（第１回）

デリバティブの基礎

石　村　直　之

目　　　　次

このシリーズ（全５回）では、昨今の金融危機を激甚化させた一因であったと非難されるデリバティブあるいは金融工学に関して再考する。数理モデリングの観点からの解説を中心とする。すなわちまず、ブラウン運動、価格変動モデル、さらには他の各種モデルについて、数理モデリングの側面を重視しつつ考察する。その上で、金融工学の有用点、あるいは欠点やその限界を今一度考察したい。
第１回は、基本の確率過程として用いられているブラウン運動について、その意味する現象から振り返る。拡散現象を導くことを示し、株価変動モデルに応用されている理由を考える。最後に、この変動モデルが適用されるデリバティブの考え方そのものは、金融市場に特有なものではなく、むしろ身近な知恵であることを再確認する。

１．はじめに

⑴　デリバティブ再入門

2008年９月以降の急激な金融危機により、金融工学そのものに対する漠然とした疑いの目が強められたことは確かであろう。それは大学に所属し、実務上必須の道具として使用しているわけではなく、半分以上は純粋な学問として数理ファイナンスを研究する者にとっても感じざるを得ない事実である。一般論説のうちには、時によれば、金融工学すなわちすべて拒否、との極端な姿勢も見受けられる。金融市場に大小さまざまな混乱は付き物であるが、今回ほど危機が深まったのはそもそも金融工学なるえたいの知れない奇術が考案されたからだ、と糾弾する論説も見受けられる。もちろんそのような嫌悪感や不信感には、単なる誤解に基づくことも多いし、全く的外れと判断できる場合もある。とはいえ金融工学が、難しい数学を駆使して、通常の理解の範囲をはるかに飛び越すための衒学的な手法として用いられても、そ

石村　直之（いしむら　なおゆき）
一橋大学 大学院経済学研究科教授。1989年東京大学大学院理学系研究科修士課程修了。同年４月、東京大学理学部数学教室助手。東京大学大学院数理科学研究科助手、一橋大学経済学部助教授を経て、2005年４月より現職。主な著書に『経済数学』（新世社、2003年、武隈愼一教授と共著）がある。

れはそれで戸惑うのも当然である。もしかすると、単に理解しにくくするために金融工学の仮面をかぶせたのかもしれない、というわけである。このような状況では、ここは少なくとも基本に立ち返り、そもそも金融工学、あるいは数理ファイナンスの基礎はどのようなものか再確認する作業は、意味あることになるだろう。

そこでデリバティブ再入門であるが、意識の高い入門書も世の中には既に多く存在する中で、何をよりどころに述べようとするのかをまず明らかにしたい。それは数理科学としての視点を重視することである。ええ？　デリバティブは存在そのものが数学であり、いまさらそのような数理科学風の論説はごめんこうむりたい、と反論される方がいらっしゃるであろう。リスク中立確率を用いて期待値を計算して、と聞いただけでもうやめてください、と拒否する方もいらっしゃるであろう。しかしブラウン運動からして、それがそもそもどのような現象を意味するのか、はっきりした概念をもって用いているのだろうか。日本の工学部や理学部の各自然科学系学部においても、確率論は手順を踏んで勉強しようと思えばなかなか困難な部分があり、確率微分方程式はむしろ大学院での内容、としているところも多いだろう。数理の立場での読み物風の解説は、まだまだ有用なのではないだろうか。これがあえて再入門を試みる理由の一つである。

とは述べつつも、数式を羅列することはこの雑誌の編集方針とは異なる。そこで本文中には簡単な数式のみに収め、しかもその数式の意味は逐一言葉で説明することとしたい。さらに、より複雑な数式は脚注に回し、それは飛ばしても後には差し支えがないよう配慮する予定である。

