所得分布曲線とエントロピー

片岡信二

序

われわれはさきに発表したいくつかの小論文において多数の行動主体の集団の性質を分析する方法として、統計的システム論を提案した〔4〕、〔5〕、〔6〕、〔7〕、〔8〕。そこでは相互に関連をもった人ないし物の集合体を考え、その構成要素である人ないし物の数が非常に多く、相互作用もまた複雑である場合に、個々の要素の行動を記述する代りに（またこれは不可能なことであるが）、集団全体の統計的性質を導出することを主眼とした。そしてそのための指導原理として最尤状態の原理を考えた。すなわち「複雑な相互作用をする多数の要素の集団の状態は、充分な時間の後に於ては、最も起り易い状態、最も確からしい状態に落着く」ということである。これからエントロピー（Entropy）の概念の導入と、その最大化問題とが導かれた。

以上のような一般化されたエントロピーについては、物理学者の E. T. Jaynes〔3〕、M. Tribus〔18〕の先駆的な業績があり、また経済学の分野においても、Georgescu-Roegen〔2〕、J. H. Lisman〔11〕、A. Pikler〔14〕および B. Naslund〔12〕、〔13〕等の論文、著書がある。特に Naslund はさきに筆者の展開した方法に類似のものを用い、所得分布曲線を求めることを提案している。しかしながら、これは Naslund の論文に対するコメント〔13〕にもあるように、実測データとの比較がなされておらず、単なる一つの推測に終っている。またこれ以外

のエントロピーに関する多くの論文が、熱力学、統計力学におけるそれとの単なるアナロジーとして経済現象の説明に用いているところがある。本論文では前論文以後に行った実測データとの比較を含めいくつかの計算結果について報告し、検討したいと思う。諸方面よりの御批判を戴ければ幸いである。

一 統計的システム論による所得分布曲線の導出

前論文において述べた方法をまず概説しておく。一定の領域、ないし社会（これは必ずしも地理的領域だけを意味せず、階級、階層であってもよい）に住む住民の所得をいくつかの所得階級に分け、各階級に属する人数の分布を問題とする。このようなシステムを以後経済社会システムあるいは単にシステムとよび、次のような前提を置く。

(1)各個人はシステム全体の所得の分配に参加するが、その分配量は必ずしも一定せず、確率的要素を持っている。

(2)全システムの厚生関数を各個人の所得による個人的厚生関数（効用関数と殆んど同義に用いる）の和と定義する。しかも後ではこの関数は J. Bernoulli に従い対数関数であるとする。この仮定は効用関数としてよく用いられるという理由の外に計算の便宜のためもあるが、後述するように実測結果にもかなりよく一致する。勿論対数関数以外のものに対しても計算方法が与えられており、関数形についてはあまり制約をつける必要はない。

(3)システムは与えられた所得、および与えられた厚生のもとで最も確からしい状態、すなわち最尤状態をとる。

これらの前提のもとで定式化を行うと次のようになる。y_iをミクロな所得階級iの所得水準とし、ある平均的な個人がミクロな階級iに属する確率をπ_iとすると、エントロピーθに対して

$$\mathrm{Max}\ \theta = -\sum_i \pi_i \log \pi_i \tag{1.1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_i \pi_i = 1 \tag{1.2}$$

$$\sum_i \pi_i y_i = \bar{y} \tag{1.3}$$

$$\sum_i \pi_i u(y_i) = \bar{u} \tag{1.4}$$

となる。ここで$\bar{y}$は一人当りの平均所得、$u(y_i)$は所得

y_iに対する個人的厚生関数、$\bar{u}$は一人当りの平均厚生である。(1.2), (1.3), (1.4) に対するラグランジュ乗数をそれぞれ、β_0、β_1、β_2とすると、母関数（分配関数）Zを

$$Z=\exp(1+\beta_0)=\sum_i \exp\{-\beta_1 y_i-\beta_2 u(y_i)\} \qquad (1.5)$$

として、分布確率p_i（π_iの最尤値）は

$$p_i=\frac{1}{Z}\exp\{-\beta_1 y_i-\beta_2 u(y_i)\} \qquad (1.6)$$

となり、また

$$-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_1}=\bar{y}, \quad -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_2}=\bar{u} \qquad (1.7)$$

が得られる〔6〕。

計算を更に進めるために、(4)$u(y)=\log y$, (5)ミクロな階級y_iの分布密度は連続的で、一定値cであると仮定すると、若干の計算の後に

$$Z=c\beta_1^{\beta_2-1}\Gamma(1-\beta_2) \qquad (1.8)$$

となり、(1.6) に代入すると、y_iを連続変数yとして密度分布関数は

$$p(y)=\frac{\beta_1^{1-\beta_2}}{\Gamma(1-\beta_2)}y^{-\beta_2}e^{-\beta_1 y} \qquad (1.9)$$

となる。ここでβ_1、β_2は、(1.8) のZを (1.7) に代入して、$\bar{y}$、$\bar{u}$の関数として定まる。

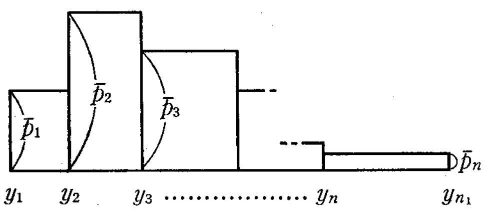
(1.9) はyについてのガンマ分布関数となるが、このことは、T. D. Mount A. B. Z. Salem が既にアメリカの一九六〇年から六九年の家計調査のデータについて確めている〔15〕。

