Title	計量経済学のテキストを書き換えた「共和分」と「単位根」概念 : グレンジャー教授の業績
Author(s)	田中, 勝人
Citation	経済セミナー, 588: 73-76
Issue Date	2004-01
Type	Journal Article
Text Version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/10086/17664
Right	

●特集2
2003年ノーベル経済学賞
「時系列分析」は
経済学を
どう変えたか

[グレンジャー教授の業績]

計量経済学のテキストを書き換えた「共和分」と「単位根」概念

田中勝人
Tanaka Katsuto
1950年生まれ。一橋大学経済学部卒業。オーストラリア国立大学大学院Ph.D.（統計学）。現在、一橋大学大学院経済学研究科教授。1998年、第3回日本統計学会賞受賞。著書：『経済時系列の統計——その数理的基礎』（共著、岩波書店）、『経済統計 第2版』（岩波書店）、『統計学』（新世社）ほか。

グレンジャー教授は、「共和分関係にある非定常な経済変数間の関係を分析するための統計的方法の開発」によって、今年のノーベル経済学賞を受賞された。この研究は、1970年代前半の萌芽期を経て、80年代後半のエコノメトリカ誌への論文発表で結実したものである。教授の専門は時系列解析であり、今回の業績以外にも、60年代以降、数多くの卓越した研究がある。

紙幅の関係で、以下では、今回の受賞対象となった共和分に関する業績に焦点を絞って説明するが、グレンジャー教授の多岐にわたる業績を知りたい読者は、本稿末尾にあげた文献を参照されたい。

1 単位根問題と共和分分析

消費や所得などのマクロ経済時系列、あるいは株価や為替レートなどの金融時系列は、一定のレベルの回りを変動しているのではなく、時間とともにレベルが上昇、あるいは下降、さらに、変動幅が大きくなるなどの非定常的な動きを示す場合が多い。しかし、これらの階差系列を考えると、定常的な振る舞いをするのが普通である。すなわち、原系列を$\{y_t\}$とするとき、その階差系列$\{u_t\}=\{y_t-y_{t-1}\}$が定常的となるということである。このとき、原系列$\{y_t\}$は単位根系列であるという。

今の場合、原系列は、

$$y_t=y_{t-1}+u_t \qquad \cdots\cdots(1)$$

と表現される。したがって、$\{u_t\}$が独立な系列であれば、$\{y_t\}$はランダム・ウォークに従うから、単位根系列はランダム・ウォークの拡張である。より非定常性が強い場合は、定常性を確保するために2回以上の階差を取る必要がある。さらに、階差を実数の世界にまで拡張したフラクショナル階差を考えることもあるが、この場合についてもグレンジャー教授の偉大な貢献がある。しかし、ここで

図1　単位根系列と確定的トレンド

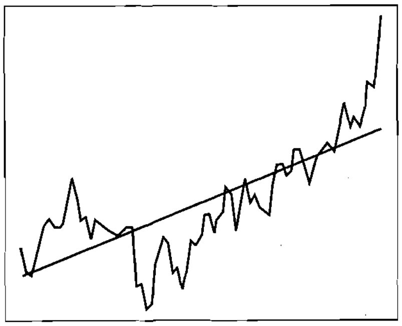
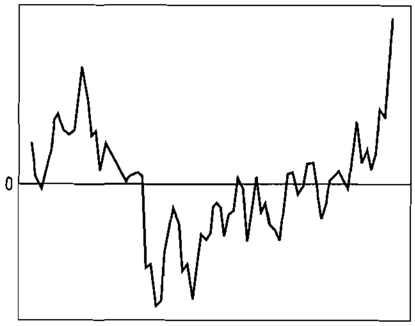


