利他性と効用相互依存

堀　　元*

１．序

本論文は、非家父長的利他性（以下では単に利他性と呼ぶ）、すなわち他者の判断基準を尊重した上で、他者が望ましい状態にあることを自らも望ましいとする他者への配慮、に由来する効用の相互依存関係を取り扱う。

この関係を経済学の文脈で表現するために、社会の構成員を $i=1,2,\cdots,I$、個人 i の消費ベクトルを y_i、消費の社会的配分を $y=(y_1.y_2,\cdots,y_I)$ としよう。また、ここで問題となる個人の選好は、その個人の消費ベクトルのみについてのものではなく、消費の社会的配分についてのものであることに注意し、消費の社会的配分についての個人 i 選好を $\succeq_i$ で表記することとする。この時、上で述べた利他性は、各人の選好の相互依存関係として、次の様に定義できる。

定義１． 任意の i と、$y'_i=y_i$ を満足する任意の社会的配分 y、y' について、

$$y'\succeq_j y\ \forall j\neq i \quad \Rightarrow \quad y'\succeq_i y$$

が成り立つ時、**個人 $i=1,2,\cdots,I$ は利他的である**、あるいは**選好の組 $\langle\succeq_i\rangle_{i=1}^{I}$ は利他的である**、という。

経済学の文献では、分析上の容易さという理由から、この意味で利他的な選好の組 $\langle\succeq_i\rangle_{i=1}^{I}$ が存在するかどうか、存在するとしてその含意は何かといった問題は、利他性に由来する効用関数の相互依存の問題として扱われてきた。本論文もこのアプローチを採用する。

効用の相互依存関係の分析は少なくとも Edgeworth[1881]にまで遡る。エッ

---

* 本稿は、2000 年度日本経済学会秋季大会での報告に基づく Hori[2001]の日本語訳に、多少の修正を加えたものである。日本経済研究奨励財団および文部科学省科学研究費特定領域（Ｂ）603 の助成を受けた。

ヂワースは、二人の個人が相手の利害に対し同感を抱くに至れば、その同感の度合いがある限度内に留まる限り、新しい契約曲線は、古い契約曲線の一部と一致するということを示した。Winter[1969]はこの命題をある意味で拡張して、善意の人々からなる社会では、他者の好みへの尊重が善意に随伴するなら、厚生経済学の第二定理が成り立つことを示した。Arrow[198]〕は、利他性の程度があまり大きくないという制約のもとで、自発的贈与ゲームのナッシュ均衡の存在を証明し、それを特徴づけた。

これらの経済学者は、利他的効用関数を

$$U_i = \Phi_i(y) = \Psi_i(v_1(y_1), v_2(y_2), \cdots, v_I(y_I)), \quad i = 1,2,\cdots,I \qquad (1.1)$$

で表し、その含意を分析した。ここで $v_j(y_j)$ は個人 j が自身の消費 y_j から得る消費効用（フェリシティ）であり、$\partial\Psi_i / \partial v_j \geq 0$ が仮定される。つまり個人 i は v_j で表された他者 j の好みを尊重し、その好みに従って j の状態が望ましいものであることを自分も望むのである。

しかしこの形での効用関数による利他性の表現は、必ずしも定義１の利他性とは合致しない。i 以外の個人が全て利己的で、それゆえ v_j が $j(\neq i)$ の選好を完全に表現している場合には、(1.1）は確かに上述の利他的な選好の条件を満足する。しかし $j(\neq i)$ も利他的で、その効用関数もまた他者の消費効用を変数とし、(1.1）の形をしているとすれば、(1.1）が定義１で与えた利他性の条件を満足するかどうかは自明ではなくなる。それゆえ、(1.1）のような社会的配分に関する効用関数の組が定義１の意味の利他的選好の条件を満たすためには、それらの効用関数はどういう形をしていなければならないか、果たしてそのような効用関数の組がトリビアルなもの意外に存在するのか、という問題が生ずることになる。上に触れたようにエッヂワースとアローは、利他性の程度に制限を課したうえで分析を進めたが､これは実はこの問題と密接に関連している。

２．集計関数と利他性

本論文では、この問題を解くために､Becker[1974､1981]および Barro[1974]の手法を採用する。この手法は、他者の効用水準を各自の効用水準に関係付ける集計関数を用いて利他性の概念を定式化し、この集計関数が形成する関数方程式への解として利他的効用関数を定義しようというものである。以下の定義

では、便宜上、関数の微分可能性をも条件として付加する。

第１節の始めのように社会の構成員を $i=1,2,\cdots,I,$ 財を $n=1,2,\cdots,N,$ 個人 i の消費集合、消費ベクトル、効用水準を、$Y_i \subset R^N$、$y_i=(y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{iN})$、および U_i とし、また $U_{-i}=(U_1,\cdots,U_{i-1},U_{i+1},\cdots,U_I)$ とする。

定義２． $D_i \subset R^N \times R^{I-1}$ の上で定義された微分可能な関数 $G_i(y_i,U_{-i})$ が次の二つの条件を満足するとき、それを i にとっての**集計関数**という。

（ｉ）D_i の R^N への射影は Y_i を含む。

（ii）全ての $n,\ j\neq i,\ (y_i,U_{-i})\in D_i$ について

$$\frac{\partial G_i(y_i,U_{-i})}{\partial y_{in}}>0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial G_i(y_i,U_{-i})}{\partial U_j}\geq 0.$$