おこがましくも、いささか意識している書物は名著の誉れが高い高橋誠・新井富雄共著『ビジネス・ゼミナール　デリバティブ入門』（日本経済新聞社、1996年）である、と述べれば苦笑されるであろうか。「経営的視点を重視したデリバティブ入門」を掲げるこの著のような、実務に精通した内容はもちろん筆者に望むべくもない。この名著の、モデリングの基礎の部分を補う手軽な解説、とお考えいただきたい。

⑵　数理ファイナンスの研究に取り組むまで

以上、半業界通のような言辞を弄したものの、おそらく証券アナリストの大多数の方にとって筆者は無名であろう。そこで略歴はあるものの簡単に自己紹介させていただく。これは自己宣伝のためではなく、現在はこのような端くれの学者まで金融工学あるいは数理ファイナンスに取り組んでいるのか、と認識してもらうためである。

大学の学部は理学部物理学科卒業で、そのまま大学院に進む。これは日本の自然科学系では通常のよくある進路である。ただ途中で物理学専攻から数学専攻に鞍替えした。幸いにも修士課程修了後に助手に採用され、それ以降、特に日々の糧を心配することなく数理科学、詳しくは非線形偏微分方程式の研究に取り組んできた。どのような時期かといえば、大学院修士課程の時に例の小柴先生の1986年２月の超新星が爆発し、その時の現場の高揚感を、末端の理学系院生ながら体験した。さらには助手の時に、H. M. Markowitz教授の90年のスウェーデン銀行賞受賞、いわゆるノーベル経済学賞受賞に僥倖する。これは筆者がその当時所属していた東京大学理学部数学教室には、保険協会からの寄付講座があったが、そこの客員教授としてMarkowitz教授が来日されていた折のことである。このこともあってか、この期間は日本の金融機関がいわゆる理系学生を大量に採用した最初の時期におおむね該当する。ちなみに、この保

険協会の寄付講座にはMarkowitz教授以外にも著名な諸教授が来日されたのだが、その当時は全く関心がなく、お会いしておけばよかったのにと今になって少し後悔している。

数理ファイナンスとの出会いは、96年に一橋大学に異動してからである。当時一橋大学商学部に所属されていた三浦良造教授（現在、一橋大学大学院国際企業戦略研究科教授）の教示を得たことによる。講義の前のお茶の機会に、三浦教授は「非線形偏微分方程式論がご専門ならばこのような方程式はご存じですか」とBlack-Scholes方程式を示された。Black-Scholes方程式に関してはこのシリーズでより詳しく述べる機会があろう。その時の筆者の反応は、社会科学にも偏微分方程式が現れるのか、との程度の低い認識であった。さらに三浦教授は、Paul Wilmottたちの著書［1993,1995］を教えてくれた。これは当時全くの初学者であった筆者にも読み解きやすい専門書であった。というのはWilmott教授は、論文［2000］に“…and then（Paul Wilmott）went on to research in fluid mechanics for his doctorate. In the early 1990s his field of interest changed dramatically to finance and he hasn’t looked back since（注１）.（以下略）”（括弧内筆者補い）と、元は流体力学の研究者だったからである。よってその著書にも流体科学の、あるいは物理学の訓練を受けている者には比較的に入りやすかったのである。ちなみに流体科学とは、気体や液体の運動力学的な性質を考察する学問であり、天気予報、航空機の設計など実用上工学上も大切な基礎分野である。Wilmott教授の出身の英国は、この流体科学研究が盛んな国の一つである。

金融工学の研究者には、現在でもほかの分野から、例えば統計学、OR（Operations Research）、数学の確率論その他、最初は別の分野の研究から始めた者が多い。その中でも流体科学出身は珍しい部類に属するが、その人物の書いた著書は最もなじみやすかったのである。付言するが、最初から金融工学あるいは数理ファイナンス専攻である研究者は、各大学での課程が整備されてきたこともあり、最近になって増加している。