われわれは前論文において更に、各年のデータから算術平均所得$\bar{y}$、幾何平均所得$\tilde{y}(=\exp(\bar{u}))$を求め、この二つを座標に取って成長経路を画くと、ほぼ原点を通る直線上に乗ることを示し、この直線を「所得—厚生の均衡成長経路」と名付けた。別に始点と終点を均衡成長経路の上に置いた二つの成長経路を想定し、一方は所得の成長率に重点を置いたもの、他方は厚生の成長率に重点を置いたものとし、この二つの経路上の各点に対して不平等度係数を計算すると、前者では成長の途中で不平等度増加の山ができ、後者では谷となった。このことはいわゆる「Kuznets の逆U字仮説」を表わすものと考えられる。

われわれはまた前論文〔8〕においては、「エントロピー」という一見取っ付きの悪い用語をやめて、「確率自

由度」という表現を用いた。この意味は、統計的なシステムは出来るだけ束縛を離れて自由になりたいという性質を持っているということで、これを確率自由度（エントロピー）増加の性質と表現したのである。本論文では再度エントロピーという言葉を用いるが、確率自由度という用語も時として使うことにする。さて前論文までの諸結果の概説はこれだけにしておき、次に階級別ヒストグラムの取扱いについて述べることにする。

図1



二　所得分布ヒストグラム

実際のデータと理論を比較しようとするとき、与えられるものは連続的曲線ではなく、階級の級間隔のいろいろ異なったヒストグラムである。これに対して曲線をあてはめる方向で考えることもできるが、与えられたヒストグラムをそのまま受け取って、それに統計的システム論を適用することを以下考えて見よう。

いま n 個の所得階級を考え、それらの階級界を y_1、y_2、……y_n、y_{n_1} $(n_1=n+1)$ とし、所得 y に対する未知な確率密度関数 $p(y)$ を次のような不連続関数

$$p(y)=\bar{p}_j,\quad y_j\leqq y<y_{j+1},\quad j=1,2,\cdots,n$$

とする。（ここではまだ $\bar{p}_j$ は未知の変数である。）これは図1のように示される。いま単位所得中にあるミクロな所得階級の数（密度）を c（一定）とすると、前節の(1.2)～(1.4) の和を、次のような積分で置き換えることができる。

$$\sum_i \pi_i=1:\ \int_{y_1}^{y_{n_1}} p(y)c\,dy=\sum_{j=1}^{n}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\bar{p}_j c\,dy$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\bar{p}_j c(y_{j+1}-y_j)=1 \qquad (2.1)$$

$$\sum_i \pi_i y_i=\bar{y}:\ \int_{y_1}^{y_{n_1}} p(y)yc\,dy=\sum_{j=1}^{n}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\bar{p}_j yc\,dy$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\bar{p}_j c(y_{j+1}-y_j)\frac{(y_{j+1}+y_j)}{2}=\bar{y} \qquad (2.2)$$

$$\sum_i \pi_i u(y_i)=\bar{u}:\ \int_{y_1}^{y_{n_1}} p(y)u(y)c\,dy$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\bar{p}_j \log y\, cdy$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\bar{p}_j c\{(y_{j+1}\log y_{j+1}-y_{j+1})$$

$$-(y_j \log y_j - y_j)\}=\bar{u}. \qquad (2.3)$$

ここで $\bar{p}_j c(y_{j+1}-y_j)$ は第 j 階級の確率となるので、これを改めて p_j とおく、また後の便利のために $w=y_{n_1}-y_1$, $z_j=y_j/w$ と置くと (2.2), (2.3) は、

$$\sum_j p_j(z_{j+1}+z_j)/2=\bar{y}/w \qquad (2.4)$$

$$\sum_j p_j\{(z_{j+1}\log z_{j+1}-z_{j+1})-(z_j \log z_j - z_j)\}/(z_{j+1}$$

$$-z_j)=\bar{u}-\log w=\log(\tilde{y}/w)$$

$$(2.5)$$

となる。以下とくに断らない限り $\sum_{j=1}^{n}$ は $\sum_j$ と書くことにする。また、

$$\bar{z}_j=(z_{j+1}+z_j)/2$$

$$\bar{v}_j=\{(z_{j+1}\log z_{j+1}-z_{j+1})-(z_j \log z_j - z_j)\}/(z_{j+1}-z_j)$$

$$\bar{y}/w=\bar{z},\quad \log(\tilde{y}/w)=\bar{v}$$

とおく。同様に (1.1) のエントロピーは

$$\theta=\sum_i -\pi_i \log \pi_i:\quad \int_{y_1}^{y_{n_1}} -p(y)\log p(y)cdy$$

$$=\sum_j -(\bar{p}_j \log \bar{p}_j)c(y_{j+1}-y_j)$$

$$\theta=\sum_j -p_j \log(p_j/w_j)+\log w+\log c$$

$$(2.6)$$

となる。ここで $w_j=z_{j+1}-z_j$ である。

そこでこの問題の最尤状態を求める最大値問題は

$$\sum_j p_j=1 \qquad (2.7)$$

$$\sum_j p_j \bar{z}_j=\bar{z} \qquad (2.8)$$

$$\sum_j p_j \bar{v}_j=\bar{v} \qquad (2.9)$$

のもとで、(2.6) のエントロピーを最大にする p_j すなわち $\bar{p}_j$ を求めることとなる。(2.7), (2.8), (2.9) に対するラグランジュ乗数をそれぞれ β_0、β_1、β_2 とすると最大値問題に対するラグランジュ関数は

$$L=\sum_j -p_j \log(p_j/w_j)-\beta_0(\sum_j p_j-1)-\beta_1(\sum_j p_j \bar{z}_j$$

$$-\bar{z})-\beta_2(\sum p_j \bar{v}_j-\bar{v})$$

となり、$\partial L/\partial p_j=0$ から

$$p_j=w_j e^{-(1+\beta_0)}e^{-\beta_1 z_j-\beta_2 v_j} \qquad (2.10)$$

が得られる。ここで w_j は正で、

$$\sum_j w_j=\sum_j(z_{j+1}-z_j)=z_{n_1}-z_1=(y_{n_1}-y_1)/w=1$$

という性質をもつ。以下 p_j に対するエントロピーの最大値を s とする。なおこの節で用いた分布関数のヒストグラム近似は，更に近似の次数を上げるための前段階としてのものであることに注意しておく。

