チュートリアル

金融工学の数理(1)

石村 直之

1 はじめに

「金融工学の数理」という題は，もちろん誇大広告である．新世紀に入り，ますます広範かつ多方面に発展しているこの分野を，手際よく解説する能力は執筆者にはない．単に筆者近辺の問題を中心に雑な描像を示すのが関の山である．今回連載するに当たり，過去のチュートリアルをいくつか読ませていただいた．やはり，その道の大家が大所高所から高尚な論説を展開するものが多い．最初から断りを入れて申し訳ないが，入門的な記事をと依頼されたこの4回の論説は，その伝統に反している．筆者は，この金融工学ないしは数理ファイナンスの分野ではまだまだ新参者であると自己認識している．いうなれば，研究対象として意外な鉱脈を見つけ，楽しんで掘り進めている現在進行形の論説である．そのための思わぬ誤解や理解不足は避けられない．批判や叱責をお願いする．

まず初回は，日本の自然科学系の研究者がおそらく抱くであろう金融工学，あるいは数理ファイナンス全般に対する疑いや不信感の分析を主な課題としたい．というのは，セミナーや研究会の場で，そのような嫌疑を基にしたと思われる質問や注文が，時折ではあるが現在でも見受けられるからである．また，学生時代から知己を得ている自然科学系研究の同業者と話していて，この分野に対する思わぬ嫌悪感が示され，逆に驚くこともある．

いしむら なおゆき．一橋大学大学院経済学研究科．

一方で，このような疑いや不信感は，金融工学ないしは数理ファイナンスの研究者から見れば単なる誤解や見当違いに起因することが多い．そのため今回の内容は，一般に社会科学系の研究者にとってはあまりに当然の前提を述べることにもなる．通常の教科書に書いてあるような題材を述べることをお許しいただきたい．また個人的な部分は，回顧のためではなく親近感をもってもらう希望のためである．

2 Black-Scholes 方程式

簡単に自己紹介をする．大学は最初から自然科学系で，理学部物理学科卒業である．修士課程は数学専攻で修了し，そのとき以降，応用領域における非線形偏微分方程式の研究を続けている．もちろんここで「応用領域」の意味するものは，最初は物理学や工学のことであった．現在では，応用領域の言葉はそのままにして，社会科学系，特に金融工学あるいは数理ファイナンスに現われる非線形現象を含めている．

この数理ファイナンス分野に目が向いたきっかけは，1996年に一橋大学に異動して三浦良造教授(現在一橋大学大学院国際企業戦略科)の教示を得たことによる．講義開始前のお茶の時間に，「非線形偏微分方程式の研究者ならばこのような方程式はご存知ですか」と，Black-Scholes 方程式を示された．

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S,t)+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t)$$

$$+rS\frac{\partial C}{\partial S}(S,t)-rC(S,t)=0 \quad (1)$$
$$\text{in } S>0, \quad t<T$$
$$C(S,T)=\max\{S-E,0\}$$
$$C(0,t)=0, \quad \text{for } t<T$$

もちろんこれは，ヨーロピアン・コール・オプションの価格 $C(S,T)$ に対する方程式である．導出の詳細やヨーロピアン・コール・オプション等の説明は次回以降に述べる．記号の意味は，S：株価変数，以下は定数で，σ：volatility，r：無危険利子率，E：行使価格，T：満期日である．当時の感想は，社会科学系分野にも偏微分方程式が出てくるのか，程度の低水準であった．

さらに三浦教授は，Paul Wilmott 達の著書[10][11]を教えてくれた．これは読み解き易いものであった．実際，Wilmott 教授は[9]の Author Profile によると，"… and then (Paul Wilmott) went on to research in fluid mechanics for his doctorate. In the early 1990s his field of interest changed dramatically to finance and he hasn't looked back since. (以下略)" (括弧内筆者補い.) と，元は流体科学の研究者であったからである．自然科学系の文脈で勉強してきた者にも自然にファイナンス分野に入っていける書き方であった．

もう少し具体的に述べると，書物[10][11]における数理上の基本的な道具は，原論文[1]と同様に，偏微分方程式である．解析解が求められる場合はその解法，求められない場合は，偏微分方程式の各種数値解法，と題材はファイナンスであるが，内実はまさに標準的な応用解析の書物であった．

