数学小史

松坂和夫

「学問への招待」という名の特集号に一文を書くことをお引き受けしたのは、だいぶ前のことであるが、雑務に忙殺されているうちに、師走も二十日を過ぎてしまい、年末の慌しい時期にこの原稿を書かざるを得ない羽目となってしまった。いろいろ考えてみたけれども、そもそも「学問への招待」など、私にできることではない。といって、もはや猶予もできないので、やむを得ず、以下に数学の歴史のようなものを、少し書いてみることにする。もしかしたら、その中から数学という学問の性格が多少は浮かんでくる、ということがあるかもしれないからである。

もっとも数学は三千年以上の歴史をもつ学問であるから、その歴史を四十枚に書くことなど、もともとできるわけもない。したがって以下に書くことは、その歴史のごく一部分を、きわめて恣意的に選択したものであることをお断りしておきたい。それに数学史ばかりを書くつもりもないから、話が転々と移って行くことも予想される。その点の御諒解もあらかじめ願っておきたい。

数学の誕生

数学がいつ、どこで、はじめられたか。この問に解答を与えるのは、容易なことではない。古代数学の発展史について、われわれはまだ、一部分の不完全な知識しか持っていないからである。また、数学という言葉の意味のとり方によって、右の問に対する答え方も違ってこよう。しかし、数学を、いわゆる純粋数学の意味にとるな

らば、それは紀元前四、五世紀ごろ古代ギリシアの地において誕生した、というのが、今日の定説である。

ギリシア以前、エジプトやメソポタミアでも、いろいろな興味ある数学的知識が得られていた。たとえば、エジプトでは、測量術が進み、土木事業のための面積や体積の計算法が知られていた。またメソポタミアの数学は、エジプトよりもっと進んでいて、長期にわたる高度の天文記録をもち、今日でいえば初等代数の部類に入れられるようなことがらも取り扱われていた。

しかしエジプトの数学は実用計算の段階のものであったし、メソポタミアのそれには単なる実用数学の域を超える部分もあったが、理論的・体系的に数学を発展させようとしたものではなかったように思われる。理論的数学の建設は、われわれは、ギリシア人に負うのである。

ギリシアの数学は、エジプトやメソポタミアの影響を受けて、タレス（前六二四？―五四六？）、ピタゴラス（前五七二？―四九二？）に始まり、プラトンのアカデメイアの人たちの哲学的思索によって磨きをかけられ、しだいに独特な深化を遂げて行った。そして、遅くとも紀元前四世紀の半ばには、確かに、ギリシアの地に、論証的に構築された理論的数学が創造されていた。実用を超えた純粋な学としての数学の誕生は、人類の文化史上、最大の事件の一つであったのである。

このギリシア数学の成果を、今日もっとも明瞭な形でとどめているのは、紀元前三世紀に書かれたユークリッド（ギリシア語ではエウクレイデス）の『原論』である。これは、ギリシア数学の精髄を集大成し、「証明の積み重ねによって一つの学問を体系的に構成しよう」としたもので、古代数学の比類なきモニュメントである。この書物は、以来、人間の論証的理性のあかしとして尊ばれ、厳密な学問的著作の典型として重んぜられてきた。以下に、その内容とスタイルとを少し紹介してみよう。

ユークリッドの『原論』

『原論』は全部で十三巻から成り、各巻のだいたいの内容を述べれば、第1巻は三角形、平行線、平行四辺形、第2巻は面積、第3巻は円、第4巻は円と多角形の内接・外接、第5巻は比例論、第6巻は比例論の幾何学への応用、第7、8、9巻は数論、第10巻は無理量論、第11巻は立体図形、第12巻は求積法、第13巻は正多面体、

である。このように『原論』には幾何学的な部分が多い。そのため日本では、従来『幾何学原論』、『幾何学原本』などともよばれてきた。

第1巻には、二十三個の定義、五個の公準、九個の公理、および四十八個の命題がある。まず開巻冒頭に、

1．点とは部分のないものである。

2．線とは幅のない長さである。

4．直線とはその上の点について一様に横たわる線である。

15．円とは一つの線で囲まれた平面図形で、その内部にある一点からそれへひかれたすべての線分が互いに等しいものである。

16．この点は円の中心とよばれる。

23．平行線とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、どの方向においても交わらない二直線である。

