数理ファイナンスの基本定理について

高　岡　浩　一　郎

1　はじめに

金融工学・数理ファイナンスにおいてオプションのような非線形リスクの価格評価を行うときには，原資産（派生証券の基になっている商品や証券のことを指し，例えば株式オプションの原資産は株式である）の価格変動モデルを建てて議論することが多い．離散時間の二項モデルおよび連続時間の Black-Scholes モデルは最も基本的な価格変動モデルとみなすことができるが，これらのモデルに基づく場合オプションの無裁定価格は一意に定まり，それは次の２通りの計算手法によって与えられる．

- 原資産と安全債券を用いてオプションを複製する方法を考え，その複製の元手を計算する．

- 元の確率ではなくリスク中立確率という確率に移ってから，オプションのペイオフの割引期待値を計算する．

２つの手法は同じ値を与えることが数学的に保証されている．金融工学に興味のある学生は，本学では学部３年次から大学院修士課程において講義やゼミでこの話題を学ぶことができる．テキストブックとしては Hull［10］，藤田［７］，蓑谷［13］，Baxter & Rennie［１］，Lamberton & Lapeyre［12］などを参照されたい．

より一般的なモデルを建てて議論しようとする場合，以下の疑問が生まれる．

1. オプションの無裁定価格云々を論じる前にまず，原資産と安全債券を用いるだけでは裁定取引[1]を組めないようなモデルになっているか？
2. リスク中立確率が存在するか？
3. リスク中立確率は唯一存在するか？
4. すべての条件付き請求権（contingent claim）は，原資産と安全債券の取引によって複製可能か？

ここでラフに言って1と2は同値であり，また，3と4は同値になる．前者の同値性を数学的にきっちり定式化したものを数理ファイナンスの第1基本定理と呼び，後者の同値性を定式化したものを数理ファイナンスの第2基本定理と呼ぶ．単に「数理ファイナンスの基本定理」と言うときには第1基本定理を指す[2]．この定理は実務計算上の重要性は高くないかも知れないが，一般的な理論を展開しようとする時は念頭においておく必要がある．

本稿の目的は，第1基本定理を離散時間版と連続時間版それぞれについて解説し，さらに連続時間版において現在最強だが難解だと言われることが多いDelbaen & Schachermayerの定理［5］を見やすくするために筆者が最近証明した結果［17］を紹介することである[3]．スペースの制約上，各定理の証明は省略するが，どのような数学を用いるかについては各所で述べていきたい．

なお，以下の議論において金利はゼロと仮定しておく．安全債券で予め割り引いた証券価格過程を用いて議論すると考えても良い．

2　離散時間

離散時間の設定下では，決定版と呼べる定理が1980年前後に示されている．

定理1（Harrison & Kreps［8］，Harrison & Pliska［9］）$T<\infty$とし，フィルター付き確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\cdots,T}, P)$を考える．$\#\Omega<\infty$を仮定する．$\mathbb{R}^d$値の適合的な確率過程$S=(S_t)_{t=0,1,\cdots,T}$に対して，以下の2性質は同値である．

1.　次をともに満たす$\mathbb{R}^d$値可予測過程$H=(H_t)_{t=1,\cdots,T}$は存在しない：

$$P[(H\bullet S)_T\geq 0]=1 \quad \text{かつ} \quad P[(H\bullet S)_T>0]>0.$$

ただし，$(H\bullet S)_t:=\Sigma_{u=1}^t H_u(S_u-S_{u-1})$ つまり離散時間版の確率積分である．

2.　Pと同値で，かつSをマルチンゲールにするような確率が存在する．

解釈としては，Sがd種類の証券（安全債券を除く）の価格過程を表し，Tが満期を表す．そしてH_tは$t-1$時点からt時点までのポートフォリオ，つまり各証券をどれだけ保有するかを示すd次元ベクトルである．その解釈にピッタリ当てはまるためには，H_tの値が$t-1$時点までの情報で確定していなければならないが，その点はHが可予測過程であることと対応している．$(H\bullet S)_t$は投資のt時点までの合計損益を表している．そして1番目の性質は裁定取引を組めないことを表し，2番目の性質がリスク中立確率の存在を述べている．