ここで念のために，この流儀，ということは原論文[1]の流儀で，Black-Scholes 方程式(1)を解いておく．

$$C(S,t)=Ee^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

ただし $k:=2r/\sigma^2$ として

$$x=\log(S/E), \quad \tau=\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$
$$\alpha=-\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta=-\frac{1}{4}(k+1)^2 \quad (2)$$

と変数変換を行えば，計算によって

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{in } -\infty<x<\infty, \quad \tau>0$$
$$u(x,0)=\max\{e^{(k+1)x/2}-e^{(k-1)x/2},0\}$$
$$u(x,\tau)\longrightarrow 0 \quad (x\to-\infty) \qquad (3)$$
$$u(x,\tau)\sim e^{-x\tau+(1-\alpha)x} \quad (x\to\infty)$$

と，よく知られた熱方程式になる．これは基本解を用いて

$$u(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-(x-y)^2/4\tau}u(y,0)dy$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-(x-y)^2/4\tau}\left(e^{(k+1)y/2}-e^{(k-1)y/2}\right)dy \quad (4)$$

と解くことができる．変換(2)の逆変換をすれば(1)の解

$$C(S,t)=SN(d_1)-Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (5)$$

ただし

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy$$
$$d_1=\frac{\log(S/E)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

を得る．これが著名な，ヨーロピアン・コール・オプションに対する Black-Scholes 評価公式である．

方程式を認めさえすれば，この解法そのものは，変換(2)を示しておけば，日本の理工系学部での演習問題の水準である．解法の過程が原因でこの分野に不信感を抱く自然科学系研究者は存在しないだろう．

3 Brown 運動

Black-Scholes 方程式(1)の導出は，歴史的にもちろん一朝一夕に成されたものではなかった．よく知られているように，いくつかの重要な点がある．列挙すると

- 株価変動モデルの設定.
- 自己充足ポートフォリオ一動的ヘッジの考え方.
- 無裁定の原則.

さらにこの上で，ヨーロピアン・コール・オプションであることから満期条件と境界条件を決定する．この節では，変動モデルの考察を行い，モデリングの疑問点を検討したい．

前節で述べたが，Black-Scholesの原論文[1]では，偏微分方程式が数理上の主要な道具であった．一方現在では，Merton[6]の論文以降であろうが，確率過程を用いる手法が中心である．評価公式(5)も，マルティンゲール表現定理を利用した上で期待値を計算して得られ，偏微分方程式はどこにも現われない．ともあれここでも，解くべき確率微分方程式が確定された後の推論に対して，自然科学系研究者が不信感を抱く原因となるものはない．やはりまずは株価変動モデルの設定が問題となる．

その株価変動モデルは，現在では一般に確率過程における標準Brown運動 dW_t を用いてなされる．この言葉を使うと，Black-Scholes方程式(1)の基礎となる変動モデルは

$$dS = \sigma S dW_t + \mu S dt \qquad (6)$$

と表される．ここで μ はドリフト定数と呼ばれ，方程式(1)には現われなくなる．この理由は，方程式導出の際に述べる．また，Brown運動を用いない株価変動モデルの試みも存在するが，趨勢とまではなっていないので割愛する．

いきなり確率微分方程式(6)を書いたが，慣れていない方もいるだろうから，簡単にBrown運動について復習する．といっても，数学の定義を述べるのではなく，Einsteinの論文[2]に従って熱方程式を導出するのである．

まずBrown運動であるが，現象を言葉で書くと次のようになろう(江沢[3]参照).

