq x\}$ であり，$\chi^2{}_{f+2\alpha}(\delta^2)$ は自由度 $f+2\alpha$，非心母数 $\delta^2=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,\Theta^2$ を持つ非心カイ自乗変数である．

$P\{T_0\geq x\}$ に於いて，$1/\sqrt{n}$ の係数は Θ に関して3次式であり，$1/n$ の項は偶数次である．この為，$\Theta=O$ の近傍では $1/\sqrt{n}$ の項の影響はほとんど無くなり $1/n$ の項の対称性が強張されるので，改良された尤度比規準の不偏性が $1/n$ の次数の意味に於いて理解されよう．このことは次節に数値例によっても確認される．

3　数値例

T_0, T_1, T_2 の検出力を比較する為に，$p=2, n=100$ について各々の上側 5% 点を求めると，

$$T_0=7.871,\quad T_1=10.074,\quad T_2=7.859$$

となる．

$\Theta=\theta I_2$ とするとき各検出力は次表の様になる．

これより，

(i) T_0 は θ について不偏である

(ii) 検出力は各々

$$\bar{P}_2 > \bar{P}_0 > \bar{P}_1, \quad \theta > 0$$

$$\bar{P}_2 < \bar{P}_0 < \bar{P}_1, \quad \theta < 0$$

となる．故に，$\Sigma > I$ に対しては Rao 統計量が，$\Sigma < I$ に対しては Wald 統計量が仮説の近傍に於いて検出力を高めることがわかる．

θ	T_0	T_1	T_2
−0.5	0.057	0.098	0.029
−0.4	0.054	0.087	0.032
−0.3	0.052	0.077	0.035
−0.2	0.051	0.068	0.040
−0.1	0.050	0.060	0.044
0	0.050	0.053	0.050
0.1	0.050	0.047	0.055
0.2	0.051	0.041	0.061
0.3	0.052	0.036	0.068
0.4	0.054	0.031	0.076
0.5	0.057	0.027	0.084

参 考 文 献

[1] Abramowitz, M. and Segun, I. (1968). Handbook of mathematical functions, Dover Pub. In. New York.

[2] Hayakawa, T. and Kikuchi, Y. (1979). The moments of a function of traces of a matrix with a multivariate symmetric normal distribution. South African Statist. J., 13, 71—82.

[3] Hayakawa, T. and Puri, M. L. (1985). Asymptotic expansions of the distributions of some test statistics. Ann. Inst. Statist. Math., 37, Part A, 95-108.

[4] Hill, G. H. and Davis, A. W. (1968). Generalized asymptotic expansions of Cornish-Fisher type. Ann. Math. Statist., 39, 1264—1273.

[5] Lee, J. C., Krishnaiah, P. R. and Cheng, T. C. (1976). On the distribution of the likelihood ratio test statistic for compound symmetry. South African Statist. J., 10, 49—62.

[6] Nagao, H. (1973). On some test criteria for covariance matrix. Ann. Statist., 1, 700—709.

[7] Nagao, H. (1974). Asymptotic nonnull distributions of certain test criteria for a covariance matrix. J. Mult. Analysis, 4, 409—418.

[8] Nagarsenker, B. N. and Pillai, K. C. S. (1973). Distribution of the likelihood ratio criterion for testing a hypothesis specifying a covariance

matrix. Biometrika, 60. 359—364.

[9] Rao, C. R. (1948), Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. Proc. Camb. Phil. Soc., 44, 50-57.

[10] Sugiura, N. (1969). Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. Ann. Math. Statist., 40. 2051—2063.

[11] Sugiura, N. (1973). Asymptotic nonnull distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix under local alternative. Ann. Statist., 1, 718—728.

[12] Sugiura, N. and Nagao, H. (1968). Unbiasedness of some test criteria for the equality of one or two covariance matrices. Ann. Math. Statist., 39, 1686—1692.

[13] Wald, A. (1943). Tests of statistical hypothesis concerning several parameters when the number of observation is large. Trans. Am. Math. Soc., 54, 426—482.