その後は、一橋大学という金融の数学を研究することに対してむしろ歓迎するような環境であることも影響してか、数理ファイナンスの分野を大変面白く感じながら取り組んでいる。当初は、講義でファイナンスの数理を取り上げても、学生さんの方が詳しいのではないかと半ば恐る恐るであった。今では、少なくとも学部学生さん相手には、そこまで緊張することはなく平常心で臨むことができる。09年３月21日（土）午前の経済危機克服のための有識者会議で、麻生太郎首相が、株価対策に関連して「株屋ってのは信用されていない。株をやっているといったら田舎じゃなんとなく怪しいよ」と語った旨報道されたが（『日本経済新聞』2009年３月21日夕刊）、思えば一橋に異動する前の感覚はまさにこの通りであった。それが現在では、理論の検証と称して小額投資を実践しており、理論通りにうまい儲け話は存在しないことを身に染みて感じている。むしろそれより、株という極めて巧妙な仕組みが発明されたことに対して驚きをさえ覚えている。

以上が、筆者が数理ファイナンスに取り組むようになった、恥ずかしながらもその経緯である。このような背景なので、論説が数理に傾くことは

（注１）…その後（ポール・ウィルモットは）博士号のため流体力学の研究に進んだ。90年代初め、彼の興味の対象はファイナンスへと劇的に変化し、それ以降振り返らなかった。（筆者訳）

お許しいただきたい。金融工学あるいは数理ファイナンスには、数理モデリングとしての側面も確かにあるので、この方面からの理解の一助となれば幸いである。

それでは、まずはブラウン運動にまつわる事柄から述べよう。

2．ブラウン運動をめぐって

⑴　ブラウン運動

金融工学で基本となるモデルの多くにはブラウン運動（Brownian motion）が用いられている、と述べておそらく異論はないであろう。それは、もしかすると数理系が苦手な初心者を混乱させている確率微分方程式、その方程式の核心を成していることからも窺える。もちろん、すぐ後で導出するがブラウン運動は拡散現象を導き、拡散現象は本質的に連続な過程であるため、金融危機で観察されるような株価の頻繁かつ急激な変動はあり得ない。よって株価変動のモデルとして、ブラウン運動だけを考慮しても正当なモデルとは言えない。現在の数理ファイナンス理論では、連続な過程のうちに「とび」(jump）を許すレビ過程（Lévy Process）がむしろ基本的だと考えられている。しかし、そうはいっても、その簡便さもありブラウン運動が金融工学理論の中心であることは疑いない。ではそもそもブラウン運動はどのようなものであろうか。

ブラウン運動について、歴史上のことから詳細に解説されている良書に江沢洋著『だれが原子をみたか』(岩波書店、1976年）がある。書物そのものは、物質を構成する原子がどのように認識されるようになってきたのか、ゆっくりと一つ一つ論理を進めながら解説されている。冒頭および前半の部分と最後半の部分がブラウン運動にかかわる。中学生高校生向けに書かれた、とあるがどうしてなかなか骨のある書物である。以下、この江沢先生の本を参照しながらブラウン運動について考察したい。

ブラウン運動を、最初の発見者イギリスの植物学者ロバート・ブラウン（R. Brown 1773-1858）博士にならって言葉で記述すると次のようになろう。

> **ブラウン運動**
> **水面に浮かぶ花粉が水を吸って破裂し、たくさんの微粒子が出てくる。その微粒子を簡単な顕微鏡で見てみると、微粒子はたえず小さく震えていて、ほぼ同じ場所で小刻みに振動していたかと思うと、急に少し左に動いたり、はたまた大きく右に動いたり、絶えず落ち着かない挙動を示すのが観察される。このような乱雑な動きをする微粒子は、花粉からでなくとも植物の葉でもその他の部分からでも同じである。さらには石炭を細かく砕いて水面に浮かべても、粉粒の中に活発にちょこまか動くものがある。**

最初は、水面にたゆたう花粉に由来する微粒子の不思議な微小運動を偶然にも発見したわけであるが、その現象が広くさまざまな状況において観察される普遍的な法則であることまで探索を怠らなかった。よって歴史に名前が残る業績となったのである。