のような二十三個の「定義」があり、続いて

1．任意の点から任意の点へ直線をひくことができる。

2．有限直線を連続して一直線に延長することができる。

3．任意の点と距離（半径）とをもって円をえがくことができる。

4．直角はすべて相等しい。

5．一直線が二直線と交わり、同じ側の内角の和が二直角より小さいならば、この二直線は限りなく延長されると、二直角より小さい角のある側において交わる。

という五個の「公準」、および

1．同じものに等しいものは互いに等しい。

2．等しいものに等しいものが加えられれば、全体は等しい。

5．同じものの二倍は互いに等しい。

8．全体は部分より大きい。

のような九個の「公理」がある。

公準（要請）と公理（共通概念）の語義については、数学史家のいろいろくわしい研究があるが、どちらも「論証の基礎として証明なしに承認される命題」であることには変わりがない。『原論』では、公準には幾何学的色彩が濃く、公理はより普遍的な対象について語っているようにみられるが、後世、このような区別はなくな

って、論証の基礎として要請される命題は一律に公理とよばれるようになった。なお『原論』における「定義」は、今日の意味のものとは少し違っていて、基礎におかれた前提あるいは仮定という意味合いのものである、というような指摘も数学史家によってなされている。

さて、以上の定義、公準、公理のあとに、『原論』第1巻では、四十八個の命題が「証明」されている。命題47と48は、有名なピタゴラスの定理とその逆である。

第2巻から先も、まず定義が述べられ、そのあとに命題が証明されるというスタイルは、本質的に何も変わらない。ただし定義がなく、命題だけの巻もある。また公準や公理は第1巻にまとめられているので、第2巻以後には現れない。最後の第13巻の最後の命題18に掲げられているのは、正多面体は正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の五つに限られる、という定理である。

このように『原論』は、今日の専門的数学書の書き方としても規範的な、定義・公理・命題という厳密な証明のシステムによって書かれている。要するに、はじめに定義と、証明なしに承認される若干の命題（公準・公理）とがあって、すべての命題がそこからつぎつぎに証明され、一つの壮大な論理的体系を作っているのである。『原論』が、後世、厳密な学問の典範として仰がれたのも、そのためであった。

ちなみにいえば、『原論』の原語ストイケイア(Στοιχεία)にはもともとアルファベット（字母）という意味がある。プロクロス（五世紀）の注釈によれば、すべての単語や言葉がアルファベットから組立てられるように、すべての幾何学的命題はある種の原理的命題を基礎として、そこから証明される。それゆえに、それら（の基本的命題）がストイケイアとよばれるのである。

ユークリッドへの賛辞

『原論』は聖書についで多く読まれたと云われる。ヨーロッパでは『原論』は人間の論理性の錬磨の書であった。ヨーロッパの学校では長らく幾何学は必須の課目であったし、たとえばイギリスでは比較的最近までユークリッドがそのまま教えられていた、と云われている。私たちが戦前に旧制中学校で教えられた幾何学も、多少ともユークリッドの伝統に従ったものであった。

これほど広く読まれた書物であるから、それに対する数学者や数学史家の研究・注釈はきわめて多い。また専門家以外でも、多くの人が、折にふれ、ユークリッドについて語っている。それらのうちから、『原論』(あるいはギリシアの幾何学)に対して向けられた一つのすばらしい賛辞を紹介しておきたい。それはフランスの文学者ヴァレリーが、『ヴァリエテ』の「ノート」の中に書いている文章で、一九二二年、彼がチューリッヒ大学において講演したものの抜粋である。

　ヴァレリーは、二十年間も詩作を断って高等数学の研鑽に赴いたという話が伝えられている文学者であるが、この講演の中で、ヨーロッパ文化の特質は何か、人間精神の特質とは何であるか、ということを問いかけている。それに対する彼自身の答の中にギリシアの幾何学について語る部分があるのである。その部分を、彌永昌吉先生の麗訳を拝借させていただいて、少し抜き書きしてみよう。

　「われわれがギリシアに負うものが、われわれを、最も深い意味において他の民族から区別するものである。われわれがギリシアに負うのは精神のしつけ(discipline de l'Esprit)である。……このしつけから科学が生まれた。……いかにもギリシア以前にも科学のようなものはあったかもしれない。……しかし、それらは不純な科学であって、科学とはほとんど縁のないいとなみともいっしょになった職業上の技術と混合したものであった。……科学ができるためには、まず比較的完全なそのモデルが作られ、理想として与えられることが必要であった。……ギリシアの幾何学は、そのようなモデルとして不滅不朽のものであった。それは完全さを目ざすすべての知識のモデルとなったのみならず、ヨーロッパ的知性の最も典型的な特質の、たぐいなきモデルとなった。……これを建設した人は、勤勉な、鋭い洞察力をもつ労作をし、かつ深い思索を事とする人でありながら、他方繊細な、完成(パーフェクション)に対して精妙な感覚をもつ芸術家でもあった。……」