Appendix

T_1, T_2 の特性関数の計算の為に $\Pi(\mathrm{tr}\, Y^{\alpha})^{\nu_\alpha}$, $\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots\cdots=k$, の密度関数 $\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ Y^2\right\}/2^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{1}{4}p(p+1)}$ について期待値を求める必要がある．ここで $k=10, 12$ について与える．なお $E[(\mathrm{tr} Y)^{\nu_1}(\mathrm{tr} Y^2)^{\nu_2}\cdots\cdots]$ を $1^{\nu_1}2^{\nu_2}\cdots\cdots$ と表現する．

10 次の場合には全ての多項式に 1/32 を乗じ，12 次の場合には1/64 を乗ずる．

例：

$$10\leftrightarrow E[\mathrm{tr}\ Y^{10}]=\frac{1}{32}\{42\,p^6+386\,p^5+2290\,p^4+7150\,p^3$$
$$+12143\,p^2+8229\,p\}$$

	p^{10}	p^9	p^8	p^7	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p
10	0	0	0	0	42	386	2290	7150	12143	8229
9 1	0	0	0	0	0	252	1674	6732	12420	9162
8 2	0	0	0	14	107	691	2552	7183	11549	8144
8 1^2	0	0	0	0	28	186	1868	6308	12666	9184
7 3	0	0	0	0	0	336	2058	7308	12264	8274
7 2 1	0	0	0	0	70	378	2156	6230	12222	9184
7 1^3	0	0	0	0	0	420	1848	7728	11844	8400
6 4	0	0	0	10	69	527	2276	7233	11941	8184
6 3 1	0	0	0	0	30	162	1884	6462	12630	9072
6 2^2	0	0	5	32	241	923	3166	6869	11132	7872
6 2 1^2	0	0	0	10	54	548	1730	6786	11512	9600
6 1^4	0	0	0	0	60	264	3504	7692	12960	5760
5^2	0	0	0	0	0	360	2150	7300	12100	8330
5 4 1	0	0	0	0	40	200	1890	6420	12650	9040
5 3 2	0	0	0	0	90	450	2520	6990	12030	8160
5 3 1^2	0	0	0	0	0	420	1560	6960	11940	9360
5 2^2 1	0	0	0	20	90	730	2110	6690	11000	9600
5 2 1^3	0	0	0	0	120	420	3000	6060	12960	7680
5 1^5	0	0	0	0	0	1200	3000	12600	9600	3840
4^2 2	0	0	4	24	201	791	2915	6849	11520	7936
4^2 1^2	0	0	0	8	40	426	1380	6946	12224	9216
4 3^2	0	0	0	0	48	228	2202	7104	12450	8208
4 3 2 1	0	0	0	12	54	582	1722	6846	11808	9216
4 3 1^3	0	0	0	0	72	252	3048	6180	12624	8064
4 2^3	0	2	11	98	356	1464	3457	7412	9760	7680
4 2^2 1^2	0	0	4	18	194	566	2826	4936	12480	9216
4 2 1^4	0	0	0	24	84	1080	2172	11136	9600	6144
4 1^6	0	0	0	0	240	600	9240	8640	11520	0
3^3 1	0	0	0	0	0	432	1404	6912	12420	9072
3^2 2^2	0	0	0	24	102	846	2322	7338	11544	8064
3^2 2 1^2	0	0	0	0	120	372	2904	5340	12288	9216
3^2 1	0	0	0	0	0	1152	2376	10584	9216	6912
3 2^3 1	0	0	6	24	252	672	3150	5208	11712	9216
3 2^2 1^3	0	0	0	36	108	1164	2148	9312	8256	9216
3 ·2 1^5	0	0	0	0	360	720	7080	6720	15360	0
3 1^7	0	0	0	0	0	5040	5040	20160	0	0
2^5	1	5	50	170	805	1841	4920	6960	9344	6144
2^4 1^2	0	2	8	92	248	1362	2320	7520	6400	12288
2^3 1^4	0	0	12	36	468	876	5424	4992	18432	0
2^2 1^6	0	0	0	120	240	3480	3360	23040	0	0
2 1^8	0	0	0	0	1680	1680	26880	0	0	0
1^{10}	0	0	0	0	0	30240	0	0	0	0