⑵　ブラウン運動の解釈

さて、ではこのブラウン運動の原因は何なのであろうか。ブラウン博士は当時、一つ一つの微粒子に生命の原子が含まれており、その原子が活動することでブラウン運動となる、というようなことまで考えられたようだ。現在でのブラウン運動の解釈は、熱分子運動論による。すなわち、水は

極めて微小なH_2O分子からできており、その一つ一つの分子は激しく熱運動している。これを熱分子運動という。それらの速度分布は正規分布に近く、平均の速度は温度の増加関数である。ここに水の中に、水の分子よりははるかに大きい花粉からの微粒子が浮かべば、水分子はこの微粒子に激しく衝突する。その衝撃は乱雑なものであり、ある瞬間に微粒子が右から受ける衝撃の強さと、左から受ける衝撃の強さは、大体において釣り合うことはない。よって次の瞬間には、微粒子はどちらかに動くこととなる。このようにブラウン運動を解釈するならば、水面に浮かぶ微粒子は必ずしも花粉由来である必要はなく、確かにさまざまな物質でもよい。あまり大き過ぎず小さ過ぎず、適度な微小さならば十分なのである。

以上が、ブラウン運動がそもそもどのような現象を意味するのか、おぼろげながらもその描像である。次に、このブラウン運動を簡単なモデルで考えてみよう。

(3) 拡散現象

ブラウン運動は拡散現象を導く。この事実を、空間一次元のモデルで見てみよう。

一次元ブラウン運動モデル
一次元直線を粒子が次の規則に従って移動する。時刻tに位置xにある粒子は、次の時刻$t+\Delta t$には確率2分の1で位置$x+\Delta x$に、確率2分の1で位置$x-\Delta x$に移動する。ここでΔは微小な量を意味する記号である。つまりΔxとは微小な位置の変化を表す。

同じように微小量を表す記号にdxがあるが、それはむしろ微分記号としての用途が主流である。よって、変動させたりしたい微小量を表す場合は、このΔxという記法を用いることが多いようだ。

このモデルでは、粒子が花粉由来の微粒子に対応している。粒子に衝突する水分子の結果として、粒子は特に左右のみに等確率で動くのである。

さてこの粒子は、一次元直線に確率的に分布していると考えよう。すなわち粒子の存在確率が確定するとしよう。そこで時刻t位置xに粒子が存在する確率を$u(x,t)$と表そう。このとき

$$u(x,t+\Delta t)=\frac{1}{2}\{u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)\} \tag{1}$$

が成り立つ。この式の意味は次の通りである。左辺は時刻$t+\Delta t$に位置xに粒子が存在する確率を表すが、その位置xに粒子が来るのは、一つ前の時刻tには左隣の$x-\Delta x$にあるか右隣の$x+\Delta x$にあるかどちらかである。それぞれの確率は2分の1なので、足し合わせて上の等式となるのである。

今この式を次のように変形しよう。

$$\begin{aligned}&\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}\\&=\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}\end{aligned} \tag{2}$$

これは(1)の両辺から$u(x,t)$を引き去りΔtで割る、さらに右辺を整理した単なる変形であるが、少し異なる意味が出てくる。すなわち左辺は、もし$u(x,t)$が微分可能であるならばuの時間tによる偏微分$\frac{\partial u}{\partial t}(=u_t)$の近似である。また右辺は、$u$の位置$x$による2階偏微分$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(=u_{xx})$の近似である。正確には差分近似と呼ぶ。数値計算の分野では、偏導関数の近似として逆に(2)式が現れる。すなわち(2)式は、拡散方程式（熱方程式）と呼ばれる偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{v}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{3}$$

に対する陽的差分近似式（explicit difference scheme）を表す。ここでvは拡散係数と呼ばれる正の定数である。

なぜ(2)式、あるいはその元の(1)式が拡散方程式

と呼ばれるのかは以下の理由による。この一次元モデルでは、粒子は時間とともに左右に移動していく。これは例えば砂糖が水に溶けていくような現象のモデルと考えることができる。すなわち粒子を砂糖分子と思えば、時間とともにそれが左右に拡散してくと解釈するのである。そこで、その方程式(1)式を拡散方程式と呼ぶ。