　私がこの文章に始めて接したのは、多分やはり大学一、二年の頃のことであるが、何かしら、感銘を受けた。それは私が若かったせいかもしれないが、ヴァレリーのこの文、ことに精神のしつけ(あるいは精神の紀律)という言葉は、以来私の心に残っているのである。

ユークリッドへの批判

前項に紹介したヴァレリーの文章はたいへん美しいものであるけれども、ごく散文的に評するならば、いささか「文学的誇張」があるといわなければならない。というのは、『原論』は確かに、実に緻密に構成された作品ではあるが、論理的に全く欠陥がないというわけではないからである。

たとえば、第1巻の「点とは部分のないものである」、「線とは幅のない長さである」というような定義は、論理的にはどの証明にも用いられていない。一方、定義にも公準・公理にも書かれていないことで、無断で証明のうちに用いられていることもある。たとえば、第1巻の命題1「与えられた有限な直線（線分）の上に等辺三角形を作れ」という作図題の証明では、与えられた線分をABとし、AおよびBを中心としてそれぞれ半径ABの二つの円をえがき、それら二円の交点をCとすれば、三角形ABCが求めるものである、というように論じている。しかし、右にいった二円が交わるということは、（直観的には明らかなことであるけれども）、『原論』の公準や公理からは保証はされないのである。

いかに論理的に厳密であるとはいえ、ギリシア人の幾何学は、われわれの住む現象世界に強く密着したものであった。したがって、上記のような「見落し」が生じたのも、やむを得ないことであったといえよう。むしろわれわれは、全体としてユークリッドが驚くべく厳密で、「直観的に自明」というような妥協をきびしく排除していることに感嘆すべきであろう。

しかし皮肉なことには、その論証的な態度が、ギリシア数学の他の面での発展を阻害する要因にもなったように思われる。実際ギリシアでは代数学はあまり発展しなかった。ギリシア人は早期に無理量（無理数）を発見し、それにまつわる論理的な困難に気づいていたが、それがかえって、メソポタミアなどで開発されていた数値計算の技術を、ギリシアで発展させることを妨げたようにみえる。中世のころまで、代数学発展の主役を荷ったのは、インドとアラビアであった。

時代は飛ぶが、中世の長い眠りから醒めて、ヨーロッパにギリシア幾何学が徐々に蘇ったのはルネッサンス期である。十七世紀のはじめには、それはほぼ完全に復興

していた。デカルトの『方法叙説』の中の「四綱領」、パスカルの『幾何学的精神』の中の「定義・公理・論証に対する八つの規則」には、明瞭にギリシア幾何学への復帰がみられる。また同じころまでに、ヴィエトらの努力によってインド、アラビアの代数学は記号化され、記号代数の原理と手法が確立されていた。

しかしデカルトは幾何学にも代数学にも不満を抱き、『方法叙説』の中で、「古代人の幾何学や現代人の代数学についていえば、いずれも非常に抽象的で、何の役にも立たないように見えるばかりでなく、前者はただ図形の考察にのみ限られるために、想像力をひどく疲れさせることなしには理解力を働かせることができない。また後者においても……人はこれを精神を陶冶する学問とはせず、……混雑してわかりにくい技術としてしまった。」(落合太郎氏訳)と述べている。この手きびしい文章の故に、デカルトはユークリッドの批判者とみられている。しかし『方法叙説』の中の前後の文章をよく読むと、必ずしもそうでもない。デカルトの批判はいわば「建設的批判」であって、デカルトは、彼を祖とする解析幾何学の理念、すなわち幾何学を一般的に取り扱うために代数学の手法を応用しようとする思想を正当づけることを目的として、右のような文章を書いたものと考えられる。

そのほか、たとえば現代におけるディユドネのように、数学教育改革の立場からのユークリッド批判は、これまでたびたびなされてきた。しかしこれは、純然たる学問的批判とは少し違う次元のものと解すべきであろう。

『原論』の中の数論

すでに述べたように、『原論』は幾何学的な部分が多いのであるが、それだけでなく、数や量の理論をも含むのである。第7、8、9巻は「(整)数論」で、主として整数に関することが扱われている。また第5巻と第10巻では、量の理論(今日の言葉でいえば「実数論」)を扱っている。ここでは第7、8、9巻の中から二、三の話題を取り上げてみよう。

第7巻には、冒頭に

1. 単位とは、存在するおのおののものがそれによって1とよばれるものである。
2. 数とは単位から成る多である。
3. 小さい数が大きい数を割り切るとき、小さい数は

大きい数の約数である。

5．右のとき、大きい数は小さい数の倍数である。

12．素数とは単位だけでしか割り切れない数である。

14．合成数とは何らかの数によって割り切られる数である。

23．完全数とは自分自身の約数の和に等しい数である。

というような総計二十三個の定義があり、続いて三十九個の命題がある。定義1、2はわかりにくいが、要するに単位とは1であり、多くの単位から成る2、3、4、…が（整）数である、ということである。