Brown運動 水面に浮かぶ花粉から出た微粒子を顕微鏡で見ていると，微粒子はたえず小さく震えていて，ほぼ同じ場所で振動していたかと思うと急に少し右に動いたり，はたまた左に動いたり，と落ち着かない挙動を示す．水面に浮かぶ微粒子は，花粉由来でなくとも同様の動きをする．これは水分子の熱運動に原因がある．ひとつひとつの水分子が，微粒子に乱雑に衝突した結果がこのBrown運動と考えられている．すなわち，微粒子を取り囲む大量の水分子が熱運動のために四方八方から花粉にぶつかる．ある瞬間に，右方向からの力の総和と左方向からの力の総和とは，ほとんどつり合うことはない．そのため帰結として花粉粒子はジグザグのでたらめな運動をするのである．

簡単のためこのBrown運動を，最も単純化された一次元でモデル化しよう．微小時間 Δt の間に，ひとつの微粒子が微小区間 $(x, x+y\Delta x)$ に存在する確率は，確率密度関数 φ を用いて $\varphi(y)\Delta x$ と表されるとする．ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy = 1, \qquad \varphi(-y) = \varphi(y)$$

および φ は，遠方で十分に速く減衰すると仮定する．時刻 t での単位長さあたりの粒子の存在確率を $u(x, t)$ とおくと

$$u(x, t+\Delta t)\Delta x = \left(\int_{-\infty}^{\infty}u(x+y\Delta x, t)\varphi(y)dy\right)\Delta x$$

が成り立つ．この両辺を展開する．左辺は

$$u(x, t+\Delta t) = u(x, t)+\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\Delta t + O(|\Delta t|^2)$$

また右辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x+y\Delta x, t)\varphi(y)dy$$
$$= u(x, t)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\frac{(\Delta x)^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\varphi(y)dy + O((\Delta x)^3)$$

ただし，微粒子の移動確率の平均が消える，すなわち $\int_{-\infty}^{\infty}y\varphi(y)dy=0$ であることを用いた．

$$\nu = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\varphi(y)dy \qquad (7)$$

と定めてまとめると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

と熱方程式を得る．

この設定では，$(\Delta x)^2/\Delta t \to 1$ を保ちながら Δt，$\Delta x \to 0$ と考えたいので，$\Delta x = \sqrt{\Delta t}$ が望ましい．よって(6)を強引に書き直して

$$dS = \sigma S y \sqrt{dt} + \mu S dt$$

と解釈すれば，確率過程に詳しくなくとも理解の助けとなるであろうか．dW_t が標準 Brown 運動のときは，y は標準正規分布 φ の密度関数に対する変数である．すなわち

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right]$$

よって Ito の公式の実用的な解釈 $(dW_t)^2 = dt$ が，$E[(y\sqrt{dt})^2] = \left((2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \varphi^{-y^2/2} dy\right) dt = dt$ という了解のもとで成り立つ．

さて株価変動モデル(6)は，$d(\log S) = \sigma dW_t + (\mu - 2^{-1}\sigma^2)dt$ と書き直すことができるが，これは株価の対数値が，Brown 運動に由来して変動するという意味である．いうなれば，株価の対数値という微粒子に対して，様々な性向をもった投資家の投資行動という熱分子運動が働いているという描像である．ここで様々な性向とは，ある投資家は賭けを好むが，別の投資家は安全運転を好む，といったものである．また μ は，相場全体が右肩上がりとか右肩下がりとかの傾向をあらわす項である．このモデルは現実をよく反映しているのであろうか．

結論から述べれば，モデル(6)は，市場動向と幾分乖離していることが知られている．そのための拡張モデルもいくつか知られており，大概の教科書には触れられている．たとえば[4]の第19章や[8]の Part 3 を参照されたい．この意味では，基礎モデルそのものが完全に正しいわけではない．それにもかかわらず，まだある程度は Black-Scholes 評価公式(5)が残っているのは，やはり厳密解は強いのである．少しでも基礎モデルや境界条件等の状況を変化させると，通常は厳密解を得るのが難しい．このあたりの状況は自然科学の研究においてもしばしば現われるところである．少なくとも，基礎モデルが完全に正しいわけではないことを理由にして，金融工学全体を否定するのは，これまた科学の立場からみても正しい態度とはいえない．

また次の事実はどうであろうか．よく知られているジョン・ハルの著書[4]の「第14章市場リスク管理」の箇所で，ポートフォリオ・インシュアランスの戦略について説明がある．その最後に，1987年10月19日のニューヨーク株式市場での暴落，いわゆるブラックマンデーに関するこの戦略の市場に与えた影響について触れている．最後を引用すると，「結局1987年10月を境に，現物や先物のポジションをダイナミックに操作するポートフォリオ・インシュアランス・スキームは，急激に人気を失うこととなった．」