さて(2)式と(3)式を見比べてみれば

$$\nu=\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \tag{4}$$

が対応する式となる。より詳しい計算は脚注に回すが（注２）、この対応について次に考える。

(4)　Itoの補題との対応

ブラウン運動から拡散方程式が導かれること、逆に述べれば、ブラウン運動は拡散現象の原因であることが分かった。このモデルではさらに、金融工学で基本となるIto（伊藤）の補題との類推も導かれる。

これを見るため、先の一次元ブラウン運動モデルにおいて(2)式の係数の意味を考える。単位時間あたりの粒子移動の平均と分散を計算してみよう。

・単位時間当たりの移動平均

$$=\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{\Delta x}{2}+\frac{-\Delta x}{2}\right\}=0$$

この式の意味は、単位時間当たりの粒子が左右に移動する距離の期待値がゼロということである。

・単位時間当たりの移動分散

$$=\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{(\Delta x-0)^2}{2}+\frac{(-\Delta x-0)^2}{2}\right\}=\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

よって(4)式と比較すれば、この粒子移動の分散は拡散係数の意味があることが分かる。

確率過程論では、標準ブラウン運動と呼ばれるdW_tに対して

$$(dW_t)^2=dt \tag{5}$$

をItoの補題と呼んでいる。(4)式との雑な対応を試みれば

$$dW_t \leftrightarrow \Delta x,\ dt \leftrightarrow \Delta t$$

ということであり、またこのとき$\nu=1$である。標準とは、値がこのように１に正規化されている意味である。それよりむしろ重要なのは、拡散係数がゼロでない有限の値となること、すなわちΔxが$\sqrt{\Delta t}$と同程度であるということである。

さらに注意として、数値計算分野でよく知られている事実を述べておこう。それは、(2)式を用いて実際に計算機を動かしたとき、場合によっては得られる数値が大きく振動する。これを不安定現象という。(2)式による数値計算が、このような不安定さを示さないためには、$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\geq 2$ となるときそのときに限ることが知られている。これは拡散係数が、ゼロではなくある程度大きい値をとるという条件である。これもΔxが$\sqrt{\Delta t}$と同程度であるというItoの補題に対応していると考えることができる。筋の良い理論は、このように形を変えていろいろな場面で重要な事実として現れる。

（注２）(1)式の両辺をテイラー展開する。

$$\text{左辺}=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Delta t=O((\Delta t)^2)$$

$$\text{右辺}=\frac{1}{2}\left\{u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)(\Delta x)^2+u(x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)(\Delta x)^2+O((\Delta x)^3)\right\}$$

よって整理すると

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+O\left(\Delta t+\frac{(\Delta x)^3}{\Delta t}\right)$$

$(\Delta x)^2/\Delta t\to\nu$を保ちながら$\Delta t,\Delta x\to 0$とすれば(3)式を得る。

Itoの補題および公式については次回により詳しく考える予定である。

(5) アインシュタインの理論

以上の議論は、実は相対性理論で著名なアルバート・アインシュタイン（A. Einstein 1879－1955）によるものである。奇跡の年と呼ばれる1905年に、アインシュタインはどれも著名かつ重要な三つの論文を公表している。一つは特殊相対論に関して、一つは光量子仮説に関して、そしてもう一つがこのブラウン運動の理論に関するものである。そのブラウン運動についての論文では、アインシュタインはアヴォガドロ数Nの測定に用いることができるとも書いている。アヴォガドロ数とは、1 molで表される量の中の分子数であり、各分子同じ値となり