三 Darroch-Ratcliff の方法

(2.6)～(2.9) の最大値問題は目的関数 $\boldsymbol{\theta}$ が p_j の凹関数であり，条件式が p_j について線形であるから性質のよい凸計画の問題となる。従ってこれの数値解法は勾配法系統のものや方程式の求解法系統のものが多数考えられるが，筆者の経験では両方とも収束させるための出発値の選択が困難で，よい結果は得られなかった。Darroch-Ratcliff〔1〕の方法はカテゴリーとしては後者に属するが，巧みな補助条件式をつくり，一方向からの収束を可能にするものであり，確実に収束値が得られるという意味で優れた方法である。本節ではこの方法について概観することにする。

Darroch-Ratcliff の反復尺度法 (iterative scaling method) は次の二式

$$p_j=w_j\mu\prod_{i=1}^{m}\mu_i^{b_{ij}}\qquad j=1,2,\cdots,n\,;\ \sum_j w_j=1,\ w_j>0 \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_j=k_i,\quad \sum_j p_j=1,\quad p_j\geqq 0 \tag{3.2}$$

を考え，(3.2) を満足する (3.1) の形の $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ を求める方法である。まずその手続きをまとめて示すと次のようになる。

(Ⅰ) 条件式 (3.1) と (3.2) からそれらに同値な次の二つの条件式 (3.3), (3.4) をつくることができる。

$$p_j=w_j\prod_{i=1}^{c}\lambda_i^{a_{ij}} \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_j=h_i,\qquad i=1,2,\cdots,c \tag{3.4}$$

ここで　$c=m$ または $m+1$ (後述)

$$a_{ij}\geqq 0,\quad \sum_{i=1}^{c}a_{ij}=1,\quad h_i>0,\quad \sum_{i=1}^{c}h_i=1 \tag{3.5}$$

(1)　$u_i=\mathrm{Max}(|b_{ij}|\ \big|\ b_{ij}<0,\,j=1,2,\cdots,n)$ なる $u_i(i=1,\cdots m)$ を選ぶ。

(2)　$q_j=\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}+u_i)\geqq 0,\ q_{n_1}=\sum_{i=1}^{m}(k_i+u_i)\geqq 0$ をつくる。

(3)　$q_{\max}=\mathrm{Max}(q_j|j=1,2,\dots,n_1)$ を選ぶ。

(4)　$t=1/q_{\max}$ とする。

(5)　$a_{ij}=t(b_{ij}+u_i)$ とする。

このとき

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}+u_i)\leqq 1$$

となるので、このときもし

$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}=1$ のときは $c=m$

$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}<1$ のときは $a_{m+1j}=1-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$

とおいて $c=m+1$ とする。同様に

(6)　$h_i=t(u_i+k_i)$　$i=1,2,\dots,m$

とする。このとき $\sum_j b_{ij}p_j=k_i$ であるから負の b_{ij} の最小値 $-u_i$ は k_i よりも小である。もしそうでなければ $\sum p_j=1,\ p_j\geqq 0$ なる関係と矛盾する。従って $h_i\geqq 0$ となる。(6)より

$$\sum_{i=1}^{m}h_i=t\sum_i(u_i+k_i)\leqq 1.$$

もし

$\sum_{i=1}^{m}h_i=1$ ならば $c=m$

$\sum_{i=1}^{m}h_i<1$ ならば $h_{m+1}=1-\sum_{i=1}^{m}h_i,\quad c=m+1$

とおく。すなわち $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}<1,\ \sum_{i=1}^{m}h_i<1$ となるような添字 j があるならば、更に $m+1$ 番目の方程式を追加して $m+1$ 本の式に対して、すべての j について $\sum_{i=1}^{m+1}a_{ij}=1$, $\sum_{i=1}^{m+1}h_i=1$ となるようにするのである。

以上により (3.2) の b_{ij}、k_i から (3.5) を満足する a_{ij}、h_i を求めることができる。

次に (3.1) から (3.3) を導くことを示す。

(7)　$\lambda_i=\nu\mu_i^{1/t},\ \nu=\mu\prod_{i=1}^{m}\mu_i^{-u_i}=\lambda_c,\ i=1,2,\dots,m$

とおくと、$b_{ij}=a_{ij}/t-u_i$ であることを用いて、

$$p_j=w_j\mu\prod_{i=1}^{m}\mu_i^{b_{ij}}=w_j\mu\left(\prod_{i=1}^{m}\mu_i^{-u_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{m}\mu_i^{a_{ij}/t}\right)$$

$$=w_j\nu\prod_{i=1}^{m}(\mu_i^{1/t})^{a_{ij}}=w_j\nu^{\sum_{i=1}^{m}a_{ij}+a_{cj}}\prod_{i=1}^{m}(\mu^{1/t})^{a_{ij}}$$

$$=w_j\prod_{i=1}^{m}(\nu\mu_i^{1/t})^{a_{ij}}\nu^{a_{cj}}=w_j\prod_{i=1}^{c}\lambda_i^{a_{ij}},\ \lambda_c=\nu$$