命題2では、二数の最大公約数をみいだす算法、いわゆる「ユークリッドの互除法」が述べられる。これは各種のアルゴリズム（それに従って行けば必ず答を求めることができるような計算の手順）のうち、最も古典的な例として有名である。

命題30は、「二数a、bの積が素数pで割り切れるならば、aまたはbがpで割り切れる」という定理、また命題31は、「任意の合成数は何らかの素数で割り切られる」という定理である。くわしく説く余裕はないが、これらの命題を用いれば、そこから算術の基本定理が容易に導かれる。それは、「いかなる数も素数の積としてただ一通りに分解される（たとえば234は$234=2\times3\times3\times13$と表され、これ以外に素因数分解の方法はない）」という定理である。基本定理自身は『原論』には出ていないのであるが、上述のような事情から、実質的には『原論』は基本定理を含んでいると考えることができる。

第8巻と第9巻の前半では主として等比数列に関することがらが扱われている。第9巻の後半の冒頭に出てくる命題20は、「素数は無限に存在する」という有名な定理（しばしばユークリッドの素数定理とよばれる）である。すなわち、素数の列

(A)　$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots\ldots$

は無限に続く、というのである。『原論』に出ていることの定理の証明は非常に巧妙なものなので、次にそれを紹介しておく。ただし次に掲げるのは、『原論』の証明の趣意だけを生かして、現代風に書き直したものである。

かりに数列(A)に終りがあるとして、最大の素数をPとすれば、

$$2, 3, 5, \ldots\ldots, P$$

は完結した素数列である。ここで

$$Q=(2\times3\times5\times\cdots\cdots\times P)+1$$

という数を考える。QはPよりも大きいから、素数ではない。したがってQは、ある素数によって、すなわち2、3、5、……、Pのいずれかによって割り切れなければならない（第7巻、命題31）。ところが、Qは2、3、5、……、Pのどれで割っても、1だけ余ってしまう。これは矛盾であるから、数列(A)に終りがあるという仮定は誤りである。すなわち、素数の列は無限である。

今世紀前半のイギリスの代表的な数学者であったハーディは、そのエッセイ『一数学者の弁明』（一九四〇年）の中で、美しい定理と証明の例として、右に述べた定理と証明を挙げている。彼はそのエッセイにおいて、「きわめて簡単で、特別な数学の知識をもたない読者にも理解され得るような、しかも本物の数学の定理と証明」を例示しようとすれば、ギリシアの数学にもどるしかない、といって、右の例と、もう一つの例を挙げているのである。彼は云う。「これらは内容・表現とも単純な定理である。しかし、疑いもなく最高級の定理であり、二千年の歳月を経た今もなお新鮮である。しかも、定理の記述と証明はともに、数学的素養がいかに乏しくても、知的な読者であれば、一時間もかからずに完全に理解できるものである。」（柳生孝昭氏訳）

なおハーディがもう一つの例として挙げているのは、ピタゴラスによる$\sqrt{2}$が無理数であることの証明である。（この証明は御存知の諸君も多いであろう。）『原論』では、この定理は、第10巻の命題9に、もっと一般化された形で述べられている。

第9巻の最終命題36は完全数に関するものである。それについては次項で述べよう。

完全数、メルセンヌ数

第7巻の定義23のように、整数aが完全数であるというのは、aがその約数の総和に等しいことである。ただし、aの約数のうちに1は含めるが、a自身は含めないものとする。古代人がどうしてこういう数に興味をもったのかは明らかでないが、何か神秘的な感じを抱いていたのであろう。たとえば、

$$6=1+2+3,\quad 28=1+2+4+7+14$$

であるから、6や28は完全数である。『原論』第9巻の最終命題36は、一般にnが1より大きい整数で、2^n-1

が素数ならば、

(B)　$2^{n-1}(2^n-1)$

は完全数である、というものである。（6や28は(B)においてnがそれぞれ2、3であるときにあたる。）この定理の証明は、等比数列の和の公式を知っている人には、さしてむずかしくない。諸君も一つ挑戦してみられるとよい。なお『原論』では、等比数列の和の公式に相当することは、この最終命題の一つ前の命題35に出ている。

ずっと後（十八世紀）になって、オイラーが、逆に偶数の完全数は必ず(B)の形をしている（ただし 2^n-1 は素数）ことを証明した。

したがって、すべての偶数の完全数を知るためには、2^n-1 という形の素数をすべて調べればよいことになる。少し脇道にそれるが、これについては現代につながる歴史的におもしろい話があるので、以下に述べておこう。

