《研究ノート》

打ち切り所得分布とその応用についての覚書

高山憲之

一　問題の所在

経済的不平等に関する研究は一九六〇年代の末期以降、経済学のひとつの大きなテーマとしてよみがえった。その中で、これまであまり明確でなかった統計的分析用具の経済的な含意が厳密に整理されたことは特筆に値する。

しかし経済的不平等は完全平等からの距離だけを問題にしているので、それを計測したからといってただちに具体的な政策に結びつけることは困難であったし、またそもそも不適切であった。各人の能力あるいは貢献を捨象したままで不平等を論難することにあまり意味がなかったからである。

事実に関する記述と政策との間に横たわるこのような深い溝を少しでも埋めようとした最初の試みはセン（一九七六）によってなされた。センは貧困に着目し、それが基本的には他人との比較によって意識される相対的窮乏感（relative deprivation）によって支配されているという構図を描いた上で、不平等の指標を貧困計測のための指標に転用しうると主張したのである。

このようなセンの主張を徹底させたのはタカヤマ（一九七九）であった。タカヤマは「貧困線で切られた打ち切り所得分布」（censored income distribution truncated from above by the poverty line）という分析用具を考案し、それを用いて貧困の計測問題を不平等の計測問題に還元することに成功した。(1)

タカヤマの考案した分析用具は上から切られた打ち切り所得分布である。しかるに下から切られた打ち切り所得分布に利用可能性をみつけることはできないだろうか。このような疑問に答えるための準備として、本稿は用意されたものである。(2)

まず次節で、リッチな気分あるいは金持ちの感慨についてその基本的構図を与え、第三節では、打ち切り所得分布を新たに定義する。第四節では、リッチな気分の計測方法を考察し、そのための指標を具体的に提案する。第五節では、提案された指標の諸性質を調べることにしたい。

もとより筆者の準備は現在のところ、かならずしも十分ではない。本稿は、今後において一層の展開を図るための覚書にすぎない。この点をはじめにお断りしておく（念のため）。

(1)　この間の詳しい事情、およびその後における貧困計測論議の推移については、展望論文である高山（一九八一）

を参照してほしい。

（2） 問題の所在をご指摘下さったのは、倉林義正・溝口敏行の両教授である。記して謝意を表したい。

二 リッチな気分――基本的構図

日本では毎年五月に所得一〇〇〇万円以上の高額所得者名簿が発表されることになっている。人々はその発表に対して複雑な感慨をいだくのではないだろうか。たとえば政治家はどうやって所得の申告をごまかしているのだろうかとか、野球の王選手はさすがにすごい、しかしあれだけのたぐいまれな才能を有しかつ努力をしていてもあの程度の所得にすぎないかとか、毎年名簿の上位を独占している土地成金にはもっと税金をとってよいのではないかとか、医師はどうしてあんなにもうかるのかとか、一度でいいから自分も一〇〇〇万円以上の所得を手にしてみたいとか、等々。

他方、高額所得者名簿に載った人々はかれらなりに金持ちの感慨、いわゆるリッチな気分にひたっているにちがいない。

本稿では、このリッチな気分の計測を試みてみたい。なお金持の感慨とかリッチな気分とかいうものは人々の有する羨望感のひとつの裏返しであるかもしれない。かりにそうであるとすれば本稿の試みは羨望感の計測にも通じているといえよう。

ところで人々が一般に金持であることを意識するのは、自分の所得が一定の金額を超えたときからであると考えてよい。その場合、感慨は所得が高ければ高いほど強められるであろう。このような金持ちとしての感慨は、構図としてみるかぎり貧困感と基本的に同じである。異なっているのは所得の方向だけに限られる。したがって貧困の指標を転用することによってリッチな気分、金持ちの感慨を計測することが可能になるのではないだろうか。以下、本稿ではこの点の究明を図ることにしたい。

三 打ち切り所得分布――定義

いま所得分布 $\boldsymbol{y}$ がベクトル

$$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_n) \tag{1}$$

で与えられているとしよう。すなわち n 人で構成されている社会を仮定する。また所得の順位は、上から順番につけられているとしよう。すなわち

$$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots\cdots \geqq y_n \tag{2}$$

である。さらに、人々がリッチな気分を意識しだす所得金額を z とし、それは y_m で与えられていると仮定しよう。この場合、z 以上の所得金額を手にしている人数は m 人となる。