ここで$n:=\#\Omega$とする．実数値確率変数を1つ考えることは計n個のシナリオそれぞれに対して実数を1つずつ割り振ることと同じなので，実数値確率変数全体の集合は$\mathbb{R}^n$と同一視できる．そして様々なHをとった時に最終的な合計損益として書き表される確率変数全体の集合

$$A:=\{(H\bullet S)_T \mid H\text{は}\mathbb{R}^d\text{値可予測過程}\} \qquad (*)$$

は$\mathbb{R}^n$の線形部分空間と同一視できる．このことを念頭におくと，定理1は，線形計画法や凸解析の分野でStiemkeの補題として古くから知られる次の主張と同等であることが分かる．

Stiemkeの補題[4)]　$\mathbb{R}^n$の線形部分空間Aに対して一般に，以下の2性質は同値である．

1．$A\cap(\mathbb{R}_+^n\setminus\{0\})=\emptyset$,

2．$A^\perp\cap\mathbb{R}_{++}^n\neq\emptyset$.

ただし，$\mathbb{R}_+^n$は$\mathbb{R}^n$の元のうち各成分が全て非負であるようなもの全体の集合を表し，$\mathbb{R}_{++}^n$は$\mathbb{R}^n$の元のうち各成分が全て正であるようなもの全体の集合を表すと

する．$A^{\perp}$ は A の直交補空間である．部分空間 A を上記の式(＊)のように定義すると，$A^{\perp}\cap\mathbb{R}^n_{++}$ の元を規格化したもの（つまり n 個の成分の和が1になるようにスカラー倍したもの）がリスク中立確率になるので，この Stiemke の定理における1番目と2番目の性質は，定理1のそれと対応していることになる．さらにリスク中立確率が唯一存在することは A の余次元が1であることに対応し，これが数理ファイナンスの第2基本定理につながっていく．

なお，定理1においてシナリオ数が有限という仮定 $\#\Omega<\infty$ を完全に外せることが，Dalang et al.［2］によって1990年に証明された．

3　連続時間

連続時間の設定下では起こりうるシナリオが無限個あるので，数理ファイナンスの基本定理を考えることは前節の Stiemke の補題およびそれに関連する線形計画法や凸解析の無限次元版を考えることを意味する．しかし無限次元の解析は現在も未整備な状態である．例えば凸解析の大家 Rockafellar は近著［14］においても記述を有限次元に限定しており，その理由の1つとして次の旨を前書きで述べている「有限次元における多くの概念の無限次元版を考えようとするときは，様々な候補が考えられ，そのうちのどれが本質的なのかを理解するためには，もう少し時代を経て研究が積み重なる必要があると思われる」．以下の諸定理は，確率過程論の言葉を用いて無限次元版を開拓する一連の試みと見なせるかもしれない．

離散時間でも時刻∞まで考える設定ではいわゆる「倍賭け戦略」が可能になるが，連続時間では終末時刻が有限でも倍賭けに相当する戦略が可能になる．それを考察対象から外すため，以下のように“admissible”という概念を定義しておく．

定義　以下本節においてフィルター付き確率空間（Ω, $\mathcal{F}$, $(F_t)_{t\in[0,T]}$, P）を考える，ただし $T<\infty$．また，$\mathbb{R}^d$値セミマルチンゲール $S=(S_t)_{t\in[0,T]}$ を考える．S は局所有界[5)]であると仮定しておく．a を正の定数とするとき，$\mathbb{R}^d$値の可予測過程 $H=(H_t)_{t\in[0,T]}$が a-admissible であるとは，H が S について確率積分可能であり，

さらに

$$(H \cdot S)_t \geq -a, \qquad \forall t \in [0, T], \qquad \text{a.s.}$$

を満たすことである．ただし $H \cdot S$ は H の S についての確率積分を表すこととする．また，このような a が存在するとき，H は admissible であるという．

連続時間の基本定理に関しては Kreps ［11］ や Stricker ［16］ らの貢献も非常に大きいが，現在最強[6)]といわれている定式化は Delbaen & Schachermayer による1994年の結果である．