すぐ証明されるように、2^n-1 が素数であるためにはn自身が素数であることが必要である。しかしそれは十分条件ではない。nが素数であるとき、$M_n=2^n-1$ を「メルセンヌ数」という。nが2、3、5、7のときはM_nは素数であるが、nが11のときは

$$M_{11}=2^{11}-1=2047=23\times89$$

となって素数ではない。メルセンヌは一六四四年に、257以下の素数nについてM_nが素数となる場合を調べて発表したが、彼の述べた結果には誤りがあった。オイラーの時代までに、M_nのうち素数であることが確認されたのは、$n=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ の八個の場合だけであった。一八七〇年代以後、ルカスはM_nの特別な性質を利用して、それが素数であるための判定条件を発見し、それによって $n=61, 89, 107, 127$ の四個の新しいメルセンヌ素数（M_nのうち素数であるもの）がみいだされた。

M_{127} は

170141183460469231731687303715884105727

という数で、これが長らく「具体的な形で知られた最大の素数」であった。

それ以後の発見は、今世紀の後半に入って、電子計算機による探索の結果得られたものである。次にM_nが素数となるnの値とその発見の年とを挙げる。$n=521, 607, 1279, 2203, 2281$（一九五二年）、3217（一九五七年）、4253, 4423（一九六一年）、9689, 9941, 11213（一九六二年）、19937（一九七一年）。（この年表は一松信氏、『数

のエッセイ』によった。)

結局、現在までにメルセンヌ素数は24個知られていることになる。(その後新しい発見があったかどうかは筆者は知らない。) 二十四番目の $n=19937$ に対するメルセンヌ素数は実に6002桁の数である。(先の M_{127} は三十九桁に過ぎない。)

なお上記のような発見は、電子計算機の著しい進歩によるものであることはいうまでもないが、先にいったルカスの判定法のような数論自身の理論的な発展が、その背景において大きい役割を果たしているのである。

メルセンヌ素数が、したがってまた偶数の完全数が、無限に存在するかどうかはまだわかっていない。また奇数の完全数は、現在までに一つも知られていない。しかし奇数の完全数が存在しない、という証明もまだないのである。

フェルマ数

メルセンヌ数と形が似ているので、ついでながらフェルマ数について述べておく。

メルセンヌ数は 2^n-1 という形の素数に関して考えられたが、2^n+1 という形の素数はどうなるであろうか。この形の数が素数となるためには n が2の累乗でなければならないことはすぐにわかるので、あらためて

(C) $F_n=2^{2^n}+1 \quad (n=0, 1, 2, \ldots\ldots)$

とおき、この形の数を「フェルマ数」という。

フェルマはデカルトと同時代(十七世紀前半)の人で、法律学を修め、地方議会議員として生涯を送ったが、余暇に数学を研究し、近代整数論の端緒をひらいた人である。彼は(C)の形の数がすべて素数であると予想した。しかしこれは間違いであって、n が0、1、2、3、4のときは確かに素数となるけれども、F_5 は

$$F_5=2^{32}+1=641\times6700417$$

となって、素数ではない。この素因数分解はすでにオイラーが一七三二年に発見した。F_6 も合成数で、

$$F_6=274177\times67280421310721$$

と分解される。これを発見したのはランドリーという人で(一八八〇年)、当時八十二歳であった。

$$F_7=59649589127417217\times5704689200685129054721$$

という分解は、一九七〇年に電子計算機を使ってみいだされた。もちろん計算機だけの力ではなく、数学上のあ

らゆる技法を駆使して、やっとこの分解が発見されたのである。F_8も合成数であることはわかっているが、その素因数はまだ発見されていない。このようにフェルマの予想に反し、現在のところフェルマ素数（F_nのうち素数であるもの）は、$F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$ の五個以外には一つもみつかっていない。そこで今日では、反対に、「フェルマ素数は有限個しかない」という予想が立てられている。

ところでフェルマ素数のようなものに関心がもたれる理由は、それが正多角形の作図問題と関係しているからである。すなわち、pが素数のとき、定木とコンパスによって正p角形が作図できるのは、pがフェルマ素数であるとき、またそのときに限るのである。したがって、たとえば正三、五、十七角形は作図できるが、正七、十一、十三角形は作図できない。一般に正N角形が作図できるためには、Nの素因数分解が、$N=2^e p_1\cdots p_k$（$e\geqq 0$, $p_1,\cdots,p_k$ は相異なるフェルマ素数）の形となることが必要かつ十分である。この結果は、十九世紀前半の最大の数学者ガウスによって与えられた。ガウスは一七九六年、十八歳のときに、正十七角形の作図法を発見したが、その発見が彼をして数学の道に進ませる機縁となったと伝えられている。

