

# 分散変動モデルによる 日経225オプション価格の実証分析 ～ ARCH, ARCH-t, SVモデルによる比較～\*

竹 内 明 香<sup>†</sup>

## 1 はじめに

Black / Scholes (1973) によって発表されたオプション価格モデル (以下BSモデル) は、非常に厳しい条件の下で導出されたモデルである。特にボラティリティに関しては、オプションの満期まで一定であるという仮定をおいている。しかし現実には、ボラティリティが時間を通じて変化していることが知られており、BSモデルの仮定は適していない。さらにボラティリティはショックの持続性が高いということ、株価が上がった翌日よりも下がった翌日のほうが大きくなるということ (ボラティリティの非対称性) も経験的な事実として知られている。またBSモデルでは収益率の分布に正規分布を仮定しているが、正規分布より裾の厚い分布に収益率の分布が従うということも指摘されている。本論では、より現実的なボラティリティ変動モデルを用いることでオプション価格予測の精度が向上するか検証を行った。

原資産のボラティリティに関するモデルはARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 型モデルとSV (Stochastic Volatility) モデルに分けることが可能である。本論文ではARCH型モデルの中の代表的な4つのモデルについて

---

\* 本論文は一橋大学へ提出した修士論文を修正したものである。作成にあたり一橋大学大学院経済学研究科山本拓教授、同研究科斯波恒正教授、同研究科高橋一教授、一橋大学経済研究所加納悟教授、同研究所渡部敏明教授には多岐にわたりご指導をいただいた。日本大学経済学部三井秀俊専任講師にも有益なご助言を頂いた。以上の方々をはじめとして、本論文の執筆を支えてくださった数多くの方々に対し、ここに改めて深い感謝の意を表す次第である。尚、本論文における責任は全て筆者である私に帰するものである。

† 一橋大学大学院経済学研究科博士課程, E-mail: ed031005@srv.cc.hit-u.ac.jp

て比較分析を行っている。本論文で使用したモデルについて簡潔に紹介する。Bollerslev (1986) が提案したGARCH (generalized ARCH) モデルは、ボラティリティのショックが持続することを考慮にいたしたモデルである。ショックの持続性と共に、ボラティリティの特徴の一つである非対称性を考慮したモデルには、Nelson (1991) によるEGARCH (exponential GARCH) モデル、Glosten / Jagannathan / Runkle (1993) によるGJRモデル、Sentana (1995) によるQGARCH (quadratic GARCH) モデルがある。これら三つのモデルではそれぞれ異なる形でボラティリティの非対称性を表す項が含まれている。以上のようなARCH型モデルを用いた実証分析は数多く行われてきた。オプション価格の予測について実証分析を行ったCrouhy (1994)、三井 (2000) ではARCH型モデルがBSモデルよりも優れたパフォーマンスを上げているという結果を得ている。ARCH型モデルの誤差項の分布として正規分布より裾の厚い分布に着目したBollerslev (1987)、Watanabe (2000) では収益率の分布としてt分布のほうがフィットがよいという結果を得ている。また渡部 (2002) ではt分布を仮定したGARCH、GJR、EGARCHモデル (t分布を仮定したARCH型モデルをGARCH-t、GJR-t、EGARCH-tモデルと表記する。本論文ではこれに対応し正規分布を仮定したARCH型モデルをGARCH-n、GJR-n、EGARCH-nモデルとして表記している。) を最尤推定しコールオプション価格の予測を行っている。渡部 (2002) では誤差項の分布をt分布としても、オプション価格の予測力はよくなるという結果を得ている。

もう1つのボラティリティ変動モデルであるSVモデルでは $t-1$ 期に $t$ 期のボラティリティが未知なため簡単に尤度を求めることができない<sup>1)</sup>。本論文では、SVモデルの推定にあたりHarvey / Ruiz / Shephard (1994) による擬似最尤法 (QML : Quasi-Maximum Likelihood estimation) の手法を用いた。SVモデルとBSモデルの比較を行った実証分析の結果は一致していない。三井 (1998) では、

---

1) SVモデルについてはHul / White (1987) のように数値実験による分析が行われていた。しかしその後の研究により、QML (Harvey / Ruiz / Shephard (1994)、Harvey / Shephard (1994)、Watanabe (1997) 参照)、MM (Scott (1987)、Wiggins (1987) 参照)、GMM (Melino / Turnbull (1990)) 参照、MCMC (Shephard / Pitt (1997)、Kim / Shephard (1998) 参照) などの推定方法が考えられている。

短期のオプション価格予測ではSVモデルが良くなるとはいえないという結果を、Scott (1987) ではSVモデルが優れているとの結果を、Wiggins (1987) ではほとんど変わらないとの結果を得ている。

以上のように、オプション価格推定に関しては数多くのモデルと推定方法<sup>2)</sup>があり、どのモデルをどの手法で推定すればより良い予測価格を得られるのか分かっていない。本論文では、原資産のボラティリティ・モデルとして誤差項に正規分布を仮定したARCH-n型モデルとt分布を仮定したARCH-t型モデルを最尤法を用いて推定した。そして原資産のボラティリティ・モデルでは正規分布とt分布のどちらをARCH型モデルの誤差項の分布に仮定するほうが適切か検定を行っている。また、ARCH型モデルと比較するためにSVモデルをカルマン・フィルターによるQMLを用いて推定した。推定した原資産ボラティリティ・モデルからオプション価格を制御変数法を合わせたモンテカルロ法によってシミュレーションしている。このような条件の下でオプション価格を予測するには、ARCH-n型モデルとARCH-t型モデルのどちらが適しているか、ボラティリティのモデルとしてはGARCH、EGARCH、GJR、QGARCHモデルのどのモデルが適切か、ARCH型モデルとSVモデルではどちらが適切か比較を行っている。