つぎに高額所得 z によって下から切られた打ち切り所得分布 (censored income distribution truncated from *below* by the richness line) $\boldsymbol{y}^*$ を定義しよう。

$$\boldsymbol{y}^*=(y_1^*,\ y_2^*,\ \cdots\cdots,\ y_n^*) \tag{3}$$

ただし

$$\begin{cases} y_i^*=y_i, & y_i \geqq z \text{ の場合} \\ y_i^*=\mu_0, & y_i < z \text{ の場合} \end{cases} \tag{4}$$

である。ここで μ_0 は所得が z 未満の者の平均所得を意味している。

$$\mu_0=\sum_{i=m+1}^{n} y_i/(n-m) \qquad (5)$$

所得が z 未満の者の y_i^* をどう定義するかについては(4)式とは別の方法を考えることもできる。たとえば

$$y_i^*=z, \quad y_i<z \text{ の場合} \qquad (6)$$

と定義する場合がその一例にほかならない。ここではしかし(4)式を便宜的に採用とすることにしたい。(4)式の場合、分布 $\boldsymbol{y}^*$ の平均所得は分布 $\boldsymbol{y}$ の平均所得 μ に等しいからである。[3]

$$\mu=\sum_{i=1}^{n} y_i/n \qquad (7)$$

(3)　タカヤマ（一九七九）が貧困の計測に利用した打ち切り所得分布のアイデアを、そのまま転用すると(6)式になる。なお(4)式の定義はスリバスタバ（一九八一）の考え方を転用したものにほかならない。

四　リッチな気分——計測の方法

リッチな気分が今、高額所得者の所得超過額 (y_i-z) の加重総額を規準化した値で計測されるとしよう。すなわち裕福感の指標を R とするとき

$$R=A\sum_{i=1}^{m} w_i(y_i-z)+B \qquad (8)$$

と書くことができると仮定する。ここで A、B は規準化のための定数であり、また w_i はウェートを意味している。

ウェート w_i は分布 $\boldsymbol{y}$ における下からの所得順位に等しいと仮定しよう。すなわち

$$w_i=n+1-i \qquad (9)$$

である。この仮定はつぎのような意味をもっている。すなわちリッチな気分は所得超過額 (y_i-z) が大きければ大きいほど強い。しかもこのような気分は他人との比較によって意識されるという側面を否定することができない。換言すれば、それはあくまでも相対的なものにほかならない。ところで他人との比較が最も簡単なのは所得順位である。したがってそれをウェートに用いることに恣意性は残るけれども、とにかくわかりやすい。なお、このような考え方は貧困計測の場合にも採用されている。

つぎに前節で定義を与えた分布 $\boldsymbol{y}^*$ を用いて問題の単純化を図ろう。すなわちリッチな気分は、分布 $\boldsymbol{y}^*$ の不平等度で計測できると仮定する。

$$R=A\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)(y_i^*-\mu) \qquad (10)$$

(10)式で定義される R は、(8)式で定義される R と異なるような印象を読者に与えるかもしれない。しかし両者は基本的に差異がない。(10)式はつぎのように事き直すことができるからである。

$$R=A\sum_{i=1}^{m}(n+1-i)(y_i-z)$$
$$+A\sum_{i=1}^{m}(n+1-i)(z-\mu)+A\sum_{i=m+1}^{n}(n+1-i)(\mu_0-\mu)$$

$$=A\sum_{i=1}^{m}(n+1-i)(y_i-z)+B$$

ここで

$$B=A\sum_{i=1}^{m}(n+1-i)(z-\mu)$$

$$+A\sum_{i=m+1}^{n}(n+1-i)(\mu_0-\mu) \quad (11)$$

である。つまりBを⑾式のように置けば、⑽式は⑻式で定義されるRに変わりない。

⑽式は、リッチな気分が基本的には不平等の計測と同様の枠組の中で計測しうることを主張しうるものである。このような主張は、既述したように他人との比較という相対的側面がその気分の基底に存在するという理解に基づいている。なお分布$\boldsymbol{y}^*$を利用した理由は、非高額所得者の所得に変動があっても、それによってかれが高額所得者にならないかぎり社会全体としての裕福感に変化はないと考えたことにある。つまり非高額所得者の所得分布についてはとりあえず判断停止をしてリッチな気分を計測しようというのである。