次の定義のために、J_i を G_i の値域とし、また $y=(y_1,y_2,\cdots,y_I)$、$U=(U_1,U_2,\cdots,U_I)$、$Y=\prod_{i=1}^{I}Y_i$、$D=\prod_{i=1}^{I}D_i$、$J=\prod_{i=1}^{I}J_i$、および $G(y,U)=(G_1(y_1,U_{-1}),G_2(y_2,U_{-2}),\cdots,G_I(y_I,U_{-I}))$ とおく。

定義３．　集計関数の組 $G=(G_1,G_2,\cdots,G_I):D\to J$ が与えられているとき、微分可能な関数の組 $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_I):Y\to J$ は、それが

$$\Phi(y)=G(y,\Phi(y)) \tag{2.1}$$

という関係を Y の上で恒等的にみたし、かつすべての $y,\ j,n$ について

$$\frac{\partial \Phi_i(y)}{\partial y_{jn}}\geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial \Phi_i(y)}{\partial y_{in}}>0 \tag{2.2}$$

であるなら、関数方程式体系

$$U=G(y,U) \tag{2.3}$$

の解であるという。また、効用関数の組 $\Phi:Y\to J$ は、それを（2.3）の解とするような集計関数の組 G があるとき、**利他的であるという**。

以下では、（１）集計関数の組 G が解を持つための条件、（2）効用関数の組 Φ が利他的であるための条件、（3）利他性が資源配分および所得分配に関して有する含意、を問題として取上げる。

３．線形の場合

まず、集計関数および効用関数がある種の線形性を示す場合について、上の（１）存在条件、および（２）利他性条件を求める。この場合には、すぐにみるように、経済学で周知の結果を援用することによって完全な答を得ることができる。

３.１ 線形の集計関数と解の存在

すべての $i=1,2,\cdots,I$ について集計関数 G_i が自己の消費効用および他者の効用に関して線形であり、それゆえ

$$G_i(y_i,U_{-i})=v_i(y_i)+\sum_{j=1}^{I}a_{ij}U_j,\quad a_{ij}\geq 0\ \forall j\neq i, a_{ii}=0 \tag{3.1}$$

という形をしているものとしよう。ただし $v_i(\cdot)$ は i の消費効用関数で、すべての n について $\partial v_i/\partial y_{in}$ を満足するものとする。この時（2.3）は

$$(E-A)U=v(y) \tag{3.2}$$

となる。ただし E は I 次の単位行列、$A=\lfloor a_{ij}\rfloor$、および $v(y)=(v_1(y_1),v_2(y_2),\cdots,v_I(y_I))^T$ である。

方程式体系（3.2）は、非負制約が U および v にではなく、それらの y に関する微係数に課されているという点を別にすれば、レオンティエフ体系に他ならない。それゆえ（3.2）が解をもつということと、行列 $E-A$ が非負の逆行列をもつこととは同値となり、この時（3.2）の解は、

$$C=[c_{ij}]=[E-A]^{-1}$$

とおくと、

$$\Phi(y)=Cv(y) \tag{3.3}$$

で与えられる。また周知の様に、$E-A$ が非負の逆行列を持つためには、その全ての主小行列式が正であることが必要十分であり、これはホーキンス・サイ

モンの条件として知られている。これについては Hawkins and Simon [1949] を参照されたい。従って次の命題を得る。

命題1．（3.1）によって与えられた線形の集計関数が解をもつためには、$E-A$がホーキンス・サイモンの条件を満足することが必要かつ十分である。

3.2 線形の利他的効用関数

次に、3.1 とは逆に、消費効用 $v(y)=(v_1(y_1),v_2(y_2),\cdots,v_I(y_I))$に関して線形の効用関数の組（3.3）が与えられ、$C$が非負でかつ全ての j と n について $\partial v_j/\partial y_{jn}>0$であるとき、この$\Phi$が利他的であるための条件は何か、という問題を考える。この問題を考えるうえでの基本的な関係は次の補助定理で与えられる。

補題1． 正方行列Cがホーキンス・サイモンの条件を満たすならその逆行列もホーキンス・サイモンの条件を満たす。

証明：Hori[2001]の Lemma 1 から容易に証明できる。□

さて、$\Phi(y)=Cv(y)$が利他的であるとしよう。利他性の定義から、微係数が正の消費効用関数 $\tilde{v}(y)=(\tilde{v}_1(y_1),\tilde{v}_2(y_2),\cdots,\tilde{v}_I(y_I))$と対角要素が 0の非負行列 Aが存在して

$$[E-A]Cv(y)=\tilde{v}(y) \tag{3.4}$$

が成立する。それゆえ命題1によって$E-A$はホーキンス・サイモンの条件を満足する。また$v(y)$および$\tilde{v}(y)$の形と（3.4）とから、$D=[E-A]C$が正の対角要素をもつ対角行列であることがわかる。それゆえ補題1によって$C=[E-A]^{-1}D$はホーキンス・サイモンの条件を満たす。またAが非負行列であるためCの非対角要素は非正となる。つまり、c_{ij}の余因数をΔ_{ij}とすると、