本論文の以下の構成は次の通りである。第2節ではボラティリティ変動モデルについて述べている。第3節ではオプション価格のモンテカルロ・シミュレーション方法を説明する。またシミュレーション結果からモデル比較を行っている。最後に第4節では分析結果のまとめと今後の課題について述べる。

## 2 ボラティリティ変動モデル

本論文では日経225の日次データ及び、そのオプション価格を使用した。推定に使用したオプションデータは1996年12月から2002年3月に満期を迎えるコール・プットオプションの終値である。コール、プット共に満期までの残存期間が

---

2) 推定方法に注目した実証分析として、三井/渡部(2000)ではマルコフ連鎖モンテカルロ・シミュレーション(MCMC:Markov-chain Monte Carlo)を用いてGARCH、GJR、EGARCHモデルの実証を行っている。ここではGJRモデルのオプション価格予測のパフォーマンスが優れていたとの結果を得ている。

1ヶ月のものを選択している。また安全利子率 $r$ としてコールレートを用いた。日経225のデータ $S_t$ を用い、収益率を

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100 \quad (1)$$

のように定式化した<sup>3)</sup>。原資産過程を推定するために使用した日経225収益率 $R_t$ は1992年11月26日から2002年3月12日まで(標本数2290)である。

## 2.1 ARCH型モデル

### 2.1.1 GARCH-nモデル

投資家がリスク回避的であるならば、危険資産である株価収益率にはリスクプレミアムが存在する。リスクプレミアムがどのような形で存在するのか推定するために、収益率の定式化として

$$R_t = \mu + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$R_t = \mu + \lambda_R R_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

$$R_t = \mu + \lambda_{\sigma^2} \sigma_t^2 + \varepsilon_t \quad (4)$$

$$R_t = \mu + \lambda_{\sigma} \sigma_t + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$R_t = \mu + \lambda_R R_{t-1} + \lambda_{\sigma^2} \sigma_t^2 + \varepsilon_t \quad (6)$$

$$R_t = \mu + \lambda_R R_{t-1} + \lambda_{\sigma} \sigma_t + \varepsilon_t \quad (7)$$

の6つのモデルを考えた。誤差項 $\varepsilon_t$ はGARCH (1,1) モデルに従っているとし、

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t \quad z_t \sim i.i.d.N(0,1) \quad (8)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (9)$$

とする<sup>4)</sup>。推定したいオプションの取引日からT営業日前までの収益率を使用し

- 
- 3) 誤差項にt分布を仮定した場合、正規分布の場合と同様に $R_t$ を定式化することは出来ず、解析的に求めることが出来ない。そのため本論文においては離散型の収益率を用いて分析を行った。
- 4)  $\varepsilon_t$ が正規分布に従うモデルではHamilton (1994) p.663の擬似最尤法の標準誤差を計算している。また、本論の収益率の定式化では $\sigma_t^2$ と $\sigma_t$ のみを説明変数として用いているが、 $\sigma_t^2$ の形で推定することも可能である。しかし、 $\sigma_t^2$ と $\sigma_t$ も有意に推定されなかったこと、

て上記モデルを最尤推定した。具体的に説明すると、1996年12月に満期を迎える残存期間20日のオプション理論価格を計算するためにGARCH-nモデルを一度推定し、1997年1月に満期を迎える残存期間20日のオプション理論価格を計算するためにデータ期間を20日ずらしてGARCHモデルを再度推定する。この過程を繰り返し、推定したいオプションの取引日ごとにGARCH-nモデルの推定を行った。ここでは $T = 1000$ とする。

推定結果から $\lambda_i (i = R, \sigma^2, \sigma)$ は、どの式のどの期間においても有意水準5%で有意に推定されなかった<sup>5)</sup>。 $R_{i-1}, \sigma_i, \sigma_i^2$ が収益率に影響を与えていないことから、(2)式の定式化が最適であるといえる。従って、収益率の定式化として(2)式を選択し以降の分析を進めることとする。誤差項 $\varepsilon_i$ が正規分布に従うGARCH-nモデルのパラメータ推定結果を表1に示す。表1より $\alpha + \beta$ の推定値は非常に1に近く、ボラティリティのショックの持続性が高いという推定結果が得られた。これは先行研究と同様の推定結果である。また先行研究では $\alpha + \beta$ の値が1に近い原因として収益率 $R_i$ の構造変化が指摘されている。本論文のデータでも $R_i$ に構造変化が起きている可能性がある<sup>6)</sup>。また定数項 $\mu$ は全期間で有意水準5%で有意に推定されていないが後半期間からマイナスの値になっている。

3.1節では、本節で推定されたモデルをリスク中立性を仮定したモデルへと変形し、オプション予測価格を計算する。

## 2.1.2 GARCH-tモデル

正規分布よりも裾が厚い分布に株価収益率の分布は従っているという経験則がある。モデルをより現実へ近づけるために、GARCHモデルの誤差項 $\varepsilon_i$ の分布を正規分布からt分布に置き換えて

---

この $\sigma_i^2$ の項を入れることで推定が非常に難しくなることから、本論では $\sigma_i^2$ と $\sigma_i$ のみを説明変数として用いている。

- 5) ここでは収益率の6つのモデルに関する推定結果は省略する。また、本論文では一部の期間の推定結果のみを掲載している。そのほかの推定期間の結果について希望者に提出する(6本の収益率の推定結果は除く)。
- 6) しかし本論では推定に使うデータ期間Tが任意に決められること、ARCH型モデルの誤差項の分布に焦点を絞っていることから、 $R_i$ の構造変化は考慮していない。

表1 GARCH(1,1)-nモデルの推定結果

対数尤度：-1857.701

| $\mu$   | $\omega$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---------|----------|----------|---------|
| -0.004  | 0.123    | 0.079    | 0.873   |
| (0.041) | (0.046)  | (0.017)  | (0.022) |

推定期間は1996/12から2002/03であり、2002年1月の推定結果を抜粋している。括弧内の数値はHamilton (1994) pp.663による擬似最尤法の標準誤差を表している。