さて最後に定数Aを特定化しよう。そのためには指標Rの値を[0, 1]の間におさめる工夫をすればよい。ここでは、つぎのように仮定することにしよう。すなわち最高所得をえている者が社会の全所得を独占していて、残りのすべてのメンバーの所得がゼロである場合、指標Rは$(1-1/n)$に等しいと仮定する。このとき

$$y_1=n\mu,\quad y_2=y_3=\cdots\cdots=y_n=0$$

であり、⑽式の右辺は

$$A[n^2\mu-\mu n(n+1)/2]$$
$$=A\mu n(n-1)/2$$

と計算することができる。他方、左辺Rの値は$(1-1/n)$に等しい。両者を等号で結んでAの値を求めると

$$A=2/(\mu n^2) \quad (12)$$

がえられる。

⑿式を⑽に代入すると

$$R=\frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)(y_i^*-\mu) \quad (13)$$

が導かれる。これが裕福感の指標にほかならない。

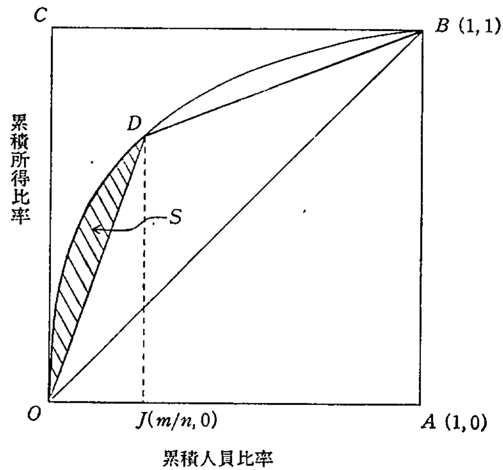
⒀式で与えられるRは、分布$\boldsymbol{y}^*$の不平等度$\bar{G}^*$に等しい。ここで分布$\boldsymbol{y}$の不平等度$\bar{G}$は

$$\bar{G}=\frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)(y_i-\mu) \quad (14)$$

で定義されている。$\bar{G}$は分布$\boldsymbol{y}$のジニ係数Gに等しい。Gは平均所得と各人の所得の差$(\mu-y_i)$を上からの所得順位iで加重し規準化したものである（たとえば高山（一九八一）、三一九ページをみよ）。つまりGと$\bar{G}$ではウェートのつけ方が正反対であるので、読者の注意を促しておきたい。(4) なお分布$\boldsymbol{y}^*$の平均所得は、⑷式の定義により⑺式で与えられる分布$\boldsymbol{y}$の平均所得μに等しい。このポイントはすでに指摘したとおりである。

指標Rを幾何学的に表示しておこう。第一図をみられたい。

第一図



横軸方向に高所得の者から並べた場合の累積人員比率が測られている。他方、縦軸方向にはその場合の累積所得比率が測られている。このとき所得分布$\boldsymbol{y}$は一般になめらかな弓形の曲線ＯＤＢで与えられる。指標Gは曲線ＯＤＢと対角線ＯＢとで囲まれた部分の面積を三角形ＯＢＣの面積で除した値に等しい。

つぎに分布$\boldsymbol{y}^*$は、なめらかな曲線ＯＤおよび線分ＤＢで与えられる。このとき裕福感の指標Rは、斜線部の面積Sと三角形ＯＢＤの面積の和を三角形ＯＢＣの面積で除した値に等しい。

（4）　高所得者から並べた場合と低所得者から並べた場合でジニ係数型の線型社会評価関数がどうなるかを考察した論文に豊田（一九八二）がある。興味ある読者の参照を乞いたい。

五　指標Rの諸性質

他の事情が等しいかぎり、高額所得者の所得増大は指標Rの値を上昇させるべきであろう。指標Rはこのような性質（単調性の公準）を有しているだろうか。いまy_iがΔy_iだけ増大したとき、Rがどれだけ変化するかを(13)式に着目して調べてみよう（ただし所得変化によって所得順位は変わらないと仮定する）。このとき分母は$(n\Delta y_i)>0$だけ増大する。他方、分子は

$$2[(n+1)/2-i]\ \Delta y_i$$

だけ変化する。これが正となるための条件は

$$i<(n+1)/2 \qquad (15)$$

で与えられ、それは高額所得者の所得が中位所得（median income）を超えていることを意味している。

人々がリッチな気分を味わうためには条件(15)は不可欠の前提となろう。したがって通常の場合、単調性の公準を指標Rは満たしていることになる。

つぎに第i番目の高額所得者が自分より所得の低い者に所得をΔy_iだけ移転するとき（ただし所得の順序は変わらない）、指標Rの値は他の事情が等しいかぎり低下すべきである。このような第二の性質（移転の公準）を指標Rは満たしているだろ