となる。

(II) 反復尺度法を定理の形で述べると次のようになる。

「定理　数列 $\{\boldsymbol{p}^{(t)}; t=0,1,2,\cdots\}$ を考える。ここで $\boldsymbol{p}^{(t)}=(p_1{}^{(t)}, p_2{}^{(t)}, \cdots, p_n{}^{(t)})$ である。いま

$$p_j{}^{(0)}=w_j \quad j=1,2,\cdots,n \tag{3.6}$$

$$p_j{}^{(t+1)}=p_j{}^{(t)}\prod_{i=1}^{c}\left(\frac{h_i}{h_i{}^{(t)}}\right)^{a_{ij}} \tag{3.7}$$

ここで　$h_i{}^{(t)}=\sum_j a_{ij}p_j{}^{(t)}$. (3.8)

このときもし条件式 (3.4) が実行可能であれば数列 $\{\boldsymbol{p}^{(t)}\}$ は (3.3) の解に一義的に収束する。」

以下 Darroch-Ratcliff に従ってこの収束性について証明しよう。これに先立ち，次のような関数

$$K(\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})=\sum_{j=1}^{n}p_j\log(p_j/w_j) \tag{3.9}$$

$$\sum_j p_j=1, \quad \sum_j w_j \leqq 1, \quad 0\log 0=0$$

を定義すると，これに対して次のいくつかの補助定理が成り立つ。

「補助定理1

$K(\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})\geqq 0$, $K(\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})=0$ if and only if $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{w}$

である。」

この証明は Kullback〔9〕ないし国沢〔10〕の著書にもあり，以下についても同様である。

「補助定理2　(3.2) の式を満す (3.1) の形の p_j が存在するならば，p_j は (3.2) の条件のもとで $K(\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$ を最小化し，その唯一の解である。」

これらの補助定に理より $K(\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$ は Kullback の判別関数と呼ばれ，ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{w}$ との距離を表わす一つの尺度となる。

さて本定理の証明に移る。まず $t=0,1,2,\cdots$ に対して $\sum_j p_j{}^{(t)}\leqq 1$ であることを示す。

$$\sum_j p_j{}^{(t)}=\sum_j p_j{}^{(t-1)}\prod_{i=1}^{c}\left(\frac{h_i}{h_i{}^{(t-1)}}\right)^{a_{ij}}\leqq\sum_j p_j{}^{(t-1)}\sum_{i=1}^{c}a_{ij}\left(\frac{h_i}{h_i{}^{(t-1)}}\right)$$

である。(ここでは算術平均と幾何平均の関係が用いられている。) 従って

$$\sum_j p_j{}^{(t)}\leqq\sum_{i=1}^{c}\frac{h_i}{h_i{}^{(t-1)}}\sum_j a_{ij}p_j{}^{(t-1)}=\sum_{i=1}^{c}\frac{h_i}{h_i{}^{(t-1)}}h_i{}^{(t-1)}=1$$

となる。また $\sum_j p_j{}^{(t)}\leqq 1$ であるから (3.8) と $\sum_i a_{ij}\leqq 1$ によって，$\sum_i h_i{}^{(t)}\leqq 1$ となる。更にすべての t に対して $p_j{}^{(t)}>0$ であるから $h_i{}^{(t)}>0$ である。従って補助定理1

により

$$K(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}^{(t)})=\sum_{i=1}^{c}h_i\log\frac{h_i}{h_i^{(t)}}\geqq 0$$

となる。さてベクトル $\boldsymbol{q}$ を（3.4）を満す確率として、

$$K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}^{(t+1)})=K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}^{(t)})-\sum_j q_j\log\prod_{i=1}^{c}\left(\frac{h_i}{h_i^{(t)}}\right)^{a_{ij}}$$
$$=K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}^{(t)}-\sum_{i=1}^{c}\log\frac{h_i}{h_i^{(t)}}\sum_j a_{ij}q_j$$
$$=K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}^{(t)})-K(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}^{(t)}).$$

故に

$$K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}^{(t)})-K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}^{(t+1)})=K(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}^{(t)})\geqq 0.$$

従って数列 $\{K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}^{(t)}),t=0,1,2,\cdots\}$ は単調減少である。他方これは補助定理1により下限は0であるから $K(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}^{(t)})\to 0$ となる。また

$$K(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}^{(t)})\geqq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{c}h_i(h_i-h_i^{(t)})^2$$

であるから結局 $h_i\to h$ が得られる。$\boldsymbol{p}^{(t)}$ の極限値 $\boldsymbol{p}$ の一意性も補助定理2によって証明される。

（Ⅲ） 統計的システム論の最大値問題との関係を次に考察する。エントロピー（2.6）, 条件式（2.8）,（2.9）および解（2.10）と（3.9）,（3.2）,（3.1）とを対応させるとまず $m=2$ となり

$$b_{1j}=\bar{z}_j,\ b_{2j}=\bar{v}_j,\ e^{-\beta_1}=\mu_1,\ e^{-\beta_2}=\mu_2$$
$$\nu=e^{-(1+\beta_0)}=1/Z,\ k_1=\bar{z},\ k_2=\bar{v} \qquad (3.10)$$

という関係が得られる。更にこれらを用いて（Ⅰ）の(1)—(6)により u_1、u_2、t、a_{ij}、h_1、h_2 が求められるが、通常 $\sum_i a_{ij}=1$, $\sum_i h_i=1$ となることはないから、$c=3$ となり a_{3j}、h_3 を用いた第3の式が必要となる。