図2　残差系列



は説明の簡単化のため、1回の階差で定常になる系列に限定して考えることにする。

ただし、ここで2つの問題が生じる。その1つは、現実の時系列が非定常であっても、本当に単位根系列であるかどうかという点であり、それは統計的に検証する必要がある。そのために、80年代から多くの研究者により、さまざまな単位根検定が提案され、時系列に基礎を置く計量経済学のホットなトピックとして現在も研究されている。その理由は、従来は、非定常性の源泉であるトレンドは、時間の関数で表されるような確定的トレンドであると想定され、トレンドからの乖離は定常的であると考えられていた。したがって、回帰によりトレンドを除去したあとの系列を分析することが正当化されたわけである。しかし、単位根系列の非定常性は確率的であり、確率的トレンドは時間のトレンドをあてはめても除去されず、その影響は永続的である。

実際、図1に示された折れ線は単位根系列のデータであり、図のような線形トレンドをあてはめたあとの残差が図2に示されているが、残差は平均が0の系列であるから、0の周りを上下変動していて、定常系列のように見える。しかし、この残差系列は依然として非定常な単位根系列であることが理論的に証明される。確率的トレンドの概念が生まれる以前の実証分析では、このような形でトレンドを除去して、誤った分析が行われていた。

もう1つの問題点は、単位根系列であるならば、原系列でなく階差系列を分析すれば十分であるかどうかという点である。共和分の概念が生まれる以前、すなわち70年代の時系列分析は、ボックス＝ジェンキンス流のモデル・ビルディングの発想が主流であり、もっぱら階差系列のモデル化が行われていた。しかし、階差系列だけを分析するのは問題がある、ということを、「グレンジャー表現定理」という形で警鐘を鳴らしたのも、他ならぬグレンジャー教授自身である。この点については、第3節で誤差修正モデルを説明する際に明らかにしたい。

さて、肝心の共和分の概念を説明しよう。共和分は、単位根系列であると判断された複数の時系列の間で成立する概念である。一般に、単位根系列の線形結合は、非定常であり、単位根系列である。しかし、線形結合の係数をうまく選べば、それが定常的となる場合がある。このとき、単位根系列の間には共和分の関係があるという。この現象を発見したのもグレンジャー教授であり、81年の論文で発表している。

2つの単位根時系列 $\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ が共和分関係にあるとは、ある定数 α と β が存在して、回帰式

$$y_t=\alpha+\beta x_t+v_t \qquad \cdots\cdots(2)$$

における誤差項 $\{v_t\}$ が定常となることである。一般には、このような定数が存在せずに、

いかなる線形結合を考えても、その誤差は非定常のままである。線形結合は、ある意味で均衡からの乖離を測っているから、共和分関係が成り立つということは、均衡からの乖離が安定していることを意味している。また、統計学的には、共和分は、線形結合が非定常から定常に退化した1次従属関係であるから、$\{v_t\}$ が自明でない限り、確率的な多重共線と解釈することができる。このことは、$\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ から作られる積和行列のランクが落ちることを意味する。

さらに、共和分関係が成り立つための必要十分条件は、複数の当該時系列から作られる階差系列のスペクトラム行列が、原点においてランク落ちしていることである。スペクトラムの原点における値は、時系列の長期的な変動量を与えるもので、長期分散行列とも呼ばれる。分散行列が退化することが、変数間に長期的な従属関係をもたらすことになる。

ところで、(2)式の共和分回帰においては、一般に、説明変数 x_t と誤差項 v_t の間には相関がある。このような場合、多くの計量経済学のテキストでは、OLS（通常の最小2乗）推定量は一致性を失うと叙述されていた。しかし、共和分回帰は例外であり、相関があっても一致性が保証される。

② 見せかけの回帰

単位根系列間に共和分関係がないにもかかわらず、回帰分析を実行したらどうなるであろうか。グレンジャー教授は、74年の論文において、互いに独立な2つの単位根系列で回帰を行うと、次のような現象が現れることをシミュレーションにより発見した。