$$\Delta_{ij}\leq 0\ \forall i\neq j \tag{3.5}$$

となる。

逆に$\Phi(y)=Cv(y)$であり、Cはホーキンス・サイモンの条件および（3.5）

を満足するとしよう。そうすると、補題１によって $B=\left[b_{ij}\right]=C^{-1}$ が存在しかつホーキンス・サイモンの条件を満足する。このことはなかんずく全ての i について $b_{ii}>0$ であることを含意する。また（3.5）によって $i\neq j$ なら $b_{ij}\leq 0$ である。そこで行列 $A=\left[a_{ij}\right]$ を、$a_{ij}=-b_{ij}/b_{ii}$（$i\neq j$）および $a_{ii}=0$ で定義し、かつ $\tilde{v}_i\left(y_i\right)=v_i\left(y_i\right)/b_{ii}$ および $\tilde{v}\left(y\right)=\left(\tilde{v}_1\left(y_1\right),\tilde{v}_2\left(y_2\right),\cdots,\tilde{v}_I\left(y_I\right)\right)^T$ とおくと、$\left[E-A\right]\Phi\left(y\right)=\tilde{v}\left(y\right)$ となることがわかる。つまり $\Phi\left(y\right)=Cv\left(y\right)$ は利他的である。それゆえ次の命題を得る。

命題２．（3.3）によって与えられる効用関数の組 Φ が利他的であるための必要十分条件は、C がホーキンス・サイモンの条件と（3.5）を満足することである。

例１． $c_{ij}>0$ かつ $v'_j\left(y_j\right)>0$ として効用関数の組

$$\Phi_i\left(y_1,y_2\right)=c_{i1}v_1\left(y_1\right)+c_{i2}v_2\left(y_2\right),\quad i=1,2 \tag{3.6}$$

を考えよう。この関数は確かに自分および他者の消費効用に対しては正の配慮を示している。集計関数の候補となりうる関数は次の通りである。

$$\begin{aligned} G_1\left(y_1,U_2\right)&\equiv\frac{c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}}{c_{22}}v_1\left(y_1\right)+\frac{c_{12}}{c_{22}}U_2,\\ G_2\left(y_2,U_1\right)&\equiv\frac{c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}}{c_{11}}v_2\left(y_2\right)+\frac{c_{12}}{c_{11}}U_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

もし C がホーキンス・サイモンの条件を満足せずそれゆえ $\left|C\right|=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\leq 0$（$<0$）であるなら、（3.7）によれば、$G_1\left(y_1,U_2\right)$ および $G_2\left(y_2,U_1\right)$ における自己消費増加の直接効果は非正（負）である。このような病理的な場合は本論での利他性の定義では排除されている。

４．非線形の集計関数と解の存在

次に、集計関数が消費効用に関して必ずしも線形ではなく、また各人の消費配分 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_I)$に関して必ずしも分離可能でもない一般の場合について、解の存在問題を考える。以下に報告する十分条件は、線形集計関数に関する一つの結論の直接的な拡張にあたる。なお以下では、叙述の便宜上、$G_{ij}=\partial G_i/\partial U_j$ とおく。

命題3． 集計関数 G_i が全ての $i=1,2,\cdots,I$ について連続微分可能だとする。この時、対角要素が0の I 次の非負正方行列 $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$で、

$$a_{ij}\geq G_{ij}(y_i,U_{-i})\quad \forall j\neq i,\forall(y_i,U_{-i})\in Y_i\times J_{-i},\forall i \tag{4.1}$$

となるものが存在し、かつ $E-A$がホーキンス・サイモンの条件を満足するなら、方程式（2.1）は一義的な解を有する。

証明： Hori[2001]を参照されたい。

ここで考慮されている集計関数は、線形の集計関数の場合と同様、自己消費の水準が低くとも他者の効用水準が高ければ自己の総効用の水準はいくらでも高くなる可能性を持つという意味で、非現実的な面を有している。Hori[2001]では、この点の制約をゆるめた別の十分条件も考慮されている。

5．効用関数が利他的であるための条件

次に考えるのは、効用関数の組 $\Phi:Y\to J$ が利他的であるためにみたさなければならない条件は何か、という問題である。命題2は、Φ が各人の消費効用に関して線形である場合について、このための必要十分条件を与えるものであった。本節では Φ の線形性は仮定せず、また各人の消費効用に関しての分離可能性も仮定しないが、それでも、以下に見るように、Φ が利他的であるための必要十分条件を導出することができる。

この条件を提示するために、効用関数の組 $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_I):Y\to J$ と各 $n=1,2,\cdots,N$ について、$\partial\Phi_i(y)/\partial y_{jn}$ を (i,j)要素とする I 次の行列を $\Phi'_n(y)$で、またこの行列の (i,j)要素の余因子を $\Delta_{ijn}(y)$で表すこととする。

命題４． 効用関数の組 $\Phi: Y \to J$ が利他的であるためには、それが全ての $y \in Y$ と全ての $n = 1,2,\cdots,N$ について以下の三つの条件を満足することが必要かつ十分である。

（１） $\Phi'_n(y)$ がホーキンス・サイモンの条件を満足する。

（２） $i \neq j$ なら $\Delta_{ijn}(y) \leq 0$ となる。

（３）全ての i と j について、

$$\frac{\partial \Phi_i(y)}{\partial y_{jn}} = \hat{c}_{ij}(y) \times \frac{\partial \Phi_j(y)}{\partial y_{jn}}$$