自然科学のモデルでは，実験によって否定されればそれは消え去るのみである．社会科学では，実験は一般的でないとはいうものの，上の例は極端な例であるとはいえ，同様なモデルや戦略の盛衰が存在していることを示す．こじつけ解釈ではあるが，金融工学・数理ファインナスも方法論の見地からはすぐれて科学的といえるのではないか．

4 リスクとリターン

金融工学ないしは数理ファイナンスをあまり知らない日本の自然科学系研究者が，おそらく素朴に抱く感情は，もうけ話を扱う研究など科学の名に値しない，というものではなかろうか．筆者も，一橋大学に異動する前までは，似たような感情を全く持っていなかったといえば嘘になる．しかし，もちろんお金や経済を対象にするからといって，その研究やそれを成す研究者が俗で卑しいというのとはまったく別問題である．逆の状況を考えると，「整数論は数学の女王」というのは，数理の研究に従事するものとして納得する．また数学の女王にふさわしい業績も人間も立派な研究者は多い．とはいえ，頭脳は明晰だが俗な感性の研究者も存在することは，某大学の業績詐称事件を持ち

出すまでもなく，人間世界ではあり得る話である．

さらに重要な点は，金融工学の基礎は「うまいもうけ話はない」あるいは「There is no free lunch」という原則に立脚している，という事実である．別の述べ方をすれば，うまいもうけ話は常に存在するのか，という問題を追求して，そうではない，理論上はうまいもうけ話は存在しない，と認めるしかなく，逆にこれを理論の出発点としたのである．このような事情は，突飛かも知れないが，熱力学第2法則の確立を想起させる．ただもちろん，条件をみたせば法則として普遍に成立する自然現象とは異なり，実際の世界では，うまいもうけ話は時折り確かにあり得る．そのような状態が永続的に続くことはないだけである．このように，高い蓋然性をもって例外が存在しうる事実は，厳密な推論を旨とする数理の研究者には特に，評判が悪いことであろう．

さて，うまいもうけ話のことを裁定機会が存在するという．たとえば卑近な例で申し訳ないが，ペットボトル飲料の価格は，2006年末現在では，一般にコンビニエンス・ストアでの方がスーパーマーケットより少し高い．もし，その中間の価格でいくらでも購入してくれる業者が存在すれば，スーパーマーケットで購入してその業者に売却するだけで，確実にいくばくかの利益を得る．このような状況を，裁定機会が存在するという．まさにうまいもうけ話である．もちろん現実には，取引手数料が大きいことや，商慣行などのため，大々的にこの行動をとる人はいないし，そもそも不可能である．しかし理想的な世界では，ペットボトル飲料の価格は，コンビニエンス・ストアであれスーパーマーケットであれ同じになる筈である．少なくとも，高い価格で購入する人は減る一方で，共通の価格，すなわち低い価格になるまで値下げが起こるだろう．ここで理想的とは，取引手数料は存在しない，自由にいくらでも空売りを含めて瞬時に売買できる，など極端といえば極端な状況を意味する．それは，現実世界とは一致することはないが，かといって理想世界での価格が，実勢価格と大幅に異なることもないだろう．金融工学あるいは数理ファイナンスでは，この無裁定の原則を根本原理として措定する．無裁定価格理論についてより詳しくは，たとえば刈屋[5]を参照していただきたい．

さてそれでは，無裁定の原理原則を認めるとして，金融工学ないし数理ファイナンスはどのような含意や知見をもたらしたのだろうか．ひと言で述べれば，それはリスクとリターンの科学である．すなわち，もうけ＝リターンは，リスクを引き受けることの報酬として，リスクの対価として生まれるもの，という認識である．ここでリスクとは，言葉の通り危険な乾坤一擲の大勝負という意味だけではなく，単に確率変動するものという意味も含めている．うまいもうけ話は存在しない前提の下では，変動する不確実な対象に対して，どのようなポジションを取れば期待される収益が最大となるかを考えざるを得ない．金融工学ないし数理ファイナンスは，このリスクとリターンの関係を数理の面から考察するのである．リスクとリターンに関してより詳しくは，齋藤教授の好著[7]を参照していただきたい．