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sigma_t z_t & z_t &\sim i.i.d.st - t(m) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

のように定式化した。ここで(10)式の $z_t$ は、分散1で基準化された自由度 $m$ の $t$ 分布に従っているものとする。さらに、オプション価格を予測するためには、リスク中立性を仮定する必要がある。しかし、3.1節で紹介されているDuan (1995)によるモデル変換はARCH-n型モデルには簡単に適応できるが、その他のモデルに適応するのは難しい。そこで、今回の分析期間では、GARCH-nモデルの収益率の式で $\lambda_t(i = R_{t-1}, \sigma_t, \sigma_t^2)$ が有意に推定されず投資家がリスク中立的であると仮定したとしても問題はないと考えられるため、リスク中立性を仮定した原資産過程のパラメータを最尤推定する<sup>7)</sup>。

GARCH(1,1)-tモデルの推定結果を表2に示す。表2より自由度 $m$ は一桁の値で推定された。パラメータ $\beta + \alpha$ の値はGARCH-nモデルの時に比べ大きくなっており、GARCH-tモデルのほうがボラティリティのショックの持続性が高いといえる。

### 2.1.3 その他のARCH型モデル

EGARCH、GJR、QGARCHモデルの3つのモデルについても、GARCH-nモデル、GARCH-tモデルと同様に最尤推定を行った。GARCHモデルはボラティリティ変動のショックの持続性を考慮にいたしたモデルであり、EGARCH、GJR、

7) GARCH-tモデルの対数尤度は、Bollerselv (1987)、Hamilton (1994) 参照。

表2 GARCH(1,1)-tモデルの推定結果

対数尤度：-1844.122

| $\omega$ | $\alpha$ | $\beta$ | $m$     |
|----------|----------|---------|---------|
| 0.110    | 0.069    | 0.888   | 8.426   |
| (0.041)  | (0.016)  | (0.024) | (2.191) |

推定期間は1996/12から2002/03であり、2002年1月の推定結果を抜粋している。括弧内の数値は標準偏差を表す。

QGARCHモデルはさらにボラティリティの変動の非対称性も考慮にいたしたモデルである。各モデルは誤差項 $\varepsilon_t$ の分散 $\sigma_t^2$ の定式化が異なる。EGARCH(1,1)モデルでは、

$$1_n(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \left[ \theta z_{t-1} + \gamma (|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)) \right] + \beta 1_n(\sigma_{t-1}^2) \quad (11)$$

GJR(1,1)モデルでは、

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2) + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (12)$$

QGARCH(1,1)モデルでは、

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (13)$$

となる。GJRモデルの $D_t^-$ は、 $\varepsilon_t < 0$ の時 $D_t^- = 1$ 、 $\varepsilon_t > 0$ の時 $D_t^- = 0$ の値をとるダミー変数である。EGARCHモデルの $\alpha\theta$ 、GJRモデル、QGARCHモデルの $\gamma$ は各モデルの非対称性を表すパラメータである。推定の際の尤度関数はGARCH(1,1)-nモデル、GARCH(1,1)-tモデルと同様に計算できる。

推定結果からEGARCH、GJR、QGARCHモデルで各モデルの非対称性を捕らえるパラメータが有意水準5%で有意に推定されている<sup>8)</sup>。ボラティリティの変動に非対称性が存在するという経験則と整合的である。EGARCHモデルの推定

8) 各モデルの非対称性を捕らえるパラメータはEGARCH-nモデル、EGARCH-tモデルでは、負で有意に推定された。GJR-nモデルでは98.11以降、GJR-tモデルでは全期間正で有意に推定されている。QGARCH-nモデルでは98.12以降から、表9からQGARCH-tモデルでは全期間全て有意に負の数として推定されている。

結果を表3、表4に示す。ARCH-t型モデルでは、ほとんどの期間で尤度 $m$ が1桁の値で推定された。

表3 EGARCH(1,1)-nモデルの推定結果

対数尤度：-1851.497

| $\mu$   | $\omega$ | $\alpha \theta$ | $\alpha \gamma$ | $\beta$ |
|---------|----------|-----------------|-----------------|---------|
| -0.046  | 0.042    | -0.087          | 0.151           | 0.957   |
| (0.148) | (0.017)  | (0.025)         | (0.036)         | (0.015) |

推定期間は1996/12から2002/03であり、2002年1月の推定結果を抜粋している。括弧内の数値はHamilton(1994)pp.663による擬似最尤法の標準誤差を表している。

表4 EGARCH(1,1)-tモデルの推定結果

対数尤度：-1840.625

| $\omega$ | $\alpha \theta$ | $\alpha \gamma$ | $\beta$ | $m$     |
|----------|-----------------|-----------------|---------|---------|
| 0.030    | -0.074          | 0.125           | 0.966   | 9.100   |
| (0.013)  | (0.022)         | (0.037)         | (0.013) | (2.504) |

推定期間は1996/12から2002/03であり、2002年1月の推定結果を抜粋している。括弧内の数値は標準偏差を表す。

それぞれのモデルの推定結果から、AIC (Akaike's information criterion)、SBIC (Swart's Bayesian information criterion) を比較した。表5よりARCH-t型モデルではQGARCH-tモデルが最も小さなAIC、SBICの値を取っている。また、AICではEGARCH-nモデルが最も小さく、SBICではQGARCH-nモデルが最も小さい値となり、AICとSBICで異なるモデルが選択されている。原資産のボラティリティ・モデルとしてはQGARCH-tモデル、QGARCH-nモデル、EGARCH-nモデルがデータに対するフィットが良いといえる。