となる、n から独立の $\hat{c}_{ij}(y)$ がある。

証明：必要性：　Φ が利他的であるとしよう。定義によって、（2.1）を恒等的に満足する集計関数の組 G が存在する。(2.1)の両辺を y_{in} で微分して次の式を得る。

$$[E - G']\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{in}}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{in}}, \cdots, \frac{\partial \Phi_I}{\partial y_{in}}\right)^T = \left(0,\cdots,0, \frac{\partial G_i}{\partial y_{in}}, 0,\cdots,0\right)^T. \tag{5.1}$$

$\partial \Phi_j / \partial y_{in} \geq 0,\ \partial G_i / \partial y_{in} > 0$ であり、i は任意であるから、$E - G'$ はホーキンス・サイモンの条件を満たす。（これについては Nikaido[1968], Theorem 6.1 を参照されたい。）

$i = 1,2,\cdots,I$ について(5.1)を行列で表して、次式をえる。

$$\Phi'_n = [E - G']^{-1}\left[\frac{\partial G_i}{\partial y_{in}}\right]. \tag{5.2}$$

ここで $\left[\frac{\partial G_i}{\partial y_{in}}\right]$ は $\frac{\partial G_i}{\partial y_{in}} > 0$ を (i,i) 要素とする対角行列である。$\left[\frac{\partial G_i}{\partial y_{in}}\right]$ が対角行列であること、$E - G'$ がホーキンス・サイモンの条件を満たすこと、(5.2)、および補題１から、命題４の(1)と(2)が得られる。

次に $[E - G']^{-1} = C = [c_{ij}]$ とおくと、これは明らかに n からは独立であり、(5.2)から $\partial \Phi_i / \partial y_{jn} = c_{ij} \partial G_j / \partial y_{jn}$ となる。ここで $\hat{c}_{ij} = c_{ij} / c_{jj}$ とおくと、命題４

の(3)が得られる。

十分性：次に効用関数の組Φが命題4の条件(1)〜(3)を満足しているとする。まず、条件(3)の$\hat{c}_{ij}$を(i,j)要素とする行列を$\hat{C}$とおくと、この場合$\hat{B}=\hat{C}^{-1}$が存在してホーキンス・サイモンの条件を満足し、かつその非対角要素は非正となることを示しておこう。実際、(3)から、

$$\Phi'_n = \hat{C}\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{in}}\right] \tag{5.3}$$

が全てのnについて成り立つ。ここで$\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{in}}\right]$は$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{in}}$を$(i,i)$要素とする対角行列である。それゆえ、$\Phi'_n$が条件(1)と(2)を満足するなら$\hat{C}$も対応する条件を満足するので、上に述べた結論が得られる。

さて、$U_i=\Phi_i(y)$とおく。条件(3)によってU_iの全微分は

$$dU_i = \sum_{j=1}^{I}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{jn}}dy_{jn} = \sum_{j=1}^{I}\hat{c}_{ij}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_{jn}}dy_{jn}$$

という関係を満足する。これを行列の形で表現し、$\hat{B}=\hat{C}^{-1}$を両辺にかけて

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{1n}}dy_{1n}, \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{2n}}dy_{2n}, \cdots, \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \Phi_I}{\partial y_{In}}dy_{In}\right)^T = \hat{B}(dU_1, dU_2, \cdots, dU_I)^T,$$

を得る。ここで$\hat{B}$の(i,j)要素を$\hat{b}_{ij}$とすると、全てのiについて

$$dU_i = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \Phi_i/\partial y_{in}}{\hat{b}_{ii}}dy_{in} - \sum_{j\neq i}\frac{\hat{b}_{ij}}{\hat{b}_{ii}}dU_j \tag{5.4}$$

が成り立つ。ただしここで$\hat{b}_{ii}>0$（$\forall i$）および$\hat{b}_{ij}\leq 0$（$\forall j\neq i$）である。

各iについて(5.4)式の右辺にdy_iとdU_{-i}とだけが現れるという事実は、iと異なるjの消費は$U_i=\Phi_i(y)$に対し$U_{-i}=\Phi_{-i}(y)$を通して間接的にのみ影響することを示している。それゆえ各iについて

$$\Phi_i(y) = G_i\left(y_i, \Phi_{-i}(y)\right)$$

となる関数　G_i　が存在する。関係式(4.4)は、関数G_iが微分可能であってかつ

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_{in}} = \frac{\partial \Phi_i / \partial y_{in}}{\hat{b}_{ii}} > 0 \quad \forall n \quad \text{および} \quad \frac{\partial G_i}{\partial U_j} = -\frac{\hat{b}_{ij}}{\hat{b}_{ii}} \geq 0 \quad \forall j \neq i$$

を満足することを示す。それゆえG_iは集計関数であり、従ってΦは利他的である。□

命題４の条件（１）と（２）は、線形の場合についての命題２の直接的拡張になっている。条件（３）の意味を見るためにiにとってのy_{jn}とy_{jm}との間の限界代替率を求めると、（３）から、

$$\frac{\partial \Phi_i / \partial y_{jn}}{\partial \Phi_i / \partial y_{jm}} = \frac{\partial \Phi_j / \partial y_{jn}}{\partial \Phi_j / \partial y_{jm}} \tag{5.5}$$