$N=6.02216\times10^{23}=\mathrm{mol}^{-1}$

である。

アインシュタインの考えをより詳しく述べると、拡散方程式(3)式は、熱や温度や濃度が拡散する現象そのものから導出することができる（注3）。そのとき拡散係数νの値は実験によって測定される。一方、ブラウン運動に基づいて上のように拡散方程式(3)式を導出すると、ここで詳しくは述べないが、拡散係数νはアヴォガドロ数その他幾つかの物理定数を用いて表すことができる。よって拡散係数の実測値から逆にNの値が求められるのである。

3．株価変動モデル

(1) 株価変動モデル

ブラウン運動を株価変動のモデル化に用いようという考え方は、ルイ・バシュリエ（L. Bachelier 1870－1946）に始まるとされている。彼は1900年に公表された博士学位論文において、先にアインシュタインによると述べたブラウン運動の理論を構成し、それを株価変動のモデルとして提出していた。バシュリエの方がアインシュタインより５年も早いので、こちらを先に言及するのが当然なのではあるが、何分アインシュタインの業績はその後の展開からも圧倒的であり、そこまで大胆な記述をするには気が引けた。ともあれ不幸なことに、このバシュリエの仕事はその後長らく忘れられたように取り扱われる。1960年代になって再発見され、現在では、確率過程論およびそのファイナンス理論への適用に関する先駆者として正当な評価を得ることになった。P. A. Samuelsonの概説論文（1973）によれば、“…when I compared the two texts, I formed the judgement（which I have not checked back on）that Bachelier’s methods dominated Einstein’s in every

（注３） $u(x,t)$を、位置x時刻tにおける温度とする。他の例では、例えば食塩水の食塩濃度とする。その場合でも、以下の考察は同様である。温度の時間変化率$(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))/\Delta t$は、温度勾配$\partial u/\partial x$の変化率

$$\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right\}$$

に比例する。この意味は、例えば80℃の湯の中の20℃の金属球と、40℃の湯の中の20℃の金属球とでは、前者の方が金属球の温度は早く上昇することからも窺える。比例定数を$\nu/2$とし、$\Delta t,\Delta x\to0$とすれば(2-3)式を得る。ブラウン運動のような微視的な運動法則を用いずに、単なる現象論から拡散方程式が導出されるのである。

（注４） …二つの論文を比較したとき、（その後再確認していないが）バシュリエの方法がアインシュタインのより、すべての方向において卓越しているとの判断になった。（筆者訳）

element of the vector [注4]." と高い評価が与えられている。

さて、ブラウン運動を株価変動のモデル化に用いる根拠は、大ざっぱに述べれば次のような描像である。すなわち、株価というあたかも水面に浮かぶ微粒子に対して、さまざまな性向をもった投資家の投資行動という熱分子運動が働いている。ここで水面は株価の値の範囲であり、さまざまな性向とは、ある投資家は危険な賭けを好み大胆な注文を出すが、別の投資家は安全運転を好み落ち着いた注文を出す、といったものである。その結果として、株価はちょこまかと極めて落ち着かない動きをする、と考えるのである。

以上は本当に雑な類推であり、寄り付くときの板寄せ方式とその後のざら場方式との差異に関して、あるいは成行注文と指し値注文はモデル化においてどのように区別されているのかに関してなど、何も考察していない。ただ単にブラウン運動を用いる理由について基本の考えを示したのみである。

さらに正確に事実を述べれば、バシュリエの理論がそうであるが、株価そのものがブラウン運動すると考えれば不都合な状況が起こる。それは株価が負の値を取り得ることである。そこでSamuelsonは株価の対数値がブラウン運動に比例すると拡張した。比例定数がボラティリティである。これが対数正規過程であり、後のBlack-Scholes方程式の基本変動過程となる。これに関しては次回以降にもう一度触れる予定である。