(a) 標本サイズが大きくなっても、回帰係数の推定量は0には確率収束せずに、退化しない分布をもつ。

(b) 係数の t 統計量は、有意な値を示す。

(c) モデルの決定係数も有意となりうる。

(d) ダービン＝ワトソン統計量は、漸近的に0に確率収束する。

上記の現象の中で、(d) 以外は、本来ならば無意味な回帰がもっともらしく見える証拠を与えている。この意味で、互いに独立な単位根系列間の回帰は見せかけである。さらにやっかいなことに、見せかけの回帰は互いに相関がある単位根系列間でも起こりうる。

このことは、計量経済モデルを作って何らかの統計的推論を行う際に留意すべき重要事項である。例えば、為替レートが購買力平価仮説に従うかどうかを調べる場合、為替レートや物価の時系列を対象とするので、これらが単位根系列であるならば、有意性検定の結果をそのまま受け入れるのは危険である。実際、経済時系列の中には、非定常な単位根系列と考えられるものが多い。そのような変数間の回帰を(2)式の形で行って、通常の有意性検定にパスしても、本当に意味のある回帰かどうか、すなわち共和分回帰となっているかを確かめる必要がある。別の例として、消費と所得のマクロ時系列を考えた場合、これらが単位根系列ならば、消費関数が意味のある経済モデルであるかどうかは、回帰が見せかけか、あるいは共和分回帰なのかどうかを調べることに帰着する。

単位根系列の概念が導入されたことにより、回帰理論は新たな局面を迎え、回帰に関する従来の説明は修正を余儀なくされた。そして、計量経済学のテキストは大幅に書き換えられることになり、単位根検定、見せかけの回帰、共和分などのトピックが新たに付け加えられることになった。

❸ 共和分検定

複数の単位根系列間の回帰に意味があるかどうかを調べるには、通常の有意性検定では不可能である。そのためには、共和分検定が行われる。グレンジャー教授が提案した方法は、共和分関係なしという帰無仮説を、共和分関係ありという対立仮説に対して検定するものである。2つの単位根系列$\{x_t\}$と$\{y_t\}$の場合であれば、まず、(2) 式の回帰モデルを推定し、回帰の残差を計算する。その上で、残差系列に対して単位根検定を行い、単位根があると判断されれば、共和分なしの帰無仮説が受容され、単位根なしと判断されれば、帰無仮説は棄却され、共和分関係があると結論する。

対象とする単位根系列が3つ以上の場合は、線形独立な共和分関係が複数個となりうる。そのような最大個数は共和分ランクと呼ばれ、それはベクトル値の自己回帰モデルに基づいて最尤法的な考え方を使って決定される。このようなシステム・アプローチは、計量経済モデルの古典的な推定とのアナロジーでいえば、完全情報最尤法に対応する。他方、グレンジャー教授の方法は、単一方程式アプローチの2段階最小二乗法と考えられる。

最後に、共和分関係が存在する場合のモデルとして、誤差修正モデル

$$\Delta y_t=\gamma+\delta\Delta x_t+\lambda(y_{t-1}-\alpha-\beta x_{t-1})+\varepsilon_t \quad \cdots\cdots(3)$$

について説明する。ここで、$\{x_t\}$と$\{y_t\}$は単位根系列、Δは階差オペレータである。このモデルは、階差系列に対する回帰モデルであるが、説明変数として、階差だけでなく、レベルの変数が共和分関係の均衡からの乖離の形で入り込んでいる。共和分関係にある単位根系列では、階差モデルを作れば、必ず、(3) 式のような誤差修正モデルが得られる、というのが「グレンジャー表現定理」の一部をなす。この定理は、共和分関係にある変数間の回帰では、階差変換後のモデルにレベルの変数を含めないのは、誤った特定化であり、情報の損失を招くという重要な示唆を与えている。

参考文献

The ET Interview: "Professor Clive Granger," *Econometric Theory* 13, 253-303, 1997.