以上により（3.6）～（3.8）の反復尺度法の計算に必要なデータがすべて得られたことになるので、（3.6）により $\boldsymbol{p}^{(t)}$ の初期値 $\boldsymbol{p}^{(0)}=\boldsymbol{w}$ すなわち、所得の限界値の最小値 y_1 と最大値 y_{n1} の間隔を1と正規化したときの各級間隔の値を分布確率の初期値として出発する。反復尺度法を実行して最尤解 $\boldsymbol{p}$ が得られたら、（3.3）により、

$$p_j=w_j\lambda_1^{a_{1j}}\lambda_2^{a_{2j}}\lambda_3^{a_{3j}},\ j=1,2,\cdots,n$$

を用いて、λ_1、λ_2、λ_3 を求める。このとき、p_j は1、2、…n のどれに対しても右の式は成立している筈であるが（実際には若干の誤差はある）、必要なのは3個であるから適当に選ぶ。（例えば p_j の最大値の近辺から3個）これらを仮に p_1、p_2、p_3 とすると

$$a_{11}\log\lambda_1+a_{21}\log\lambda_2+a_{31}\log\lambda_3=\log(p_1/w_1)$$

$$a_{12}\log\lambda_1+a_{22}\log\lambda_2+a_{32}\log\lambda_3=\log(p_2/w_2)$$
$$a_{13}\log\lambda_1+a_{23}\log\lambda_2+a_{33}\log\lambda_3=\log(p_3/w_3) \qquad (3.11)$$

という $\log\lambda_1, \log\lambda_2, \log\lambda_3$ に関する連立方程式を解くことになる。また(I)の(1)および(3.10)より

$$\lambda_1=\nu\mu_1^{1/t},\quad \lambda_2=\nu\mu_2^{1/t},\quad \lambda_3=\nu$$
$$\log\mu_1=-\beta_1,\quad \log\mu_2=-\beta_2$$

であるから結局

$$\beta_1=t(\log\lambda_3-\log\lambda_1),\ \beta_2=t(\log\lambda_3-\log\lambda_2),\ Z=1/\lambda_3 \qquad (3.12)$$

という結果が得られる。ただし、β_1 は $\bar{z}=\bar{y}/w$ 一単位増加当りのエントロピーの増加分であるから $\bar{y}$ 一単位当りについては β_1/w としなければならない。β_2 については $\bar{v}=\log\bar{y}-\log w$ であるから $\bar{v}$、$\bar{u}$ いずれの一単位増加も同じエントロピーの増加となるので、β_1 のような補正は不要である。

四　モデルによる数値計算

これまで述べてきた統計的システム論による所得分布曲線の導出を簡単なモデルによって実行してみることにする。

モデルは階級数 n を10、階級界を0、1、2、……10にとり、これに平均所得 $\bar{y}$、平均厚生 $\bar{u}$ の値を与えてエントロピー最大となる状態、すなわち最尤状態を求め、それの分布確率 p_j、エントロピー s、Theil の不平等度 I、ラグランジュ乗数 β_1、β_2 その他を計算し、各 $\bar{y}$、$\bar{u}$ の組に対する最尤状態の性質を調べることにする。計算結果は、その一部を表1—表4および図2—図5に示してある。ここで $\bar{z}$、$\bar{v}$ は (2.8), (2.9) で用いてあるもので、$\bar{z}=\bar{y}/w=\bar{y}/10$, $\bar{v}=\log(\bar{y}/w)=\log(\bar{y}/10)=\bar{u}-\log 10$ のように級間隔を全体の幅 w で正規化した級間隔のもとでの平均所得、平均厚生である。この変換は単に計算の都合上のものであるから定性的には $\bar{y}$、$\bar{u}$ と同じものである。なお、表3の β_1 では $\bar{z}$ に対するものではなくそれを10で割った $\bar{y}$ に対するものを示してある。また表1—表4のすべてについて、横方向に平均所得 $\bar{z}$、縦方向に平均厚生 $\bar{v}$ をそれぞれ同じ値の組に対して s、I、β_1、β_2 が対応するように書き入れてある。ただし表中の空白部分は、その $\bar{z}$、$\bar{v}$ の組合せは条件式を満足しないことを表わしている。

図　2

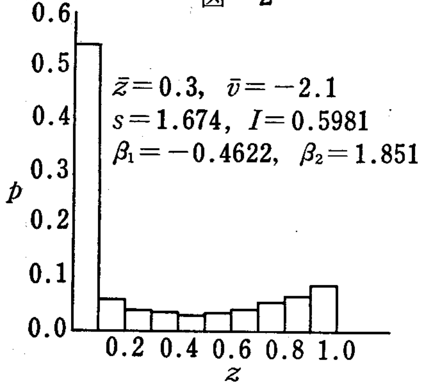


図　4

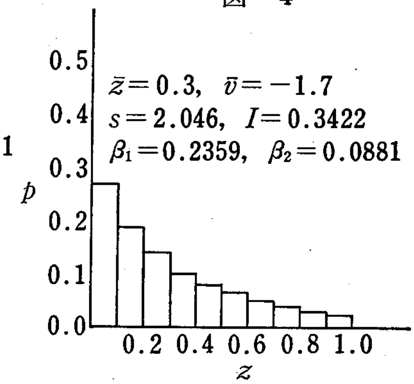


図　3

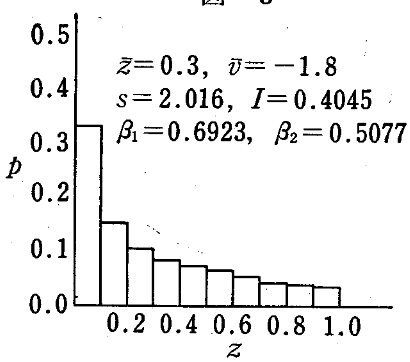
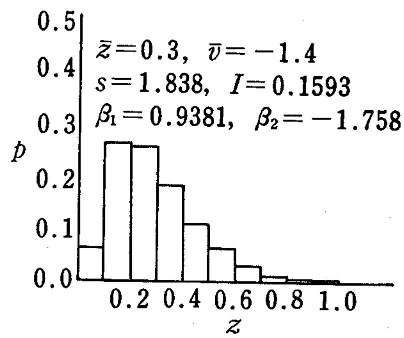