株価変動のモデル化としてブラウン運動を用いる利点はほかにもある。それは時間の向きに関する性質である。次にこの拡散現象と時間の向きについて考える。

(2)　ブラウン運動と時間の向き

拡散現象あるいはブラウン運動は、時間に将来と過去の向きを定めていることに注意しておく。すなわち例えば、コーヒーカップの中に角砂糖を一つ入れて、かき回さずに放置する。すると時間が経過すれば、角砂糖は溶けてコーヒー全体に行き渡っているはずである。これは、角砂糖を構成する砂糖の微粒子に水分子が激しく衝突し、砂糖の微粒子をはぎ取って水の中に混ぜていく。その結果として、だんだんと砂糖がコーヒー全体に溶け出る拡散現象である。注意すべきことは、確かに角砂糖はコーヒー全体に溶け出るが、逆に、一様に溶けた砂糖が自然に集まって角砂糖となる、このようなことはあり得ない、つまりそのような確率はゼロであるという事実である。これはいうなれば、時間が進むにつれて角砂糖は溶けていくのみ、という時間の一方向を示していると解釈することができる。

以上の事実を方程式の立場で解釈すると次のようになる。拡散方程式(3)式は、初期状態、例えば$t=0$におけるuの値$u_0(x)$を指定して、初期条件$u(x,t=0)=u_0(x)$を満たすように解くが、それは時間が正の方向・将来の方向に対して解くのである。時間が負の方向・過去の方向に対しては一般には解けない。それはあたかも、砂糖水から蒸発なしに角砂糖が自然に固まるような状況を考えることができないのと同様である。一方Black-Scholes方程式、あるいはほかの数理ファイナンスのモデル方程式では、満期条件を指定して時間の負の方向に、すなわち将来から現在に向かって解くことが多い。それは単に時間微分の係数が逆なだけである。(3)式ならば左辺にマイナスがついている状況である。よってもし拡散方程式(3)式が、一般に時間の負の方向に解くことが可能ならば、数理ファイナンスにおいては、それはあたかも将

来が見通せることに対応して不合理である。よって株価変動のモデル化に拡散現象が用いられるのは、将来は予測できないという意味で自然なことである。とび（jump）の過程が株価変動のモデル化に必要であると述べたが、その場合でもブラウン運動拡散現象の部分はやはり必要性を失わないのである。

4．身近なデリバティブの考え方

⑴　身近なデリバティブ

金融工学、数理ファイナンスの特徴の一つに、上に述べた株価変動モデル、さらには他の変動モデルを基にして、さまざまなデリバティブ・派生金融商品の価格付けを理論的に行うことがある。市井で金融工学として意識される内容は、ともすれば複雑なデリバティブを考案し、そこによく分からない数学を駆使して価格付けを行う、というところかもしれない。しかしこのうち、デリバティブ取引の基本となる考え方は、金融取引の世界に特有のものではなく、実は身近にある、いわば生活の知恵とも言える仕組みである。この事実を以下に手短に確認してみよう。

まず、そもそもデリバティブ取引を行う主な目的は、そのリスク移転機能のためである、と述べて恐らく大きな誤りはないだろう。取引対象は株式のみならず、金利、為替、各種指数、金や原油などの商品まで幅広い。ここでリスクとは、変動する不確定な対象という程度のもの、あるいは第３章で触れた確率変動モデルを含むものと考えておく。この意味ではリスクとリターンは表裏一体であり、リスクあるところリターンあり、リターンあるところリスクあり、となる。なぜならともに変動する対象であり、一方のリスクはもう一方のリターンとなるからである。このような意味でもデリバティブ取引は、そうとは認識することなく日常でも頻繁に用いられている。

一つの例は手付金である。今手元にある旅行会社の企画旅行の案内を見ると、申込金として、一人当たりの旅行代金が３万円未満のときは６千円が、６万円未満のときは１万２千円が、９万円未満のときは１万８千円が、９万円以上のときは旅行代金の20パーセントがそれぞれ必要とある。急に突発的な仕事が入る可能性はあるものの、人気のツアーに参加したいと考えている人にとり、申込金を支払っておけば出発直前までそのツアーに参加する権利を確保できる、というのは魅力であろう。急に参加できなくなるリスクを、比較的小額の申込金で主催旅行会社に移転しておくのは、まさにデリバティブの考え方である。