を得る。すなわちiにとってのjの消費の限界代替率は、j自身にとっての限界代替率に等しい。つまり（３）は、たとえΦが分離可能でなくとも、個人iが他者jの消費に関する選好を尊重することを含意するのである。

エッジワース、ウィンター、アロー等にしたがって効用関数Φ_iが各消費者の消費効用に関して分離可能な場合を考えるために、全てのiについて$v_i : Y_i \to V_i, V_i \subset R$が微分可能で$\partial v_i / \partial y_{in} > 0$であると仮定し、$v(y) = \left(v_1(y_1), v_2(y_2), \cdots, v_I(y_I)\right)$,　$V = \prod_{i=1}^{I} V_i$とおこう。また各iについて$\Psi_i : V \to J_i$は微分可能で$\partial \Psi_i / \partial v_j \geq 0$であると仮定しよう。さらに$\Psi'(u) = \left[\frac{\partial \Psi_i(u)}{\partial u_j}\right]$とおき、$\frac{\partial \Psi_i(u)}{\partial u_j}$の余因数を$\Delta_{ij}(u)$で表そう。そうすると、$\Phi_i(y) = \Psi_i(v(y))$という分離可能な形の効用関数の組$\Phi = \Psi \circ v$が利他的であるための条件は、上の命題からただちに得ることができる。

系１. 微分可能な分離可能効用関数の組$\Phi = \Psi \circ v : Y \to J$が利他的であるため

の必要十分条件は、以下の（1）と（2）が全ての$u \in V$について成り立つことである。

（1）$\Psi'(u)$がホーキンス・サイモンの条件を満足する。

（2）全ての$i \neq j$について$\Delta_{ij}(u) \leq 0$が成立する。

証明：(i,i)要素が$\partial v_i / \partial y_{in} > 0$からなる対角行列を$[\partial v_i / \partial y_{in}]$とおくとき、すべての$n$について

$$\Phi'_n(y) = \Psi'(v(y))\left[\frac{\partial v_i(y_i)}{\partial y_{in}}\right]$$

が成り立つから、この系は命題４から直ちに得られる。□

６．厚生経済学の第二定理

序節でふれたように、Winter[1969]は、人々が経済全体の財配分に関する効用関数をもっており、それが(1.1)のように各人の消費効用に関して分離可能であるなら、この効用関数にてらしてパレート効率的な配分は価格によって支持され得ることを証明した。この推論の道筋は次の通りである。人々の効用関数が(1.1)の形をしているなら、人々の効用関数$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_I)$は自己消費に関する人々の選好$v = (v_1, v_2, \cdots, v_I)$を尊重する。それゆえ、ある配分$y^*$が$\Phi$という効用関数の組にてらしてパレート効率的なら、それはvを効用関数の組とした場合にもパレート効率的でなければならない。従って、vおよび生産技術が標準的な凸性の条件を満足するなら、Debreu[1959]の古典的な定理によって、y^*は、各人iが適当な予算制約のもとにその消費効用$v_i(y_i)$を最大化する場合の競争均衡として実現できる。

ここで注意したいのは、経済全体の財配分に関する効用関数の組が利他的であるなら、たとえそれが各人の消費に関して分離可能でなくても、(5.5)にみられるように、各個人iは他者jの消費に関してj自身の選好を尊重するという点である。このことは、Winter[1969]の定理を、分離可能ではないが利他的な効用関数の組にも拡張する可能性を示唆するものであり、実際次の命題が成り立つ。

命題5． $Y=\prod_{i=1}^{I}Y_i, J=\prod_{i=1}^{I}J_i$ とおき、効用関数の組 $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_I):Y\to J$ が利他的であるとしよう。また、対応する集計関数の組を $G=(G_1,G_2,\cdots,G_I):Y\times J\to J$ とするとき、$E-G'(y,U)$ は全ての $(y,U)\in Y\times J$ においてホーキンス・サイモンの条件を満足するものとしよう。この時、Φ に関してパレート効率的な配分 y^* は、$U^*=\Phi(y^*)$ とおくと、$G(\cdot,U^*)$ に関してもパレート効率的である。

この証明のために次の補助命題を用いる。ただし以下で、ベクトル $U=(U_1,U_2,\cdots,U_I)$ および $U'=(U'_1,U'_2,\cdots,U'_I)$ に関する不等号 $U<U'$ は、$U_i\leq U'_i\ \forall i$ および $U\neq U'$ を意味する。

補題2． 集計関数の組 G が命題5の条件を満足するとき、任意の $y\in Y$ について、

$$U-G(y,U)<U'-G(y,U')\Rightarrow U<U'$$

が成り立つ。

証明： Gale and Nikaido[1965]あるいは Nikaido[1968],Theorem 20.6 を参照せよ。□

命題5の証明： y^* が $G(\cdot,U^*)$ に関してパレート効率的ではないとしよう。そうすると別の実行可能な配分 y で、

$$G(y,U^*)>G(y^*,U^*)\quad(=U^*)$$

となるものがある。他方 G は Φ に対応する集計関数であるから、この y について

$$\Phi(y)=G(y,\Phi(y)).$$

それゆえ

$$U^*-G(y,U^*)<0=\Phi(y)-G(y,\Phi(y)).$$

補題2によって　$\Phi(y^*)=U^*<\Phi(y)$ が得られるが、これは y^* が Φ に関してパレート効率的だという前提に反する。□

この命題から、（U を所与とした時の）$G(\cdot,U)$ と生産技術とが標準的な凸性の条件をみたすなら、Φ に関するパレート効率的な配分 y^* が、$G(\cdot,U^*)$ を（利