フェルマの問題、作図問題

前項のフェルマ数に関する予想は間違っていたが、フェルマはもう一つ、今日なお未解決な、有名な予想を残している。それは「nが3以上の整数ならば $x^n+y^n=z^n$ を満たす正の整数x、y、zは存在しない」という予想で、通常フェルマの問題またはフェルマの大定理とよばれている。フェルマはディオファントス（三世紀頃の数学者）の数論の書物のラテン訳を刊行したが、その手控本にこの命題を記し、「驚嘆すべき証明を発見したが、この本の欄外には証明を書く余白がない」という有名な一句を書き残した。その後多くの数学者の努力にも拘らず、誰もその証明の再発見に成功していないから、この命題は実は今も予想であって定理ではない。（これも数論のあらゆる技法と電子計算機によって、現在三万以下のnについては予想の正しいことが確かめられている。しかし一般のnについてはまだ証明されていないのである。）この命題自身にはさしたる意味は認められないが、

この問題を解こうとする努力から、数論の大きな進歩が促され、幾多の貴重な副産物が得られたことは、歴史上の一つの大きな事実として特記に価することであろう。

これまでいくつか例示してきたように、数論には、誰にでもわかる問題で未解決なものがたくさんある。数学の他の分野ではこのような問題の例を挙げることはむずかしい。

なおこれは未解決の問題というわけではないが、前項で正多角形の作図問題に触れたので、ついでにギリシア以来の有名な三大作図不能問題を述べておく。それらは、(1)与えられた角(一般角)を三等分すること、(2)与えられた立方体の二倍の体積をもつ立方体を作ること、(3)与えられた円に等しい面積をもつ正方形を作ること、である。これらはいずれも、定木とコンパスによっては作図不可能である。(1)、(2)の不可能性はいわゆる「ガロアの理論」の一環として証明される。また(3)の不可能性は、円周率πが超越数であることの証明(リンデマン、一八八二年)とともに自動的に得られたのである。

微積分小史

私は少し、古代の数学、特に『原論』にとどまり過ぎ、また二三の特殊な話題に立ち入り過ぎたかもしれない。近代以後の数学について多少ともまともな解説をするためには、残された紙数は全く不十分である。したがって以下の話は、きわめて概括的なものにならざるを得ないが、お許しを願いたい。

十七世紀の後半、ニュートンとライプニッツによって微積分法が創始されたことは、何と云っても近代数学史上最大の事件である。微分法は曲線に接線を引く問題から、積分法は図形の面積や体積を求める問題から、それぞれ発生した。接線の問題はパスカル、フェルマも扱っており、求積法は古くアルキメデス(前二八七?―二一二)が「取尽しの法」として研究していたが、ニュートンやライプニッツは、それらを一般的かつ統一的な体系にまで高め、さらに微分法と積分法との間に介在する鮮明な関係を発見して、新しい学問の基礎を樹立したのである。この関係は今日「微分積分学の基本定理」とよばれている。

ニュートンはこの新しい数学の手法によって、ケプラーの惑星運動の法則を解明し、ガリレイの運動論などを

も統合してニュートン力学の体系を建設した。その成果は、彼の主著『自然哲学の数学的原理』（通常冒頭の一語をとって『プリンキピア』と略称される）に収められている。これは『原論』を模した形式で書かれており、次代の科学者にきわめて大きい影響を与えた。一方ライプニッツは、微積分法について優れた記号法を導入し、以後の発展の礎を築いた。今日われわれが用いている微積分に関する記号の基礎的部分はライプニッツに負うのである。彼は、神学、哲学、数学、自然科学、歴史等、万般の学問に創造的寄与をした天才であって、万学を統一する普遍学、普遍記号学の建設という、壮大な夢をも抱いていた。

しかしニュートンにせよライプニッツにせよ、微分積分学の論理的基礎まで確立していたわけではなかった。たとえば「極限」という基本概念にしても、その把握のしかたは直観的で、はなはだ不完全なものであった。そうした欠陥は同時代の人からも批判の対象とされていたが、十七世紀から十八世紀にかけては、その批判は大きな高まりとはならなかった。この新しい学問は自然科学的現象の説明にはよく適していたし、その有用性は当初から隠れもないものであったからである。こうして十八世紀には、微積分法は数学・自然科学の各方面で縦横に用いられ、きわめて豊富な、輝かしい成果が獲得されていった。この時期、人々はギリシア数学の「論理的厳密性」の桎梏から逃れていたようにみえる。人々は微積分法の、計算技術としての力にいわば盲目的な信頼を寄せていた。たとえばオイラーは、関数の無限級数展開を利用して多くの重要な公式を得ていたが、級数の収束・発散という原理的な問題には無関心であった。