## 2.2 誤差項の分布の検定

実際に、正規分布とt分布のどちらの分布にARCH型モデルの誤差項が従っているか、 $\chi^2$ 検定を用いた適合度検定を行った。この検定では帰無仮説の下で、任意の刻み区間( $j = 1, 2, \dots, J$ )のそれぞれにどれだけの確率が割り当てられるのかを計算する。実際には以下の手順をふむ。まず区間 $j$ に対する確率 $p_j$ を帰無仮説の分布から計算し、サンプルサイズ $T$ のデータがある時に区間 $j$ に対応する期待頻度( $= T \times p_j$ )を求める。期待頻度と標本から、統計量



表 5 AIC, SBIC

|        | AIC     |         | SBIC    |         |
|--------|---------|---------|---------|---------|
|        | n       | t       | n       | t       |
| GARCH  | 3763.76 | 3715.87 | 3763.76 | 3715.87 |
| EGARCH | 3718.99 | 3716.42 | 3758.26 | 3716.42 |
| GJR    | 3757.34 | 3714.14 | 3757.34 | 3714.14 |
| QGARCH | 3728.57 | 2563.08 | 3728.57 | 2563.08 |

推定期間は1996/12から2002/03であり、2002年1月の推定結果を抜粋している。  
nとtはそれぞれ、ARCH-n型モデルとARCH-t型モデルを表している。

$$Q = \sum_{j=1}^J \frac{(\text{区間}j\text{に含まれる標本の数} - T \times p_j)^2}{T \times p_j}$$

を使って検定を行う。基準化された残差 $z_t$ が標準正規分布に従うモデルでは帰無仮説 $H_0: z_t \sim i.i.d.N(0,1)$ を、 $z_t$ がt分布に従うモデルでは帰無仮説 $H_0: z_t \sim i.i.d.st - t(m)$ を検定している。帰無仮説の下で全ての区間の確率 $p_j$ が10%になるように標準正規分布とt分布を区切り度数を計算した。

誤差項がt分布に従うとする帰無仮説はどの期間でも有意水準10%で棄却されていない。誤差項が正規分布に従うとする帰無仮説は、1998年にGARCH-nモデル、GJR-nモデルが10%有意水準で棄却され、1999年にGARCH-nモデルが有意水準10%で棄却された。一部の結果を抜粋し表6に示す。

そこで、サンプルサイズを $T = 2000$ と増やし、その残差について検定を行った。 $T = 2000$ とした適合度検定結果は表6にまとめられている。期間全体でパラメータを固定した場合、誤差項が正規分布に従うとする帰無仮説は全てのモデルで有意水準5%で棄却された。また誤差項がt分布に従うとする帰無仮説は全てのモデルで有意水準10%でも棄却されなかった。より詳細にみると正規分布に従うとする帰無仮説は、EGARCH、QGARCH、GJRモデルでは5%有意水準で、GARCHモデルでは1%有意水準で棄却されている。EGARCH、QGARCH、GJRモデルとGARCHモデルの違いはボラティリティ変動の非対称性を捕らえているかどうかである。EGARCH、QGARCH、GJRモデルのほうが誤差項の分布が正規分布に近づいているという本論文の検定結果から、収益率の分布の裾が

表6 適合度検定

|        | (T=1000) |         | (T=2000) |         |
|--------|----------|---------|----------|---------|
|        | $H_0:N$  | $H_0:T$ | $H_0:N$  | $H_0:T$ |
| GARCH  | 13.14    | 7.15    | 21.87    | 5.74    |
| EGARCH | 9.99     | 9.84    | 17.22    | 10.39   |
| GJR    | 10.42    | 9.33    | 19.82    | 8.26    |
| QGARCH | 9.87     | 9.86    | 19.02    | 9.17    |

推定期間は1996/12から2002/03である。T=1000の結果では2002年1月の推定結果を抜粋している。各有意水準に対応する棄却域の臨界点は、帰無仮説の誤差項の分布が正規分布( $H_0:N$ )であるとき有意水準10%で14.08、有意水準5%で16.92、有意水準1%で21.67となる。帰無仮説の誤差項の分布がt分布( $H_0:T$ )であるとき、有意水準10%で13.36、有意水準5%で15.51、有意水準1%で20.09となる。

厚くなる原因の一つとしてボラティリティの非対称性があげられると考えられる。しかし、 $\chi^2$ 検定では検定時の区分をどのように設定するかにより結果が異なり、恣意性が存在する。そこでKolmogolov Smirnov検定を行った。帰無仮説の下での変数 $x$ の累積分布関数を $F_0(x)$ とする。T個の残差 $x_1 \cdots x_T$ を並び替えたものを $z_1 < z_2 < \cdots < z_T$ とする。この時、 $x$ の累積分布関数はデータから

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & x < z_1 \\ \frac{k}{T} & z_k \leq x < z_{k+1} \\ 1 & z_T \leq x \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, T-1$$

のように推定される。検定する仮説は、

$$H_0: F_0(x) = F_T(x) \quad H_1: F_0(x) \neq F_T(x)$$

ARCH-n型モデルの場合には $F_0(x)$ は正規分布の累積分布関数、ARCH-t型モデルの場合にはt分布の累積分布関数となる<sup>9)</sup>。 $F_T(x)$ と $F_0(x)$ が最も乖離している箇所

$$D_T = \sup_x \{|F_T(x) - F_0(x)|\}$$

9) Tanis (2001) pp.534参照。棄却域はHogg / Tanis (2001) p.664の表を用いた。

を選び検定統計量を求めた。

$T = 1000$ とした場合のKolmogorov Smilnov検定結果をまとめる。1998年と1999年に対応する期間では GARCH-nモデルの場合、帰無仮説が有意水準10%で棄却された。ARCH-t型モデルでは全期間有意水準5%で帰無仮説は棄却されていない。一部の結果を抜粋し表7にまとめている。