己的な)効用関数の組とする経済の競争均衡として実現できることがわかる。

7．贈与ゲーム

本節では、財は１種類のみと仮定し、贈与の非協力ゲームでの均衡の存在を考える。y_i, w_i, g_{ij}で個人iの消費、初期保有、およびjへの贈与をあらわすことにしよう。ただし、自発的な贈与が対象であるから、$g_{ij} \geq 0$とする。また便宜上、全てのiについて$g_{ii}=0$とする。個人iの予算制約式は

$$y_i = w_i + \sum_{j=1}^{I} g_{ji} - \sum_{j=1}^{I} g_{ij}$$

で与えられる。$g_i = (g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{iI})$および$g_{-i} = (g_1, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, \cdots, g_I)$と置こう。そうすると個人$i$は、この予算制約式のもとに、$g_{-i}$を所与とし、$\Phi_i(y)$を最大とするよう$g_i$を選ぶということになる。個人$i$は、自分の初期保有からのみでなく自分の受け取った贈与からも他人に贈与を与えることができるから、iの贈与は

$$\sum_{j=1}^{I} g_{ij} \leq w_i + \sum_{j=1}^{I} g_{ji} \tag{7.1}$$

を満足せねばならない。贈与の組$g^* = (g_1^*, g_2^*, \cdots, g_I^*)$は、各$i$について、$g_{-i}^*$を所与とした時、$g_i^*$が(7.1)の制約のもとに$\Phi_i(y)$を最大にするなら、このゲームの均衡解である。

Arrow[1981]は、(7.1)の定義する可能な贈与の集合は有界ではないため、このゲームに均衡解が存在するかどうかは自明ではないことに注意を促し、各個人は他者の消費よりも自己の消費を重視するとの仮定を用いて均衡解の存在を示した。次の二人ゲームはこの点についての示唆を与える。

（このあたりに図１を挿入）

二人の効用関数を

$$U_1 = \Phi_1(y) \equiv \log y_1 + c_{12} \log y_2,$$
$$U_2 = \Phi_2(y) \equiv c_{21} \log y_1 + \log y_2$$

としよう。図１がこのゲームを表す。この図では、線分 O_1O_2 の長さは、二人のプレーヤーの初期保有の和、つまり w_1+w_2 に等しい。そしてこの線分上の任意の一点は、二人の間での消費の配分あるいは初期保有の配分を表す。$y_1+y_2=w_1+w_2$ という制約を満足しつつ $\Phi_i(y)$ を最大にする消費の配分は m_i で示されている。これらは、O_1 からはかって、

$$m_1=\frac{w_1+w_2}{1+c_{12}}, \quad m_2=\frac{c_{21}(w_1+w_2)}{1+c_{21}}$$

で与えられる。図１のパネル a は $c_{12}c_{21}<1$ の場合を、またパネル b は $c_{12}c_{21}>1$ の場合を表す。$c_{12}c_{21}=1$ の場合には m_1 と m_2 は一致する。

贈与は非負であるから、個人１の贈与活動は O_1O_2 に沿っての左方への動きとして、また個人２のそれは右方への動きとして、表すことができる。このことから、初期保有の配分がどのようなものであれ、$c_{12}c_{21}<1$ なら一意の均衡が存在するが、$c_{12}c_{21}>1$ なら均衡は存在しないということがわかる。$c_{12}c_{21}<1$ の場合の均衡消費配分は

$$(y_1^*,y_2^*)=\begin{cases}(m_2, w_1+w_2-m_2), & (w_1<m_2),\\ (w_1,w_2), & (m_2\le w_1\le m_1),\\ (m_1, w_1+w_2-m_1), & (m_1<w_1),\end{cases}$$

で与えられる。

ここでアローに従って二人は同質的だとみなし、それゆえ $c_{12}=c_{21}$ とするなら、$c_{12}=c_{21}<1$ であれば、つまり各人が自己の消費を他者の消費より重視するなら、均衡が存在するという、アローの結果がえられる。しかし同時に、命題２によって、$c_{12}c_{21}<1$ というのは $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$ が利他的であるための必要十分条件であることに注意してほしい。つまりこの例は、効用関数の利他性と贈与ゲームにおける均衡解の存在との間に関係があることを示唆しているわけである。簡単化のために全ての i について $Y_i=R_+$ としよう。そうすると次の命題が成り立つ。

命題６． $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_I)$ が利他的で、かつ全ての i について Φ_i が準凹であるなら、贈与ゲームは均衡解をもつ。

証明のために二つの補題を必要とする。$X=\lfloor x_{ij}\rfloor$をI次の正方行列とし、任意の$p=1,2,\cdots,I$について、

$$X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdot & \cdot & \cdot & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdot & \cdot & \cdot & j_p \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} x_{i_1 j_1} & x_{i_1 j_2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{i_1 j_p} \\ x_{i_2 j_1} & x_{i_2 j_2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{i_2 j_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{i_p j_1} & x_{i_p j_2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{i_p j_p} \end{vmatrix}$$