けれども基礎に対する反省の機運も徐々に醸成されていった。新しい前進をかちとるためには、立脚する基盤をもっと安全・強固なものにしておかなければならない、という認識が人々の間にひろまってきたのである。かくて十九世紀前半に数学はふたたび転回し、無批判的な進歩への信仰から、精密性・厳密性という古典的理想の道へ復帰することになった。この時期の数学者コーシーは、解析の合理化について深く考察し、『解析教程』（一八二一年）などの著述において、微分積分学を厳密な基礎の上にうち立てることを試みている。この試みは完全には成功しなかったけれども、ニュートン、ライプニッツ、

あるいはオイラーからは、はるかに進歩していた。極限や連続、級数の収束・発散などの概念の明確化はコーシーに負うのである。

解析の合理化への指向は、十九世紀の後半に頂点に達した。微分積分学を強固な基礎の上に築くためには、それが展開される基本領域であるところの「実数」の概念をまず明確にしなければならない。十九世紀中葉を過ぎる頃、数学の基礎に関心をもつ数学者達は、ひとしくそのことを感ずるようになった。たとえば、カントル(一八四五—一九一八)は、フーリエ級数の特異点に関する研究から、この問題に近づいて行った。このようにして、「実数とは何か」、「実数を正確にはどのようにして定義するか」という、きわめて根本的な問題が、この時期に正面から取り上げられることとなったのである。

この問題に対する答を与え、実数論の構成に成功したのは、前記のカントルのほか、デデキント、ワイエルシュトラスなどである。デデキントは『連続性と無理数』(一八七二年)と題する論文において、「実数の連続性」の意味を明らかにし、実数の体系を「有理数の切断」によって構成した。われわれの直観にある直線が連続したものであり、実数の幾何学的表象が直線であるならば、実数も連続したものでなければならない。デデキントは長い思索の末、「連続性」の数学的な定式化に成功し、さらにその性質をもつ体系を有理数という既知の体系から論理的に構成することに成功したのである。ここで注目すべきは、デデキントの思想の根本をなす部分がすでに『原論』第5巻にみられるという事実である。『原論』第5巻(およびそれに続く第10巻)が今日の数学史家によってきわめて重要視されるのはそのためである。

カントルはデデキントとは違った手法によって(本質的には同値な)実数論を構成したが、彼はまた「集合論」の創始者として有名である。彼は実数の各種の集合について深く考え、それが動機となって集合の一般概念を導入し、集合論を創造した。一八七〇年代から九〇年代にかけての、カントルによる集合論の創造は数学史上の革命的事件であって、その後の数学、特にその記述の様式を一変させることになったのであった。

ヒルベルトの公理主義

十九世紀の数学にはもう一つ大きい事件があった。そ

れは非ユークリッド幾何学の誕生であるが、その源泉もやはり『原論』にまでさかのぼるのである。

『原論』の五つの公準のうち、第5公準は「平面上で、直線外の一点を通って、この直線に平行な直線がただ一つ存在する」という、いわゆるユークリッドの平行線公理と(本質的に)同値である。この公準は、表現・内容ともに複雑で「自明性」に乏しかったため、古くから人人は、これが他の公準・公理から証明され得るのではないかと考え、多くの人がその証明を試みてきた。特に十八世紀初期のサッケリの研究は名高い。しかし二千年にわたる人々の努力も結局徒労に終った。ヒルベルトが最終的に示したように、この平行線公理は、実はユークリッド幾何学の他の公理から独立であったのである。

十九世紀のはじめにロバチェフスキが、中頃にはリーマンが、平行線公理を否定し、それに代わる公理を設けて、それぞれ新しい幾何学を建設した。ロバチェフスキの幾何学では、平行線公理に対応する命題は「平面上で、直線外の一点を通って、この直線と交わらない直線が少なくとも二つ存在する」となり、リーマンの幾何学では「平面上で、直線外の一点を通って、この直線に交わらない直線は存在しない」となる。十九世紀末から二十世紀にかけて、ケーレー、クライン、ポアンカレらは、もしユークリッドの幾何学に矛盾が含まれていないならば、これらの新しい幾何学、すなわち非ユークリッド幾何学も矛盾を含まないことを証明し、ユークリッド幾何学も非ユークリッド幾何学も論理体系としては等価値であることを示した。

このような長い歴史の経緯の間に、特に非ユークリッド幾何学の発見を境として、人々の「公理」に対する考え方には大きな変化が生じた。ユークリッドはもちろん、パスカルの『幾何学的精神』においても、公理というのは「自明な真理」、「完全に明証的なことがら」であった。しかし非ユークリッド幾何学の誕生をみて、人々はそのような考え方に疑問をもつようになったのである。