定理 2 （Delbaen & Schachermayer ［5］ の主定理） 次の 2 性質は同値である．

1. admissible な H^n たちが

$$\lim_{n\to\infty}(H^n \cdot S)_T = 0 \text{ in } L^\infty$$

を満たせば必ず

$$\lim_{n\to\infty}(H^n \cdot S)_T^+ = 0 \text{ in probability.}$$

（Delbaen と Schachermayer はこの性質を “No Free Lunch with Vanishing Risk” と呼んでいる．略して NFLVR.）

2. P と同値で，かつ S を局所マルチンゲールにするような確率（equivalent local martingale measure, 略して ELMM）が存在する．

命題 3 （Delbaen & Schachermayer ［5］ の Example 7.7） NFLVR は，次をともにみたすような admissible H の非存在（No Arbitrage，略して NA という）よりも真に強い性質である．

$$P[(H \cdot S)_T \geq 0] = 1 \quad \text{かつ} \quad P[(H \cdot S)_T > 0] > 0.$$

定理 2 の証明は，L^∞ 空間に汎弱位相 $\sigma(L^\infty, L^1)$ を入れた位相空間に関する性質をいくつか用いることもあり，かなり難解であることが知られている．「確率解析（stochastic calculus）を用いた解りやすい証明があるだろう」「たとえそれは無理でも，少なくとも ELMM の存在と同値な確率解析的性質があるだろう」という予想が出されたが，次の命題によって，ほぼ不可能だろうと思われるようになった．

命題 4 （Delbaen & Schachermayer ［6］ より） 以下の諸性質をすべて満たす

連続セミマルチンゲール S の例が存在する．

- S は structure condition を満たす．つまり，S のセミマルチンゲール分解を $S=S_0+M+A$ と記すとき
$$dA_t=d\langle M\rangle_t h_t$$
を満たす $\mathbb{R}^d$ 値可予測過程 h が存在し，さらに
$$\int_0^T h'_t\, d\langle M\rangle_t h_t<\infty \quad \text{a.s.}$$
ただし h'_t は h_t の転置を表す．（この structure condition が成り立てば，局所マルチンゲール $L:=\mathcal{E}(-h\cdot M)$ は値が正であり，さらに LS も局所マルチンゲールになることを伊藤の公式を用いて確かめることができる．ただし $\mathcal{E}$ は stochastic exponential を表す．）

- S の ELMM（Q と記すことにする）が存在するが，上記の L はマルチンゲールでない，つまり $\dfrac{dQ}{dP}=L_T$ とはなり得ない．

このうち structure condition は確率解析的に見て極めて自然な性質なので，命題4は驚きをもって迎えられた．この命題は，確率解析だけを用いて定理2自体を証明するのが不可能（に近い）ということを意味しているが，「それならば，関数解析に頼らず確率解析だけを用いることによって，定理2の性質の中でどこまでを証明できるか理解したい」という問題意識を持って考察を進めた結果，次の結果（定理5と命題6）を得た．定理5は確率解析だけを用いて証明できる．

定理5（Takaoka [17]）[7]　S の経路が連続であると仮定するとき，次の3性質は同値である．

1. admissible な H^n たちが
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}(H^n\cdot S)_t^-=0 \quad \text{in } L^\infty$$
を満たせば必ず
$$\lim_{n\to\infty}(H^n\cdot S)_T^+=0 \quad \text{in probability.}$$

2. LS が局所マルチンゲールになるような，$\mathbb{R}_{++}$値局所マルチンゲール L が存在する.
3. S は上記の structure condition を満たす.

この定理5の1番目と2番目の性質は，定理2の対応物よりもそれぞれ少し弱くなっていることに注意されたい．2番目の性質から1番目の性質を導く部分は S の経路が連続でない場合も証明できるので，定理5全体を S の経路が連続とは限らない場合へ拡張したいと考え，現在試みている.

またこの定理5を念頭に置くと，定理2は次のように捉え直すことができる.

命題6　S の経路が連続であり，定理5の3つの性質が満たされていると仮定する．以下，$L:=\mathcal{E}(-\lambda\cdot M)$ としておく．このとき，次の5条件は同値である.