と置こう。

補題3． $C=B^{-1}$なら、任意の$p=1,2,\cdots,I-1$について、

$$C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdot & \cdot & \cdot & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdot & \cdot & \cdot & j_p \end{pmatrix}=(-1)^{\sum_{n=1}^{p}(i_n+j_n)}B\begin{pmatrix} j'_1 & j'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & j'_{I-p} \\ i'_1 & i'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & i'_{I-p} \end{pmatrix}/|B|$$

が成り立つ。ただしここで、$i_1<i_2<\cdots<i_p$と$i'_1<i'_2<\cdots<i'_{I-p}$および$j_1<j_2<\cdots<j_p$と$j'_1<j'_2<\cdots<j'_{I-p}$は、いずれも、完全な添数の組$\{1,2,\cdots,I\}$を形成する。

証明： Gantmacher[1959,p.21]を参照されたい。

補題4． Bは対角要素が正、非対角要素が非正のI次正方行列で、ホーキンス・サイモンの条件を満足するものとする。この時、$i\neq j$なら、$1\leq p\leq I-2$なる任意のpについて、

$$B\begin{pmatrix} i & i_1 & i_2 & \cdot & \cdot & \cdot & i_p \\ j & i_1 & i_2 & \cdot & \cdot & \cdot & i_p \end{pmatrix}\leq 0$$

が成り立つ。

証明： Hori[2001]、Lemma5と同様に証明できる。

命題6の証明： まず、各人の贈与の総額がその初期保有によって制約されているが、それ以外の点ではもとのゲームと同一の、修正ゲームについて均衡の存在を示し、ついで、この修正ゲームの均衡がもとのゲームの均衡でもあることを示す。

そこで、まず修正ゲームを叙述するために、$\tilde{X}_i=\left\{g_i\in R_+^I:\sum_{j=1}^{I}g_{ij}\leq w_i\right\}$、

$g=(g_1,g_2,\cdots,g_I)$ 、 $g_{-i}=(g_1,\cdots,g_{i-1},g_{i+1},\cdots,g_I)$ 、 および $y_i(g)=w_i+\sum_{j=1}^{I}g_{ji}-\sum_{j=1}^{I}g_{ij}$ と置こう。また、i の行動が他者に与える影響を叙述するために、 $y_j(g)=y_j(g_i,g_{-i})$ と表し、 $y(g_i,g_{-i})=(y_1(g_i,g_{-i}),y_2(g_i,g_{-i}),\cdots,y_I(g_i,g_{-i}))$ と置くことにしよう。そうすると、この修正ゲームでの g_{-i} への i の反応は、

$$\tilde{Q}_i(g_{-i})=\left\{g_i\in\tilde{X}_i:\Phi_i(y(g_i,g_{-i}))\geq\Phi_i(y(g'_i,g_{-i}))\quad\forall g'_i\in\tilde{X}_i\right\}$$

で定義される対応 $\tilde{Q}_i:\prod_{j\neq i}\tilde{X}_j\to\tilde{X}_i$ で表すことができる。$\tilde{X}=\prod_{i=1}^{I}\tilde{X}_i$ および $\tilde{Q}(g)=\prod_{i=1}^{I}\tilde{Q}_i(g_{-i})$ と置こう。そうすると、各 Φ_i は連続で準凹であるから、$\tilde{Q}$ はコンパクトで凸な $\tilde{X}$ をそれ自身に写す上半連続な対応であり、また任意の $g\in\tilde{X}$ について $\tilde{Q}(g)$ は凸である。それゆえこの対応は不動点 $g^*\in\tilde{X}$ を有し、これは修正ゲームの均衡である。

次に、この g^* がもとのゲームでは均衡でないと仮定しよう。もとのゲームでは g_{-i} を所与とした時の i の予算集合は

$$X_i(g_{-i})=\left\{g_i\in R_+^I:\sum_{j=1}^{I}g_{ij}\leq w_i+\sum_{j=1}^{I}g_{ji}\right\}$$

で与えられるから、 g^* が均衡でないなら、（1） $g_i\in X_i(g^*_{-i})\setminus\tilde{X}_i$ でかつ（2） $\Phi_i(y(g_i,g^*_{-i}))>\Phi_i(y(g^*_i,g^*_{-i}))$ という二つの条件を満足する i と g_i が存在する。

この（1）によって、 $g^*_{ji}>0$ となる j があることがわかる。$\Phi_{ij}=\partial\Phi_i/\partial y_j$ と置こう。そうすると、 $g^*_{ji}>0$ であるから、

$$\Phi_{jj}(y(g^*))\leq\Phi_{ji}(y(g^*)) \tag{7.2}$$

が成り立つ。ただし、$\sum g_{jk}^{*} < w_j$ なら、(7.2)は等式となる。他方、Φ_i は準凹であるから、（２）によって、修正ゲームでは w_i が i の贈与行動を有効に制約していることがわかる。それゆえ

$$\Phi_{ii}\left(y\left(g^{*}\right)\right) < \Phi_{ik}\left(y\left(g^{*}\right)\right) \tag{7.3}$$