図　5



まず表1を見ると、平均所得を一定にして平均厚生を増加するとき、初めはエントロピーは増加するので、厚生の制約(2.9)を緩めると自然に厚生の増加する方向へ向う。しかし、最大値になると（例えば $\bar{z}=0.3$ では $\bar{v}=-1.7$ の近辺）、今度は厚生を増大するには自然に逆らってある種の力を加えなければならない。同様のことは厚生を一定にして所得を増加する場合も言える。

表2の不平等度を見ると、厚生を増大する方向では恒に不平等度は減少し、所得を増大する方向では増加する。このことは経験的法則と一致し、とくに、経済の成長率の高い

ときは不平等度が増すことはよく知られたところである〔16〕。

表3、表4は $\bar{y}$、$\bar{u}$ に対するラグランジュ乗数で

$$\beta_1 = (\partial s/\partial \bar{y})_{\bar{u}}, \quad \beta_2 = (\partial s/\partial \bar{u})_{\bar{y}}$$

という関係がある（詳細については文献〔6〕参照）。

従ってそれらの正負は、最尤状態から更に $\bar{y}$、$\bar{u}$ を変化

表1 エントロピー s

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{v}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	1.604	1.156	
−2.2	1.662	1.458	
−2.1	1.675	1.674	
−2.0	1.638	1.833	0.9983
−1.9	1.542	1.946	1.427
−1.8	1.369	2.016	1.705
−1.7	1.066	2.046	1.910
−1.6		2.033	2.060
−1.5		1.969	2.164
−1.4		1.838	2.225
−1.3		1.575	2.241
−1.2			2.206
−1.1			2.100
−1.0			1.824

表2 Theil の不平等度 I

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{v}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	0.5298	0.7395	
−2.2	0.4436	0.6669	
−2.1	0.3613	0.5981	
−2.0	0.2836	0.5316	0.6288
−1.9	0.2109	0.4667	0.5671
−1.8	0.1438	0.4045	0.5112
−1.7	0.0815	0.3422	0.4577
−1.6		0.2808	0.4055
−1.5		0.2202	0.3541
−1.4		0.1593	0.3034
−1.3		0.0912	0.2540
−1.2			0.2030
−1.1			0.1493
−1.0			0.0797

表3 $\bar{y}$ に対するラグランジュ乗数 β_1

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{v}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	0.0996	−1.156	
−2.2	0.3145	−0.7201	
−2.1	0.5498	−0.4622	
−2.0	0.8296	−0.2634	−2.092
−1.9	1.193	−0.0897	−1.086
−1.8	1.722	0.6923	−0.7363
−1.7	2.783	0.2359	−0.5067
−1.6		0.4168	−0.3240
−1.5		0.6325	−0.1620
−1.4		0.9381	−0.0634
−1.3		1.758	0.1488
−1.2			0.3363
−1.1			0.6092
−1.0			1.505

表4 $\bar{u}$ に対するラグランジュ乗数 β_2

所得 $\bar{z}$ / 厚生 $\bar{v}$	0.2	0.3	0.4
−2.3	0.8140	3.658	
−2.2	0.3583	2.515	
−2.1	−0.1143	1.851	
−2.0	−0.6459	1.346	6.014
−1.9	−1.303	0.9082	3.300
−1.8	−2.234	0.5077	2.365
−1.7	−4.216	0.0881	1.753
−1.6		−0.3709	1.261
−1.5		−0.9297	0.8181
−1.4		−1.758	0.3815
−1.3		−4.179	−0.0731
−1.2			−0.6513
−1.1			−1.572
−1.0			−5.005

させるとき、その方向が自然な方向か否かの判定に役立つ。

図2―図4には平均所得$\bar{z}$を0.3とし、平均厚生$\bar{v}$を−2.1, −1.8, −1.7, −1.4と変えた場合の最尤状態の所得分布ヒストグラムを示してある。分布の形の移り変わりを見ると大変興味深い。まず第一に所得に比して厚生が極端に低い経済社会システム(図2)では最低所得層が多いのは当然であるが、最高所得層も多くなり中間の階層が少なくなることがわかる。しかもこの状態ではβ_1が負、β_2が正となる。このような分布はPareto以後は見当らないが、それ以前には実際にあったのではないであろうか。

所得を一定にして(現実のシステムでは所得も増大する方向に進むが)厚生を増大させると、図3、図4、図5と分布は次第に近代から現代へと変化してくる。図3がいわゆるPareto分布に対応するし、図4はGibrat'図5はガンマ分布に対応するのであろう。