$T = 2000$ とした場合のKolmogorov Smilnov検定結果は表7に示されている。ARCH-t型モデルでは、有意水準10%で $H_0$ は棄却されなかった。GARCH-nモデルでは有意水準1%で、GJR-nモデル、EGARCH-nモデルでは有意水準5%で、QGARCH-nモデルでは有意水準10%で $H_0$ は棄却された。他のモデルに比べQGARCH-nモデルの誤差項の分布が正規分布に近いといえる。

これらの検定結果から、ARCH-t型モデルはARCH-n型モデルよりも、より適切に収益率の動きを表しているといえる。

表7 Kolmogorov Smirnov検定

|        | (T=1000) |         | (T=2000) |         |
|--------|----------|---------|----------|---------|
|        | $H_0:N$  | $H_0:T$ | $H_0:N$  | $H_0:T$ |
| GARCH  | 0.0392   | 0.0322  | 0.0381   | 0.0243  |
| EGARCH | 0.0320   | 0.0306  | 0.0317   | 0.0237  |
| GJR    | 0.0343   | 0.0308  | 0.0321   | 0.0260  |
| QGARCH | 0.0299   | 0.0310  | 0.0290   | 0.0260  |

推定期間は1996/12から2002/03である、 $T=1000$ の結果では2002年1月の推定結果を抜粋している。 $H_0:N$ は誤差項が正規分布に従うという帰無仮説を表し、 $H_0:T$ は誤差項がt分布に従うという帰無仮説を表す。棄却域の臨界点は、有意水準10%のとき0.0273、有意水準5%のとき0.0304、有意水準1%のとき0.0364となる。

### 2.3 SVモデル

ARCH型モデルとオプション価格予測について比較を行うため、SVモデルを推定する。ボラティリティの変動に不確実性を考慮したSVモデルは

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sigma_t z_t & z_t &\sim i.i.d.N(0,1) \\ 1_n \sigma_t^2 &= \gamma + \phi 1_n \sigma_{t-1}^2 + \eta_t & \eta_t &\sim i.i.d.N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (14)$$

のように表せる。しかし、SVモデルでは $t$ 期における $\varepsilon_t$ の分散 $\sigma_t^2$ が確率変数となるため、ARCH型モデルのように簡単に尤度を求めることができない。SVモ

デルの推定方法の1つとして、Harvey / Ruiz / Shephard (1994) では擬似最尤法を用いてパラメータを推定する方法が提案された。具体的にはSVモデルを状態空間モデルへ変形し、変形したモデルの誤差項の分布を正規近似してカルマン・フィルター適用する<sup>10)</sup>。SVモデルの推定結果を表8に示した。 $\gamma, \phi, \sigma_\eta$ は全期間で有意水準5%で有意に推定された。

### 3 オプション価格モデル

#### 3.1 オプション価格シミュレーション

ARCH-t型モデル、SVモデルでは、投資家が危険中立的であると仮定してモデルを推定した。しかしARCH-n型モデルでは、危険中立性の仮定を置いていない。このような場合にモデルを変換する方法として、Duan (1995) では、局所リスク中立性という概念を提案している<sup>11)</sup>。本論文でもDuan (1995) の方法を用いてARCH-n型モデルを局所リスク中立性を仮定したモデルへと変換する。GARCH (1, 1) -nモデルの場合は、

$$R_t = r + \xi_t$$
$$\xi_t = \sigma_t z_t \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (15)$$

$$\varepsilon_t = \xi_t + r - \mu \quad (16)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (17)$$

となる。原資産収益率 $R_t$ の平均がこの変換により安全利子率 $r$ に変わっている。EGARCH-n、GJR-n、QGARCH-nモデルについても同様の変換を行った<sup>12)</sup>。

以下ではリスク中立性を仮定した原資産のモデルからシミュレーションによりオプション価格を求めていく。現時点を $T+1$ 期とし、オプション満期を $T+\tau$

10) カルマン・フィルターによる推定方法についてはHamilton (1994)、渡部 (2000) pp.120 参照。

11) 局所リスク中立性についてはDuan (1995) 参照のこと。また離散型収益率の局所リスク中立性を用いた実証分析としてBauwens / Lubrano (2002) がある。

12) それぞれの局所リスク中立性を仮定したモデルへの変換は、

$$R_t = r + \xi_t$$
$$\xi_t = \sigma_t z_t \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1)$$

表 8 SVモデルの推定結果

対数尤度：-2224.506

| $\gamma$  | $\phi$    | $\sigma_{\eta}^2$ |
|-----------|-----------|-------------------|
| 0.012     | 0.984     | 0.005             |
| (0.00006) | (0.00007) | (0.00009)         |

推定期間は1996/12から2002/03であり、2002年1月の推定結果を抜粋している。括弧内の数値はHamilton (1994) pp.663による擬似最尤法の標準誤差を表している。

期（残存期間を $\tau$ 期間）として説明する。

まず最初に各期の誤差項に乱数を発生させ逐次計算することで、 $T+1$ 期から $T+\tau$ 期までの $R_t$ を求める<sup>13)</sup>。シミュレーションによって発生させた $R_t$ を用いて満期の株価を

$$S_{T+\tau} = S_T \prod_{t=T+1}^{T+\tau} (1 + R_t) \tag{18}$$

のように予測する。満期におけるコールオプションの価格は、権利行使価格を $K$ とすると、

$$C_{t+\tau} = \max(S_{T+\tau} - K, 0) \tag{19}$$

となる。これで1つのコールオプション価格をシミュレーションすることができた。本論文ではさらにN回のシミュレーションを行いN個の満期におけるオプション価格を計算する。その平均を取ったものを $T+1$ 期まで割り引くと、

$$\varepsilon_t = \xi_t + r - \mu$$

EGARCH-nモデル.

$$I_n(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \left[ \theta z_{t-1} + \gamma (|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)) \right] + \beta I_n(\sigma_{t-1}^2)$$

GJR-nモデル.