(全ての元を 32 で割る)

	p^{12}	p^{11}	p^{10}	p^9	p^8	p^7	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p
12	0	0	0	0	0	132	1586	12798	58760	167148	258479	166377
11 1	0	0	0	0	0	0	924	8492	50380	157300	267146	181038
10 2	0	0	0	0	42	428	3516	17160	65093	163372	251089	164580
10 1^2	0	0	0	0	0	84	772	9620	47780	158926	264858	183240

	p^{12}	p^{11}	p^{10}	p^9	p^8	p^7	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p
9 3	0	0	0	0	0	0	1260	10800	58032	167004	261738	166446
9 2 1	0	0	0	0	0	252	1926	13446	52632	156222	257562	183240
9 1^3	0	0	0	0	0	0	1512	10044	60552	163224	264636	165312
8 4	0	0	0	0	28	256	2403	13539	60530	165355	257889	165280
8 3 1	0	0	0	0	0	84	642	9522	48240	160026	265518	181248
8 2^2	0	0	0	14	121	1078	5383	23555	69772	163353	239124	162880
8 2 1^2	0	0	0	0	28	214	2614	11896	56334	148010	262504	183680
8 1^4	0	0	0	0	0	168	1116	17928	67416	199644	244608	134400
7 5	0	0	0	0	0	0	1400	11620	59220	166320	260050	166670
7 4 1	0	0	0	0	0	140	966	10066	48328	159726	265286	180768
7 3 2	0	0	0	0	0	336	2394	16086	60732	166698	253554	165480
7 3 1^2	0	0	0	0	0	0	1512	8652	53928	152376	266700	182112
7 2^2 1	0	0	0	0	70	448	3934	15946	61572	146006	253624	183680
7 2 1^3	0	0	0	0	0	420	2268	17976	56532	174804	245280	168000
7 1^5	0	0	0	0	0	0	4200	18480	110880	202440	248640	80640
6^2	0	0	0	0	25	220	2204	13066	60260	165640	258181	165684
6 5 1	0	0	0	0	0	100	690	9590	48560	159930	264610	181800
6 4 2	0	0	0	10	79	796	4183	20049	64694	164785	247004	163680
6 4 1^2	0	0	0	0	20	138	1774	8248	52218	152618	269208	181056
6 3^2	0	0	0	0	0	120	798	11286	55044	169278	262218	166536
6 3 2 1	0	0	0	0	30	192	2646	11586	56772	150942	261672	181440
6 3 1^3	0	0	0	0	0	180	972	15864	54948	174756	248640	169920
6 2^3	0	0	5	37	373	1804	8909	28495	81321	156384	230512	157440
6 2^2 1^2	0	0	0	10	64	802	3358	19476	52898	156832	239840	192000
6 2 1^4	0	0	0	0	60	324	4968	16476	90732	172560	264960	115200
6 1^6	0	0	0	0	0	600	2640	49440	112920	280800	172800	46080
5^2 2	0	0	0	0	0	360	2510	16650	62400	166430	250330	166600
5^2 1^2	0	0	0	0	0	0	1520	8300	52400	152600	269660	180800
5 4 3	0	0	0	0	0	180	1170	12330	56580	168870	259590	166560
5 4 2 1	0	0	0	0	40	240	2890	12310	56870	150090	262040	180800
5 4 1^3	0	0	0	0	0	240	1200	15180	51960	175740	253920	167040
5 3^2 1	0	0	0	0	0	0	1560	7680	52260	154920	268860	180000
5 3 2^2	0	0	0	0	90	540	4770	18510	69420	159990	248760	163200
5 3 2 1^2	0	0	0	0	0	420	1980	16920	50100	160500	248160	187200
5 3 1^4	0	0	0	0	0	0	3960	14400	90240	169800	260160	126720
5 2^3 1	0	0	0	20	110	1220	4640	23400	59890	154400	229600	192000
5 2^2 1^3	0	0	0	0	120	540	5820	17460	79020	141840	266880	153600
5 2 1^5	0	0	0	0	0	1200	4200	39600	82200	265440	195840	76800
5 1^7	0	0	0	0	0	0	16800	42000	243600	201600	161280	0
4^3	0	0	0	8	60	642	3329	17061	60239	166261	253712	163968
4^2 3 1	0	0	0	0	24	144	1974	8394	52722	154758	268320	178944
4^2 2^2	0	0	4	28	305	1472	7726	25584	76669	156436	238336	158720
4^2 2 1^2	0	0	0	8	48	626	2606	16846	46770	160360	253696	184320
4^2 1^4	0	0	0	0	48	240	3708	12312	90444	172224	257280	129024
4 3^2 2	0	0	0	0	48	276	3390	13866	63594	162738	257208	164160
4 3^2 1^2	0	0	0	0	0	240	1104	14844	46104	162348	257472	183168
4 3 2^2 1	0	0	0	12	66	876	3384	20208	53094	157944	245376	184320
4 3 2 1^3	0	0	0	0	72	324	4740	14268	79764	144288	260544	161280
4 3 1^5	0	0	0	0	0	720	2520	40080	81480	252480	195840	92160
4 2^4	0	2	13	149	674	3780	12041	40149	86312	165680	202880	153600