うか。

このような所得移転の効果は三つの場合に分けて考えると理解し易い。まず第一のケースは高額所得者同士の所得移転の場合である。この場合、Rは不平等の指標であるので移転の公準を満たしている。

第二のケースは高額所得者から非高額所得者への移転であり、非高額所得者が所得移転を受けた後もなお非高額所得者にとどまる場合である。この場合の効果は、第一の性質（単調性の公準）を調べるときとまったく同様の手続きをふめば明らかとなる。すなわち条件(15)が満たされるかぎり指標Rは移転の公準を満たしている。

第三のケースは、第二のそれと基本的に同じであるものの、非高額所得者が所得移転をうけて高額所得者になる場合である。この移転によって所得順位は変わらないと仮定しているので、この場合、移転の受け手は第$(m+1)$番目の非高額所得者となる。このような所得移転がおこなわれるとき、(13)式の分母は変化しない。また(13)式の分子の変化分は

$$2(i-m-1)\Delta y_i-(n-m)(y_{m+1}+\mu_0)<0$$

で与えられる。すなわち第三のケースも移転の公準を満たしていることが判明した。

したがって通常の場合、すなわち高額所得zの水準が中位所得を超えている場合、指標Rは単調性の公準および移転の公準のふたつを満たしていることになる。指標Rの有するこのような性質は、リッチな気分の計測においてわれわれがまさに求めていたものにほかならない。[5]

(5) 指標Rを三つの要素H、E、$\bar{G}_r$に分解することは可能だろうか。ここでHは

$$H=m/n \tag{16}$$

で与えられ、高額所得者数mの全人口nに対する割合である。またEは

$$E=\sum_{i=1}^{m}(y_i-z)/(m\mu_r) \tag{17}$$

で定義され、所得超過額(y_i-z)の和を高額所得者の総所得で除した値を意味している。ここでμ_rは高額所得者の平均所得である。

$$\mu_r=\sum_{i=1}^{m}y_i/m \tag{18}$$

(17)式を整理すると

$$E=1-z/\mu_r \tag{19}$$

がえられる。さらに、$\bar{G}_r$は高額所得者だけの所得分布$\boldsymbol{y}_r$の不平等度を表わし

$$\bar{G}_r=\frac{2}{\mu_r m^2}\sum_{i=1}^{m}(m+1-i)(y_i-\mu_r) \tag{20}$$

で与えられる。

H、E、$\bar{G}_r$の値がそれぞれ大きければ大きいほどRの値が大きくなれば、指標Rは望ましい性質を備えていることになる。このポイントを確認するための準備としてRを三つの要因に分解したいのである。

指標Rはジニ係数の分解式を援用することにより

$$R=(s-H)+Hs\bar{G}_r$$

$$=H[(\mu_r/\mu-1)+s\bar{G}_r] \tag{21}$$

と整理することができる。ここでsは高額所得者が全体として分布$\boldsymbol{y}$において占める所得の割合である（詳しくはタカヤマ（一九七九）を参照されたい）。ここで $\mu_r=z/(1-E)$ という関係に着目すると、(21)式は

$$R=H\left[\frac{1}{1-E}E+s\bar{G}_r\right]+s(1-\mu/z) \tag{22}$$

と書き直すことができる。Rを三つの要素H、E、$\bar{G}_r$で偏微分した値の符号がどうなるかを調べる作業は読者にゆだねたい。

参考文献

Sen, A. K. (1976), "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement," *Econometrica*, 44 (2).

Srivastava, D. K. (1981), "A Note on the Measurement of Poverty and Income Inequality," unpublished note.

Takayama, N. (1979), "Poverty, Income Inequality, and Their Measures: Professor Sen's Axiomatic Approach Reconsidered," *Econometrica*, 47 (3).

高山憲之（一九八一）「貧困計測の現段階」『経済研究』三二（四）。

豊田　敬　（一九八二）「ジニ係数の一般化――人口原理について」『商学論集』（福島大学）五〇（四）。

（一橋大学助教授）

〈付記。GがGに等しいことを示唆して下さったのは豊田敬助教授である。お礼を申し上げたい。〉