「リスクとリターン」と述べればいかにも格好はよいが，現実には暗黙に理解していたり，それはそうだと感じていることである．たとえば，1週間後に10万円が必要なとき，元手が1万円で10万円の利益を得ようとするのと，元手が100万円で10万円の利益を得ようとするのでは，無理の仕方＝リスクの負い方が異なるのは当然である．1万円に対する10万円と，100万円に対する10万円では，同じ10万円でもリターン率としては異なるのは理解できる．このことがどのような場合，極限の場合でも成立するかはまた別の次元であるが，常識を理論的に裏付けするのはどの分野でも一般にそう容易なことではない．

5 まとめ(その1)

今回は，導出は後回しにしてBlack-Scholes方程式を提示し，その基礎となるBrown運動を

用いた株価変動モデルの問題，および実際の経済活動をどのように考えているのか，などの考察に触れた．入門記事をという依頼でもあったが，著者の研究成果を基にした内容ではなく，既に知られている題材を単に並び替えただけである．これは，おそらく自然科学系研究者が多い応用数理の読者層の，理解や好感を得ようと考えての措置である．

なぜこうしたかのひとつの理由は，たとえば2006年11月2-3日の日本経済新聞の記事「金融理系人材を生かす」にもあるように，現在は日本の金融機関が理系大学院生を中心に大量採用している「第二次理系ブーム」といわれている状況がある．それら学生や院生の基礎教育を担う大学教員が，単なる誤解や考え違いをもととした不信感や疑いを感じていては困るであろう．自分の研究は別にしても，少なくとも志望学生に対する適切なencourageや，進路としてこのような分野もあるとの的確なsuggestionのひとつも必要であろう．ちなみに，先の記事で第一次ブームは1980年代バブル期であり，結果的には日本の金融機関はその人材を完全には生かし切れず，そのとき採用された人たちは外資系その他に流れることが多かったようだ．この第二次ブームも，今後どのような経過を辿るかはもちろん予測できない．また，本連載では理系・文系という言葉で区別することはしない．自然科学系・社会科学系という言葉を用いる．その理由は，どちらも科学，サイエンスであると強調したいためであり，科学ならば当然その基礎言語は数学だからである．

不信感や疑いは，現実には依然根強いのではないであろうか．これは単なる邪推かもしれないが，2006年5月に公表され話題にのぼった文部科学省科学技術政策研究所科学技術動向研究センターによる「忘れられた科学―数学」においても，金融数理は当然のことながら触れられているが，あまりに素っ気無い．たとえば第4章「日本の数学研究ニーズについてのアンケート調査」では「数学以外の各分野に所属する我が国の研究者に対して実施した『数学研究の必要性』のアンケート調査結果を示し」ている．その分野は，ライフサイエンス以下8分野であるが，なぜか金融・保険は含まれていない．まさか，金融工学ないしは数理ファイナンスは金融庁や財務省の管轄であり，文部科学省とは無関係という，いわゆる縦割り行政の意識があるからではあるまい．実際にも，先の日経新聞の記事も金融欄に出ている．以上は半分冗談としても，まだまだ啓蒙活動は足りないと認識させられる．とに角も，社会科学であることを認めるとするならば，その数理に関する部分は，応用数理が意識すべき分野であることは確かである．

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81(1973), 637-659.

[2] Einstein, A., Investigations on the Theory of the Brownian Movement, Dover, 1956.

[3] 江沢洋，だれが原子をみたか，岩波書店，1976.

[4] ジョン・ハル(東京三菱銀行商品開発部訳)，ファイナンシャルエンジニアリング，第3版，金融財政事情研究会，1998.

[5] 刈屋武昭，金融工学とは何か，岩波書店，2000.

[6] Merton, R. C., Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1973), 141-183.

[7] 齋藤誠，金融技術の考え方・使い方，有斐閣，2000.

[8] Wilmott, P., Paul Wilmott on Quantitative Finance, Vol. I, II, John Wiley & Sons, Ltd., New York, 2000.

[9] Wilmott, P., The use, misuse and abuse of mathematics in finance, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 358(2000), 63-73.

[10] Wilmott, P., Dewynne, J. and Howison, S., Option Pricing, Oxford Financial Press, 1993.

[11] Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J., The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press, 1995.