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2) + \beta \sigma_{t-1}^2$$

QGARCH-nモデル.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$$

13) 渡部 (2000) 参照。

$$C_T = (1+r)^{-\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_{T+\tau,j} \quad (20)$$

今回は  $N = 10000$  としてシミュレーションした。さらにより精度の高い推定値を計算するため、制御変数法を用いて推定価格の調整を行った。制御変数としてボラティリティー一定を仮定したBS価格を用いている。BSの公式から計算されたオプション価格を  $C^{BS}$ 、ボラティリティー一定を仮定した原資産過程を使ってシミュレーションしたオプション価格を  $C_{BS}$  として表す。以上の変数を用いて制御変数法を使い分散を減少させたオプション価格は、

$$\hat{C}_T = \psi C^{BS} + (C_T - \psi C_{BS}) \quad (21)$$

$$\psi = \frac{Cov(C_T, C_{BS})}{Var(C_{BS})}$$

となる。本論文では、(21)式によるオプション価格をARCH型モデル、SVモデルによるオプション推定価格とする。プットについてもコールと同様に計算できる。<sup>14)</sup>

### 3.2 オプション価格分析

本論文では先行研究に従いMER (Mean Error Ratio) とRMSE (Root Mean Squared Error Ratio)

14) 制御変数であるBS価格は、原資産収益率が分散一定で、以下の式に従っている場合の価格を考える。

$$R'_t = r' - \frac{1}{2} \sigma^2 + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma z_t \quad z_t \sim i.i.dN(0, 1) \quad (24)$$

$r'$  と  $R'_t$  は連続時間で定義された安全利率と対数収益率を表す。 $\sigma$  は時間  $t$  に依存しなく一定である。 $\sigma^2$  の値として、直前20営業日前までの  $R'_t$  の分散 (ヒストリカル・ボラティリティー) を用いる。また  $z_t$  はARCH型モデル、SVモデルで発生させた乱数  $z_t$  と同じ物を用いている。ARCH型、SVモデルと同様に  $N$  回のシミュレーションを行い、その平均を求めオプション価格とする。詳しくはRoss (2001) pp.139を参照。

$$MER = \frac{\sum_{i=1}^M \frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i}}{M} \quad (22)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \left( \frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i} \right)^2}{M}} \quad (23)$$

という二つの統計量を用いてオプション価格の比較を行う。ここで、 $\hat{C}_i$ が推定価格、 $C_i$ が実際のオプションの市場価格を示す。 $M$ は推定されたオプション価格の数であり、コールは $M = 648$ 、プットは $M = 703$ であった。オプション推定価格の結果を表9にまとめる。

表9より、BSモデルオプション価格とARCH型モデル、SVモデルを比較すると、コールではARCH型モデル、SVモデルのほうがRMSEは小さく、分散変動モデルの方がより現実の価格を説明できていると言える。プットではBSモデルのRMSEよりARCH型モデルのRMSEの方が小さい。ARCH-n型モデル同士で比較をすると、コールでは最もRMSEが小さいものはQGARCH-nモデルであり、QGARCH-nモデルが最も良く現実のオプション価格を予測できているといえる。プットではEGARCH-nモデルが最もRMSEが小さくなった。また非対称性を考慮したARCH-n型モデルの方がGARCH-nモデルよりもRMSEが小さい。次にARCH-t型モデル同士を比較すると、コールの場合QGARCH-tモデルのRMSEが、プットの場合はGJR-tモデルのRMSEが最も小さい。またARCH-n型モデルと同様に非対称性を考慮したモデルの方がGARCH-tモデルよりもRMSEが小さくなった。収益率の分布をt分布へ修正したことでRMSEが減少したのは、プットではGARCH、GJRモデルであった。コールではRMSEが減少したモデルはない。またSVモデルではコールの場合ARCH-n型モデルよりもRMSEが大きく、プットの場合はARCH型モデルよりもRMSEが大きくなっている。全体での比較を行うと、コールではQGARCH-nモデルとQGARCH-tモデルが、プットではGJR-tモデルが最も予測力が高くなっている。MERを比較すると、BSモデル、GARCH-nモデル、GARCH-tモデルでは正の値をとり、コールのその他のモデルでは負の値をとっている。非対称性を考慮したモデルとSVモデルでは負のバイアスが強いと言える。プットでは全てのモデル

表9 オプション推定価格による比較  
 予測期間：1996/12-2002/03

|        | CALL OPTION |       | PUT OPTION |       |
|--------|-------------|-------|------------|-------|
|        | MER         | RMSER | MER        | RMSER |
| BS     | 0.050       | 0.759 | -0.012     | 0.451 |
| GARCH  | 0.021       | 0.404 | -0.015     | 0.395 |
| EGARCH | -0.083      | 0.399 | -0.018     | 0.327 |
| GJR    | -0.092      | 0.392 | -0.017     | 0.330 |
| QGARCH | -0.119      | 0.391 | -0.018     | 0.337 |
| GARCH  | 0.049       | 0.431 | -0.014     | 0.376 |
| EGARCH | -0.101      | 0.402 | 0.018      | 0.328 |
| GJR    | -0.077      | 0.398 | -0.017     | 0.317 |
| QGARCH | -0.109      | 0.391 | -0.017     | 0.341 |
| SV     | -0.136      | 0.413 | -0.019     | 0.461 |

予測したオプションは1996年12月から2002年3月に満期を迎えるオプションである。

でMERが負の値となった。

以上の結果からARCH型モデルの誤差項の分布にt分布を仮定し、よりフィットのよい原資産収益率のモデルを推定しても、オプションの推定価格がより正確に現実の価格を説明するとはいえない。しかしボラティリティの非対称性を考慮することによってはオプション価格の予測は精度が上がるといえる。

より詳細にオプション価格予測誤差を見るために、マネネスごとに分類し比較を行った<sup>15)</sup>。コールのマネネスごとの結果を表10、表11に示す。MERをみると、ARCH型モデル、SVモデル共にDOTM (deep-out-of-the money) になるほど負のバイアスが強くなることが見て取れる。また、EGARCH-n、SVモデル以外ではATM (at-the-money) におけるMERが最も小さい。RMSERは全てのモデルがDITM (deep-in-the-money) になるほど値が小さくなっており、DITMではモ