五　統計値による数値計算

最後に統計値を用いた計算結果を示しておく。用いた資料はH. Theilの著書〔17〕にある、アメリカの白人と非白人家計の調査データから得られた所得分布表である。計算の方式は、階級数、階級界、所得者パーセントから、所得の算術平均$\bar{y}$、幾何平均$\tilde{y}$、平均厚生$\bar{v}=\log(\tilde{y})$を求める。次に全階級幅wで正規化した平均所得$\bar{z}=\bar{y}/w$と平均厚生$\bar{v}=\log(\tilde{y}/w)$を計算する。これを(2.8),(2.9)に用いて最尤解を求める。そこで問題は原データから得られるエントロピーs_0が最尤解から得られるエントロピーsにどれだけ近いか、あるいは遠いかということである。

表5には計算結果をまとめて示してある。[1] 階級数の列からわかるように、これは年次によって異なり、また同時に階級間隔の変更も行われている。これらが違うと計算値の連続性が失われるのが普通であるから、同じ資料でも全年次の経年変化を統一的に得ることは厳密にはできない。しかし結果を長期的に見ると、階級数の変更がそれほど大きな影響を与えているようには見えないようである。なおここでの平均値等の計算はすべてヒストグラムを元にしているので、実数で計算したものとは若干の誤差がある。

表5　アメリカ白人，非白人家計統計

	年	階級数 n	所得（単位ドル） 算術平均 $\bar{y}$	幾何平均 $\tilde{y}$	$\tilde{y}/\bar{y}$	原データ エントロピー s_0	縮約エントロピー	最尤値 エントロピー s	s_0/s	Theil 不平等度 I	ラグランジュ乗数 β_1	β_2
白人家計	1947	13	3760	2829	0.7526	9.055	0.8230	9.092	0.9959	0.2419	10.14	−0.9432
	1948	13	3892	2922	0.7507	9.087	0.8205	9.128	0.9955	0.2370	9.736	−0.9312
	1949	14	3737	2768	0.7406	9.069	0.8428	9.107	0.9958	0.2417	9.593	−0.8336
	1950	14	3978	2935	0.7378	9.125	0.8360	9.171	0.9950	0.2416	8.924	−0.8177
	1951	15	4382	3349	0.7642	9.193	0.8080	9.246	0.9942	0.2175	11.53	−1.034
	1952	16	4682	3542	0.7567	9.260	0.8090	9.320	0.9936	0.2286	12.64	−0.9855
	1954	16	4946	3662	0.7406	9.348	0.8413	9.397	0.9947	0.2330	11.09	−0.8396
	1955	16	5207	3960	0.7605	9.376	0.8178	9.424	0.9949	0.2171	11.43	−0.9971
	1956	16	5657	4322	0.7640	9.447	0.8059	9.503	0.9940	0.2124	10.65	−1.020
	1957	16	5755	4449	0.7730	9.455	0.7973	9.506	0.9947	0.2036	10.96	−1.116
	1958	16	5988	4622	0.7719	9.502	0.8046	9.548	0.9951	0.2075	10.44	−1.095
	1959	17	6375	4908	0.7698	9.571	0.8105	9.615	0.9954	0.2099	9.663	−1.070
	1960	17	6663	5094	0.7645	9.622	0.8181	9.666	0.9955	0.2146	9.032	−1.023
	1961	17	6896	5229	0.7583	9.674	0.8355	9.703	0.9970	0.2261	8.611	−0.9964
	1962	17	7140	5525	0.7738	9.694	0.8206	9.716	0.9977	0.2123	8.942	−1.146
非白人家計	1947	13	2036	1417	0.6959	8.539	0.9198	8.554	0.9982	0.2934	15.52	−0.5938
	1948	13	2122	1463	0.6892	8.582	0.9222	8.600	0.9980	0.2905	14.45	−0.5504
	1949	14	1957	1314	0.6717	8.521	0.9422	8.537	0.9982	0.2985	14.98	−0.4714
	1950	14	2148	1451	0.6757	8.595	0.9232	8.627	0.9963	0.2907	13.60	−0.4717
	1951	15	2352	1618	0.6879	8.687	0.9238	8.705	0.9979	0.2847	16.72	−0.5754
	1952	16	2648	1963	0.7413	8.737	0.8553	8.777	0.9954	0.2426	21.03	−0.8556
	1954	16	2787	1889	0.6779	8.865	0.9321	8.887	0.9975	0.2843	15.76	−0.4724
	1955	16	2903	2055	0.7079	8.885	0.9115	8.900	0.9983	0.2566	17.03	−0.6536
	1956	16	3087	2156	0.6986	8.957	0.9221	8.971	0.9984	0.2671	15.33	−0.5860
	1957	16	3254	2235	0.6869	9.018	0.9301	9.032	0.9985	0.2749	13.99	−0.5278
	1958	16	3354	2310	0.6888	9.051	0.9336	9.060	0.9991	0.2929	13.65	−0.5364
	1957	17	3523	2430	0.6898	9.099	0.9323	9.113	0.9985	0.2870	12.81	−0.5164
	1960	17	3950	2705	0.6849	9.223	0.9417	9.228	0.9995	0.2949	11.31	−0.5028
	1961	17	4091	2809	0.6865	9.249	0.9328	9.265	0.9983	0.3055	10.77	−0.4824
	1962	17	4043	2875	0.7113	9.227	0.9223	9.226	1.000	0.2792	12.26	−0.6652

さて表5において、原データのエントロピー s_0 とその最尤値 s との比 s_0/s を見るといずれの年次も、白人、非白人ともに非常に1に近い。これからわれわれの理論の仮定がかなりよく成り立っているように思われる。