この手付金についてはどのような額が合理的か、などとは通常考えない。それは単に、手付金は最終的な支払いに含まれるため、手付金の水準を前もって細かく考慮しないだけのことである。

他の例では婚約に伴う結納金がある。この場合のリスクは破談ということになるが、これはあまり想像したくない。しかし金銭を介在させることで、別に決定的な修羅場になるかもしれないリスクをヘッジ（hedge）していると言える。

⑵　意思決定の問題

H大学の学部生Aさんは現在４学年で、就職活動の真最中である。ところが昨今の金融危機の影響で、多くの業種で新規採用者数が減らされており、Aさんも苦戦中である。そこで指導教員に、本年度の就職先決定はあきらめ、その代わり大学院に進学し２年後に情勢が好転するのを待つ。さらには修士課程を修了することにより自らのキャリアアップを果たしたい、と相談しに来た。

いきなりどこかにありそうな話を書いたが、こ

のような意思決定を行わなければならない局面は生きていく上でしばしば現れる。学生のAさんが考えているのは、就職に対する延期の選択（オプション）を行使するかどうかである。この場合の不確実な変動は就職状況であるが、この選択を行ってしまえば後戻りはできない。その意味で金融に現れるリスク商品の取引に似てはいるが、根本的に異なる部分もある。このような意思決定を含む問題を扱う理論にリアルオプションの分野が発展してきている。これに関しては以後触れる場合もあるだろう。

5．終わりに

デリバティブ再入門と大きな題目を掲げてみたが、今回はブラウン運動の考察が中心となり、むしろ自然科学の分野での読み物のようだったかもしれない。とはいえ、新書でも刈屋［2000］、今野［2000］の大家の著作をはじめとし、ほかにも良書が多い入門解説書の世界である。あえて奇をてらうつもりはないが、著者の得意領域を基礎にすれば、このように自然科学の側面をどうしても重視することになる。ご寛恕を請うところである。もう少し弁明を続けさせてもらうならば、金融工学は社会科学の一分野すなわち科学の範ちゅうである。そして科学の基本言語は数学と考えているので、数理の側面はやはり避けて通ることはできないと思う。いかがであろうか。

ところで金融工学は科学の一つである、と述べたとき、実験により理論を直接検証する、という意味ではもちろんない。何かモデルを考案しそれを基に実際に取引したら、効率的に働かない、あるいは上手に危機を乗り切ることができない、かかる場合にはそのモデルは捨て去られる、という意味で科学と考えている。他の自然科学でも、モデルは次々に考案されるが、実験そのほかで実証されなければ消え去るのみである。ともあれ金融工学は、日本で通常行われている理系・文系の区別からは漏れることが多い。より強く述べれば、現代の社会で理系・文系の区別は混乱の原因を成すことの方が多い。いささかとっぴであるが、金融工学を語るに際しては理系・文系の思考の枠を取り去るべきことを強調して今回のまとめとしたい。

〔参考文献〕

江沢洋［1976］『だれが原子をみたか』、岩波書店.

刈屋武昭［2000］『金融工学とは何か』、岩波新書.

今野浩［2000］『金融工学の挑戦』、中公新書.

高橋誠・新井富雄［1996］『デリバティブ入門』、日本経済新聞出版社.

Bachelier, M. L.［1900］“Théorie de la spéculation,” *Annales Scientific Ecole Normal Superiore* 17, pp.21-86.

Einstein, A.［1956］*Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, Dover Publications.

Samuelson, P. A.［1973］“Mathematics of speculative price,” *SIAM Review* 15, pp.1-42.

Wilmott, P., Dewynne, J. and Howison, S.［1993］*Option Pricing*, Oxford Financial Press.

Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J.［1995］*The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press.

Wilmott, P.［2000］“The use, misuse and abuse of mathematics in finance,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A358, pp.63-73.