15) マネネスとは $T+1$ 期の原資産価格を権利行使価格 $K$ で割ったものである。Bakshi / Cao / Chen (1997) に従い5段階に分類する。 $0.97 < S/K < 1.03$ の地点をat-the-moneyと呼ぶ。また、コールでは $0.91 < S/K < 0.97$ の時をout-of-the money、 $S/K < 0.91$ の時をdeep-out-of-the money、 $1.03 < S/K < 1.09$ の時をin-the-money、 $S/K > 1.09$ の時をdeep-in-the-money、プットではその逆に $0.91 < S/K < 0.97$ の時をin-the-money、 $S/K < 0.91$ の時をdeep-in-the-money、 $1.03 < S/K < 1.09$ の時をout-of-the money、 $S/K > 1.09$ の時をdeep-out-of-the moneyとして分類した。



表10 マネネスごとのコール・オプション推定価格のMER比較

|          | DOTM   | OTM    | ATM    | ITM   | DITM  |
|----------|--------|--------|--------|-------|-------|
| BS       | 0.152  | 0.027  | 0.006  | 0.022 | 0.023 |
| GARCH-n  | -0.019 | 0.080  | 0.008  | 0.020 | 0.021 |
| EGARCH-n | -0.450 | 0.002  | 0.037  | 0.042 | 0.026 |
| GJR-n    | -0.428 | -0.039 | 0.016  | 0.034 | 0.026 |
| QGARCH-n | -0.492 | -0.096 | 0.005  | 0.033 | 0.025 |
| GARCH-t  | 0.102  | 0.085  | 0.004  | 0.021 | 0.022 |
| EGARCH-t | -0.433 | -0.073 | 0.007  | 0.035 | 0.026 |
| GJR-t    | -0.350 | -0.050 | 0.009  | 0.035 | 0.026 |
| QGARCH-t | -0.414 | -0.116 | -0.014 | 0.030 | 0.024 |
| SV       | -0.503 | -0.083 | -0.047 | 0.000 | 0.017 |

予測したオプションは1996年12月から2002年3月に満期を迎えるオプションである。各マネネスごとのコールオプション推定価格の標本数はDOTMの時149個、OTMの時125個、ATMの時117個、ITMの時101個、DITMの時156個である。

表11 マネネスごとのコール・オプション推定価格のRMSE比較

予測期間：1996/12-2002/03

|          | DOTM  | OTM   | ATM   | ITM   | DITM  |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| BS       | 1.474 | 0.587 | 0.204 | 0.113 | 0.079 |
| GARCH-n  | 0.762 | 0.350 | 0.131 | 0.091 | 0.076 |
| EGARCH-n | 0.743 | 0.364 | 0.143 | 0.101 | 0.077 |
| GJR-n    | 0.724 | 0.370 | 0.141 | 0.098 | 0.078 |
| QGARCH-n | 0.737 | 0.345 | 0.133 | 0.096 | 0.077 |
| GARCH-t  | 0.823 | 0.354 | 0.132 | 0.091 | 0.077 |
| EGARCH-t | 0.748 | 0.369 | 0.143 | 0.098 | 0.077 |
| GJR-t    | 0.736 | 0.373 | 0.147 | 0.100 | 0.078 |
| QGARCH-t | 0.729 | 0.358 | 0.136 | 0.094 | 0.077 |
| SV       | 0.749 | 0.407 | 0.189 | 0.094 | 0.076 |

予測したオプションは1996年12月から2002年3月に満期を迎えるオプションである。各マネネスごとのコールオプション推定価格の標本数はDOTMの時149個、OTMの時125個、ATMの時117個、ITMの時101個、DITMの時156個である。

デル間の差はない。BSモデルではOTM (out-of-the money)、DOTMのRMSEが他のモデルに比べて大きくなっていることが分かる。プットについても類似の結果が得られている。これらのことから、オプション価格モデルの違いはマネネスによって異なり、OTMになるほどボラティリティ変動や、その非対称性、収益率の分布の仮定というモデルの修正による予測力の変化が現れている。特に

DITMではBSモデルでも分散変動モデルと同等のオプション価格に対する予測力がある。

## おわりに

コール・プットの両オプションで、BSモデルよりもARCH型モデルのほうがオプション価格を正確に予測できた。さらにボラティリティの非対称性を考慮したARCH型モデルがより正確にオプション価格を予測できる。SVモデルとARCH-n型モデルを比較するとARCH-n型モデルから計算されたオプション価格のほうが現実のオプション価格に近いという結果が得られた。原資産収益率過程の推定結果からは、収益率のモデルとしてARCH型モデルの誤差項の分布に正規分布を仮定するよりもt分布を仮定したほうがフィットが良いことが分かったが、オプション価格モデルでは、モデルによってはt分布を仮定したほうが予測力が下がるという結果が得られている。全てのモデルの中でコールでは誤差項に正規分布を仮定したQGARCH-nモデルとt分布を仮定したQGARCH-tモデルが、プットではt分布を仮定したGJR-tモデルが最も予測力が高かった。コールの結果は原資産のモデルの尤度から計算されたAICとSBICの結果と整合的である。しかしプットは、原資産のモデルの尤度から計算されたAICとSBICの結果と異なっており、GJR-tモデルが原資産データに最もフィットしたモデルではない。現実では投資家が満期の株価を予測して取引を行い、オプション価格が決定される。従って、各投資家がどのモデルを用いて予測を行ったかということにオプション価格は依存していると考えられる。現実の株価をより正確に表現できるモデルが現実のオプション価格をより正確に予測できるわけではなく、投資家が用いているモデルに影響されて現実のオプション価格が決定される可能性がある。