	p^{12}	p^{11}	p^{10}	p^9	p^8	p^7	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p
$4\ 2^3\ 1^2$	0	0	4	22	292	1120	7272	19082	73936	120416	258816	184320
$4\ 2^2\ 1^4$	0	0	0	24	108	1644	4932	34908	64176	238464	198144	122880
$4\ 2\ 1^6$	0	0	0	0	240	840	14640	29880	204960	184320	230400	0
$4\ 1^8$	0	0	0	0	0	3360	8400	169680	161280	322560	0	0
3^4	0	0	0	0	0	0	1728	7776	56268	166536	267084	165888
$3^3\ 2\ 1$	0	0	0	0	0	432	1836	16956	47412	159732	257472	181440
$3^3\ 1^3$	0	0	0	0	0	0	3888	12312	79920	145800	257472	165888
$3^2\ 2^3$	0	0	0	24	126	1428	5208	26580	65322	166368	238944	161280
$3^2\ 2^2\ 1^2$	0	0	0	0	120	492	5676	15684	75708	128304	254976	184320
$3^2\ 2\ 1^4$	0	0	0	0	0	1152	3528	36000	67320	227808	191232	138240
$3^2\ 1^6$	0	0	0	0	0	0	15840	32400	190800	172800	253440	0
$3\ 2^4\ 1$	0	0	6	30	396	1404	8862	21798	79920	125088	243456	184320
$3\ 2^3\ 1^3$	0	0	0	36	144	1992	5472	34740	60528	203712	174336	184320
$3\ 2^2\ 1^5$	0	0	0	0	360	1080	15000	28200	163680	149760	307200	0
$3\ 2\ 1^7$	0	0	0	0	0	5040	10080	126000	120960	403200	0	0
$3\ 1^9$	0	0	0	0	0	0	90720	90720	483840	0	0	0
2^6	1	6	75	320	1975	6046	22861	48700	114704	154688	193024	122880
$2^5\ 1^2$	0	2	10	140	500	3450	8642	37080	60320	169088	140288	245760
$2^4\ 1^4$	0	0	12	48	744	2064	15660	27936	131904	118272	368640	0
$2^3\ 1^6$	0	0	0	120	360	6120	11640	96000	90240	460800	0	0
$2^2\ 1^8$	0	0	0	0	1680	3360	62160	60480	537600	0	0	0
$2\ 1^{10}$	0	0	0	0	0	30240	30240	604800	0	0	0	0
1^{12}	0	0	0	0	0	0	665280	0	0	0	0	0

(全ての元を 64 で割る)

(1985・2・20 脱稿)(一橋大学教授)