このことに関してはじめて明快な見解を示したのはヒルベルト(一八六二—一九四三)であった。彼の思想を要約すれば次のようになる。数学の公理は「自明な真理」である必要はなく、単に理論構成のための「仮定」に過ぎない。それは矛盾を含んでいさえしなければよい。またたとえば幾何学で、点とか直線とかの定義を与える

必要もない。それらは「無定義概念」であって、ただそれらの間の関係を規定する、たとえば、二点があればそれらを通る直線がただ一つ存在する（ここで通るという言葉もまた一つの無定義概念である）、というような公理を満足するものであればよい。要するに、数学とは、いくつかの無定義概念と、それに対するいくつかの規約（公理）とから、形式的推論に従って展開される形式的・抽象的な理論であるというのである。ヒルベルトのこの考え方は「公理主義」とよばれる。彼の『幾何学基礎論』（一八九九年初版）は、この立場に立ってユークリッド幾何学の完全な公理系の提示とその厳密な論理的検討を試みた歴史的著作である。

ヒルベルトの考え方によれば、数学は、現象世界に対応する科学的真理を追求するものではない。この意味で、彼は数学を、完全に「自然科学」から開放した。またたとえばギリシア数学の点や直線の定義にみられるような、「哲学」からも開放したのである。

ヒルベルトの考え方は一見形式的に過ぎるようにみえるけれども、実は数学の歴史に対する深い洞察にもとづいており、数学の本質をよく自覚したものであった。ヒルベルト以後の数学は基本的には、この公理主義によっていると云ってよい。それは確かに形式的・抽象的ではあるが、その代わりに自由で何物にもとらわれない創造性をもち、またその普遍性の故に広い応用の可能性をも有している。そのことは二十世紀における数学のめざましい発展と、諸科学への応用の著しい成果とが、雄弁に物語っているといえよう。

終りに

すでに紙数が尽きたので、今世紀の数学については語ることができない。先にも触れたが、今世紀始めに数学はカントルの集合論とヒルベルトの公理主義から大きい影響を受けた。（もう一つ、十九世紀末の集合論の逆理の発見をきっかけとして起こった、何度目かの、そしておそらく最も深刻な「数学の基礎への反省」という大きな体験も特記すべきであろう。）ごく大ざっぱに云えば、二十世紀の数学はこれらの影響のもとに再編成され、新しい装いのもとに、また幾多の新しい分野をも加えて、めざましく発展してきたのである。

最後に一二つけ加えておきたい。一つは、数学は確か

に抽象性の強い学問であるが、けっして形式論理だけの学問ではない、ということである。単に無矛盾であるだけのつまらない公理系からは何も生まれない。数学に生命を与えるのは、やはり具体的な、生きた数学的素材である。その素材の多くは伝統的な問題から来るが、新しい問題からも来る。また数学の内部からも来るし、外部からも来る。公理主義による整備は、いわば、一応でき上がった部分の理論に対して、数学者が着せる「衣」のようなものにしか過ぎない、とも云えよう。ヴェイユが云ったように、論理は数学の衛生ではあるけれども、栄養ではないのである。

もう一つ、先に公理主義が数学を自然科学から開放したと云ったのは、純粋真理探究の道における数学の普遍的特性を自覚したという意味であって、けっして数学が自然科学から訣別したという意味ではない。数学はいつの時代にも自然科学から大きい栄養を受けてきたし、逆に自然科学の「言葉」として顕著な役割を果たしてきた。近代以後は、経済学をはじめ社会科学の諸分野とも同様の関係を生じた。今日、数学と諸科学との関係はきわめて密なものになっている。そして今後も、数学は、あらゆる科学に普遍的な「言葉」として、諸科学の発展に寄与するであろう。

(一九七九年一月四日)

(付記) この小文中で幾度も触れたユークリッドの『原論』は、一九七〇年にはじめて完全な邦訳(中村・寺阪・伊東・池田四氏共訳、共立出版)が出た。この小文を書くにあたって、この邦訳をはじめ、多くの書物を参照させていただいたことを付記しておく。

(一橋大学教授)

* * *

(一月二十四日追記) 小文中に $2^{19937}-1$ 以後のメルセンヌ素数の発見について筆者は知らないと書いたが、最近、昨年十一月十七日の朝日新聞紙上に、6533桁の新しいメルセンヌ素数 $2^{21701}-1$ の発見が報道されていたことを知った。昨年のその時期筆者はたまたま出張中で、この記事を目にしなかったのである。発見者はカリフォルニア州立大の、いずれも十八歳の二人の学生とのことである。