また全てのモデルで、DIMの時のオプション価格の予測力がもっとも高く、マネネス( $S/K$ )がOTMになるにつれて予測力が下がった。さらにDITMの時にはモデル間の差が存在しない。RMSEを見限りボラティリティ変動モデルの違いによるオプション価格予測の精度の違いはDOTMに近づくほど現れてくるということがわかった。

今後の課題として、以下のような点を考慮する必要がある。まず第1に、収益

率のモデルをリスク中立性を仮定しないモデルとした時、収益率の分布が正規分布以外の分布であった場合はDuan (1999) による局所リスク中立性への変換方法は追加的なシミュレーションによる調整が必要となり困難である。より簡便な方法を考える必要がある。さらに、Lamoureux and Lastrapes (1990)、Gray (1996) で指摘されるように、ボラティリティショックの持続性の高さは構造変化が原因となっている可能性がある。構造変化を考慮したARCH型モデルも比較する必要があるだろう。次に、原資産のモデルに関する推定方法には、本論文で用いたMLの他に多くの推定方法がある。今回、SVモデルをカルマン・フィルターを用いた擬似最尤法で推定したが、より精密な推定方法を用いることでSVモデルでもフィットの良い予測ができるかもしれない<sup>16)</sup>。オプション価格に関しては、真のオプション価格というものを何にするのかという点が不明である。今回は現実のオプション価格との比較を行ったが、その比較対象としてBSモデルの価格を用いる方法も行われている。また森保 (1999) にあるように、残存期間によってモデルの予測力に差がでてくることも考えられる。様々な比較尺度からモデルを検討すべきである。最後にDITMのオプションでは、モデル間による推定価格の大きな差はでてこなかった。オプション市場ではATMに近いほど取引量が多く、離れるほど取引量が少なくなっている。これらのことから、オプション価格が取引量もしくはマネネスに対してどのように依存しているのか明らかにするべきである。

#### 〔参考文献〕

- 三井秀俊 (1998), 「日経225株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」、日本証券経済研究所『ファイナンス研究』24, pp.23-40.
- 三井秀俊 (2000), 「日経225オプション価格のGARCHモデルによる分析」『現代ファイナンス』7, pp.57-73.
- 三井秀俊・渡部敏明 (2000), 「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」『日本統計学会誌』第33巻第3号, pp.307-324

---

16) Harvey / Shephard (1996)、三井 (1998) のように非対称離散時間型SVモデルを考える必要がある。

- 森保洋 (1999), 「ARCHモデルによる日経225オプション評価」『現代経済学研究』7, pp.143-159.
- 渡部敏明 (2000), 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店.
- 渡部敏明 (2003), 「日経225オプションデータを使ったGARCHオプション価格付けモデルの検証」, 『金融研究』22, 別冊2, pp.1-34.
- Bakshi, G., C.Cao, and Z. Chen (1997), "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance* 52, pp. 2003-2049.
- Bauwens, L. and M. Lubrano (2002), "Bayesian option pricing using asymmetric GARCH models," *Journal of Empirical Finance* 9, pp.321-342.
- Black, F. and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81, pp.673-659.
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31, pp.673-659.
- Bollerslev, T. (1987), "A Conditional Heteroskedastic Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return," *Review of Economics and Statistics* 69, pp.542-547.
- Crouhy, M. (1994), "Extensions of the Black-Scholes Model to the case of Stochastic Volatility," unpublished manuscript.
- Duan, J.C. (1995), "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance* 5, pp.13-32.
- Duan, J.C. (1999), "Conditionally Fat-Tailed Distributions and the Volatility Smile in Options," Working paper, Department of Finance, Hong-Kong University.
- Duan, J.C. and H. Zhang (2001), "Pricing Hang Seng Index options around the Asian financial crisis - A GARCH approach," *Journal of Banking and Finance* 25, pp.1989-2014.
- Gray, S.F. (1996), "Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process," *Journal of Financial Economics* 42, pp.27-62.
- Glosten, L.R., R. Jagannathan, and D. Runkle (1993), "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance* 48, pp.1779-1801.

- Hamilton, J.D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Harvey, A. C., E. Ruiz and N. G. Shepard, (1994), "Multivariate Stochastic Variance Models," *Review of Economic Studies* 61, pp.247-264.
- Harvey, A. C. and N. G. Shepard (1996), "Estimation of An Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns," *Journal of Business and Economic Statistics* 14, pp.429-434.
- Hogg, R. and E.A. Tanis (2001), *Probability and Statistical Inference*, 6th ed, Prentice Hall.
- Hull, J. and A. White (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance* 42, pp.281-300.
- Kim, S., N. Shepard, and S. Chib (1998), "Stochastic Volatility: Optimal Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," *Review of Economic Studies* 65, pp.361-393.
- Lamoureux, G.C. and W.D. Lastrapes (1990), "Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model," *Journal of Economic Statistics* 8, pp.225-234.
- Nelson, D.B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica* 59, pp.347-370.
- Ross, S.M. (2001), *SIMULATION*, 3rd Edition, Academic Press.
- Scott, L.O. (1987), "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, pp.419-438.
- Sentana, E. (1995), "Quadratic ARCH Models," *Review of Economic Studies* 62, pp.639-661.
- Shepard, N. and M.K. Pitt (1997) "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika* 84, pp.653-667.
- Watanabe, T. (1997), "A Normal Mixture Filtering Approach to Stochastic Volatility Models," 『統計数理研究所共同研究レポート103 時系列解析の理論と応用』, pp.32-59.
- Watanabe, T. (2000), "Excess Kurtosis of Conditional Distribution for Daily Stock Returns: The Case of Japan," *Applied Economics Letters* 7, pp.353-355.

(68) 一橋経済学 第1卷 第2号 2006年12月

Wiggins, J.B. (1987), "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates," *Journal of Financial Economics* 19, pp.351-372.