1. S の ELMM が存在する.
2. L をマルチンゲールにするような M の ELMM が存在する.
3. L_T-1 が（M の確率積分の結果の中で）極大元である.
4. S が NA である.
5. S が NFLVR である.

この命題の証明は $4\Leftrightarrow 5$ および $1\Rightarrow 4\Rightarrow 3\Rightarrow 2\Rightarrow 1$ と示していくのだが，このうち関数解析を用いるのは $3\Rightarrow 2$ を示す箇所だけである．マルチンゲールと局所マルチンゲールの違いを確率解析（stochastic calculus）だけを用いて調べるのは易しくないこともあって，この $3\Rightarrow 2$ の部分は確率解析だけでは証明できないと思われるが，今後，この部分の解りやすい証明を考えることにより，定理2自体の解りやすい証明にもつなげたいという希望がある.

4　その他

証券数が非可算無限という設定は金利市場をモデル化する時に現れるし，また可算無限の設定も保険数学とのつながりの上から興味深い話題だと思われるが,

これらの設定下での基本定理に関してはDe Donno & Pratelli［3］［4］など少数の結果があるのみで，研究は初期段階にあると言える．金利市場の一般的な数理モデルを議論するときは，証券数が有限のケースとの「類推」を基にリスク中立確立の存在を仮定してから議論を始めることが多いのが現状である．

1）「元手ゼロから出発し，確率1で正の儲けを生む取引」と定義されることが多いが，より正確に述べると「元手ゼロから出発し，確率1で非負の儲けを生み，さらに正の儲けが出る確率がゼロでないような取引」を示す．
2）第1基本定理および第2基本定理と呼び分けるのは，筆者の知る限りではShiryaevの本［15］が最初のようである．
3）本稿の再校段階で，F. Delbaen氏から，定理5の内容の半分以上はChoulli, T. & C. Stricker : Deux applications de la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe, *Séminaire de Probabilités XXX,* LNM 1626, Springer (1996), pp.12-23で既に証明されていることを教えて頂いた．よってこの部分は彼らの定理の解説と考えて下さい．
4）行列の言葉を用いて主張が述べられることも多い．
5）停止時刻の増大列が存在し，その停止時刻で止めればSが有界であるということ．Sの経路が連続ならば局所有界である．
6）例えば，定理2の主張は測度変換について不変な形だが，Stricker〔16〕の定理はそうなっていない．
7）上記の注3）を参照．

参考文献

［1］Baxter, M. & A. Rennie : *Financial Calculus*. Cambridge Univ. Press, 1996.（日本語版あり）
［2］Dalang, R. C., A. Morton & W. Willinger : Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stachastics and Stoch. Reports* 29 (1990), 185-201.
［3］De Donno, M. & M. Pratelli : On the use of measure-valued strategies in bond markets. *Finance and Stochastics* 8 (2004), 87-109.
［4］――― : Stochastic integration with respect to a sequence of semimartingales. Preprint.
［5］Delbaen, F. &W. Schachermayer : A general version of the fundamental the-

orem of asset pricing, *Mathematische Annalen* 300 (1994), 463–520.

[6] ———— : A simple counter-example to several problems in the theory of asset pricing, *Mathematical Finance* 8 (1998), 1–11.

[7] 藤田岳彦『ファイナンスの確率解析入門』講談社2002年.

[8] Harrison, J. M. & D. M. Kreps : Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. Econom. Theory* 20 (1979), 381–408.

[9] Harrison, J. M. & S. R. Pliska : Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stachastic Processes and Their Applications* 11 (1981), 215–260.

[10] Hull, J. : *Options, Futures, and Other Derivatives*, Fifth edition. Prentice-Hall, 2002. (日本語版『フィナンシャルエンジニアリング』金融財政事情研究会)

[11] Kreps, D. M. : Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities. *J. of Mathematical Economics* 8 (1981), 15–35.

[12] Lamberton, D. & B. Lapeyre : *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 1996. (日本語版『ファイナンスへの確率解析』朝倉書店)

[13] 蓑谷千凰彦『よくわかるブラック・ショールズモデル』東洋経済新報社2000年.

[14] Rockafellar, R. T. & R. Wets : *Variational Analysis*. Springer 1998.

[15] Shiryaev, A. N. : *Essentials of Stochastic Finance*. World Scientific, 1999.

[16] Stricker, C. : Arbitrage et lois de martingale. *Ann. Inst. H. Poincaré* 26 (1990), 451–460.

[17] Takaoka, K. : A remark on Delbaen and Schachermayer's fundamental theorem of asset pricing. Preprint.

(一橋大学大学院商学研究科助教授)