となる k が存在する。以下では(7.2)と(7.3)とから矛盾を引き出すことにする。

仮定によって Φ は利他的であるから、集計関数の組 G で、$\Phi(y) = G(y, \Phi(y))$ という関係を全ての y について満足するものがある。$c_{ij} = \Phi_{ij}\left(y\left(g^{*}\right)\right)$、$C = \lfloor c_{ij} \rfloor$、および $B = E - G'\left(y\left(g^{*}\right), \Phi\left(y\left(g^{*}\right)\right)\right)$ と置こう。また $d_{ii} = \partial G_i\left(y_i\left(g^{*}\right), \Phi_{-i}\left(y\left(g^{*}\right)\right)\right) / \partial y_i$ と置くと $d_{ii} > 0$ であるが、この d_{ii} を (i,i) 要素とする対角行列を D とおく。そうすると容易に分かる様に B, C, D の間には

$$C = \left(D^{-1}B\right)^{-1} \tag{7.4}$$

という関係が成り立つ。ここで C は、命題４によって、ホーキンス・サイモンの条件を満足する。

まず、(7.2)と(7.3)から $j \neq k$ となることに注意しておく。実際、もしも $j = k$ なら $c_{ii}c_{jj} < c_{ij}c_{ji}$ となるが、これは命題４の（１）に反する。それゆえ、(7.2)と(7.3)では、一般性を失うことなく $i < j < k$ と仮定することができる。

ここで c_{ji} と c_{jk} を比較することにする。$c_{ii} > 0$ であり、また(7.2)から $c_{ji} > 0$ であるから、補題３と(7.3)を用いて、

$$c_{ji} - c_{jk} < \frac{c_{ji}c_{ik} - c_{jk}c_{ii}}{c_{ii}} = \frac{-C\begin{pmatrix} i & j \\ i & k \end{pmatrix}}{c_{ii}}$$

$$= \frac{(-1)^{2i+j+k+1}}{c_{ii}\left|D^{-1}B\right|}\left(D^{-1}B\right)\begin{pmatrix} 1 & \cdot & i-1 & i+1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k-1 & k+1 & \cdot & I \\ 1 & \cdot & i-1 & i+1 & \cdot & j-1 & j+1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{2(i+j+k-2)}}{c_{ii}\left|D^{-1}B\right|}\left(D^{-1}B\right)\begin{pmatrix} j & 1 & \cdot & i-1 & i+1 & \cdot & j-1 & j+1 & \cdot & k-1 & k+1 & \cdot & I \\ k & 1 & \cdot & i-1 & i+1 & \cdot & j-1 & j+1 & \cdot & k-1 & k+1 & \cdot & I \end{pmatrix}$$

を得る。$D^{-1}B$は明らかに正の対角要素と非正の非対角要素とをもち、また(7.4)と補題１からホーキンス・サイモンの条件を満たすから、補題４によって上式の最右辺は非正である。それゆえ $c_{ji} < c_{jk}$、すなわち

$$\Phi_{ji}\left(y\left(g^*\right)\right) < \Phi_{jk}\left(y\left(g^*\right)\right)$$

となる。ところが仮定によって $g^*_{ji} > 0$であるから、この不等式は、g^*_{ji}を減らし、g^*_{jk}を同額だけ増やすことによって、jが、$\sum_{l=1}^{I} g_{jl} \leq w_j$という修正ゲームの制約式に違反することなしに、その効用水準を$\Phi_j\left(y\left(g^*\right)\right)$よりも高め得ることを示している。これは$g^*$が修正ゲームの均衡だという仮定に反する。それゆえ修正ゲームの均衡 g^*はもとのゲームの均衡でもある。

この節を終えるにあたって、図１で表された二人ゲームのナッシュ均衡はパレート効率的であるが、プレーヤーが 3 人以上の贈与ゲームではそうならないことに注意しておく。これは、Nakayama[1980]および Arrow[1981]の示す様に、プレーヤーが 3 人以上の場合には贈与が公共財となるためである。

参考文献

Arrow, K.J.[1981], "Optimal and Voluntary Income Distribution",in Rosefielde, ed., *Economic Welfare and the Economics of Soviet Socialism: Essays in Honor of Abram Bergson,* Cambridge, Cambridge University Press, 267-288.

Barro, R.[1974], "Are Government Bonds Net Wealth?", *Journal of Political Economy,*82, 1095-1117.

Becker, G.S.[1974], "A Theory of Social Interactions", *Journal of Political Economy,* 82, 1063-1093.

Becker, G.S.[1981], *A Treatise on the Family,* Cambridge, Harvard University Press.

Debreu, G.[1959], *Theory of Value,* New York, Wiley.

Edgeworth, F.Y.[1881], *Mathematical Psychics,*London, Kegan Paul.

Gale, D. and H. Nikaido[1965], "The Jacobial Matrix and Global Univalence of Mappings", *Mathmatische Annalen,*159, 68-80.

Gantmacher, F.R.[1959], *The Theory of Matrices,* New York, Chelsea Publishing Company.

Hawkins, D., and H.A. Simon[1949], "Some Conditions of Macroeconomic Stability", *Econometrica,*17, 245-248.

Hori, H.[2001], "Non-paternalistic Altruism and Utility Interdependence", *Japanese Economic Review,* forthcoming.

Nakayama, M.[1980], "Nash Equilibria and Pareto Optimal Income Redistribution", *Econometrica,* 48, 1257-1263.

Nikaido, H.[1968], *Convex Structures and Economic Theory,* New York, Academic Press.

Winter, S.G., Jr.[1969], "A Simple Remark on the Second Optimality Theorem of Welfare Economics", *Journal of Economic Theory,* 1, 99-103.