原データのエントロピー s_0 の推移を見ると単調に増大している。s_0は平均所得 $\bar{y}$ の増加によっても増大するので、$\bar{y}$ による部分を、$s_0-\log\bar{y}=$（縮約エントロピー）の形で除いたものを見ると、これはそれ程大きな増加傾向にはない。これはすでにアメリカはかなり構造的に「自由な状態」に近くそれ以上の変革が起り難いのかもしれない。

なお細部を詳しく見ると、縮約エントロピー、不平等度、β_2は大体同じような変動を示しており、β_2が負であることも併せて、アメリカ社会は、図5に示すような社会であり、更に厚生を増加するには自然に逆らった力を必要とする状態にあると言える。表6、表7には、白人、非白人家計の所得分布確率の原データによる実測値と、理論による最尤値を示してある。

表6　1959年　所得分布

	所得階級（単位ドル）	原データ	最尤値
白人家計	1.0—　500.0	0.02100	0.00725
	500.0—1000.0	0.02100	0.02691
	1000.0—1500.0	0.03200	0.04010
	1500.0—2000.0	0.03800	0.04910
	2000.0—2500.0	0.04300	0.05477
	2500.0—3000.0	0.04400	0.05784
	3000.0—3500.0	0.05000	0.05890
	3500.0—4000.0	0.04800	0.05845
	4000.0—4500.0	0.05900	0.05690
	4500.0—5000.0	0.05700	0.05456
	5000.0—6000.0	0.13800	0.10016
	6000.0—7000.0	0.11600	0.08682
	7000.0—8000.0	0.08900	0.07334
	8000.0—10000.0	0.11200	0.10982
	10000.0—15000.0	0.09900	0.12575
	15000.0—25555.0	0.02600	0.03698
	25000.0—30000.0	0.00800	0.00234

表7　1959年　所得分布

	所得階級（単位ドル）	原データ	最尤値
非白人家計	1.0—　500.0	0.06100	0.05923
	500.0—1000.0	0.09000	0.09747
	1000.0—1500.0	0.11600	0.10315
	1500.0—2000.0	0.09500	0.09929
	2000.0—2500.0	0.07700	0.09137
	2500.0—3000.0	0.07600	0.08189
	3000.0—3500.0	0.08100	0.07211
	3500.0—4000.0	0.05500	0.06272
	4000.0—4500.0	0.06000	0.05404
	4500.0—5000.0	0.06200	0.04623
	5000.0—6000.0	0.07400	0.07237
	6000.0—7000.0	0.04900	0.05147
	7000.0—8000.0	0.03800	0.03616
	8000.0—10000.0	0.04300	0.04184
	10000.0—15000.0	0.02100	0.02772
	15000.0—25000.0	0.00200	0.00286
	25000.0—30000.0	0.00100	0.00007

なお以上のデータの外に、日本の所得分布表についても若干の計算を行ったが、こちらは必ずしも快心の結果というわけにはいかなかった。紙面の都合上本論文では割愛したが次回に発表したいと思う。

なお本計算には、情報処理センターの計算機 FACOM M-180 を使用した。いろいろ御援助を戴いた同センターの方々に謝意を呈する。

末尾になりましたが、浅岡博先生の益々の御健勝と御活躍をお祈りいたします。

（1） 文献〔7〕でも一部同様な計算がしてあるが、縮約エントロピーの符号の一は誤りである。また計算法に若干の変更があったので数値も少し違っている。

参考文献

〔1〕 Darroch J. N., D. Ratcliff, "Generalized Iterative Scaling for Log-Linear Models", *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 43, 1972, pp. 1470—1480.

〔2〕 Georgescu-Roegen, N., *Entropy Law and the Economic Process*, Harvard University Press, 1972.

〔3〕 Jaynes, E. T., "Information Theory and Statistical Mechanics", *Phys. Rev.*, Vol. 108, 1975, p. 171.

〔4〕 片岡信二「経済現象における最大原理」、一橋論叢第三二巻第三号、一九五四。

〔5〕 ―――「不確実性と最適化（統計的システム論への一試論）」、経済研究、第24巻、一九七三。

〔6〕 ―――「統計的システム論Ｉ」一橋大学研究年報『自然科学研究17』一九七七。

〔7〕 ―――「統計的システム論II」一橋大学研究年報『自然科学研究19』一九七九。

〔8〕 ―――「統計的システム論III」一橋大学研究年報『自然科学研究20』一九八〇。

〔9〕 Kullback, S., *Information Theory and Statistics*, Wiley, 1959.

〔10〕 国沢清典「エントロピー・モデル」日科技連、一九七五。

〔11〕 Lisman, J. H. C., "Econometrics and Thermodynamics: A Remark on Davis' Theory of Budgets", *Econometrica*, Vol. 17, 1949, pp. 55—62.

〔12〕 Naslund, B., *An Analysis of Economic Size Distribution*, Heidelberg, 1977.

〔13〕 Naslund, B., "Entropy and Income Distribution", *Personal Income Distribution*, ed. W. Krelle, A. F. Shorrocks, North-Holland, 1977, pp. 305—313.

〔14〕 Pikler, A., "Optimum Allocation in Econometrics and Physics", *Weltschaftliches Archiv*, Vol. 66, 1951, pp. 97-132.

〔15〕 Salem, A. B. Z., T. D. Mount, "A Convenient Descriptive Model of Income Distribution: The Gamma Density," *Econometrica*, Vol. 42, 1974, pp. 1115—1127.
〔16〕 高橋長太郎「所得分布の変動様式」岩波書店、一九五五。
〔17〕 Theil, H., *Economics and Information Theory*, North-Holland, 1967.
〔18〕 Tribus, M., R. D. Levine, *The Maximum Entropy Formalism*, The MIT Press, 1979.

(一橋大学教授)