デリバティブ再入門

（第４回）

デリバティブ理論の展開

石　村　直　之

目　　　　次

前回までBlack-Scholes方程式に代表される金融オプションに関して、数理モデルの側面やその評価手法を中心に述べてきた。デリバティブ理論は、もちろんそれ以上の広がりを持っている。不確実性に基づくリスクの評価とその制御は、およそあらゆる状況で現れるからである。今回はその広範なデリバティブ理論の展開のうちで、信用リスクに関する数理モデル、リスク尺度の基礎事項、そしてリアル・オプションの考え方について再考する。

信用リスクの問題は、これだけで数回の解説となる話題である。さらに昨年2008年９月以降の金融危機において、金融工学そのものに批判が向けられているが、その主な原因はおそらく信用リスクを扱うデリバティブに関してだろう。数理的な内容を中心にして述べたい。次に、リスクを計測するための手法としてのリスク尺度に関して、その基礎事項を述べる。最後に、リアル・オプションの理論は、金融オプションの考え方や手法を、事業の推進や撤退の評価など意思決定の問題、現実の問題に適用したものである。その基礎となる考え方を復習する。

１．はじめに

リスクの移転機能がデリバティブの大きな特徴とすれば、その用途は当然ながら通常の金融取引にとどまるものではない。およそ不確実な状況は、人間世界のあらゆる部分に遍在するからである。この意味で、リスクを制御する手法としてのデリバティブの考え方は、適用される範囲が極めて広い。今回の主題は、これらデリバティブ理論の展開のうち、信用リスクに関する数理モデル、リスク尺度の理論、リアル・オプションの考え方について概観する。

信用リスクの問題は、その重要性からも、現在では既に大きく発展している。日本語の書物で数理事項まで詳しく書かれたものとしても、楠岡ほか［2001］、あるいは一昨年2007年には室町教授

石村　直之（いしむら　なおゆき）
一橋大学 大学院経済学研究科教授。1989年東京大学大学院理学系研究科修士課程修了。同年４月、東京大学理学部数学教室助手。東京大学大学院数理科学研究科助手、一橋大学経済学部助教授を経て、2005年４月より現職。主な著書に『経済数学』（新世社、2003年、武隈愼一教授と共著）がある。

の好著が出版されている。本誌でもほぼ10年前に、インベストメント・サイエンス・セミナーの連載で、森平教授が充実した解説を手掛けられた。改めて著者が述べる必要もないほどであるが、手短に数理モデルの論点をまとめたい。さらに一方では、昨年2008年９月以降の急激な金融危機に際して、デリバティブ理論への批判の主たる論点が、おそらく信用リスクを扱うデリバティブの評価に関する内容であった事実がある。モデルの反省とともに再考してみたい。

リスク尺度に関しては、著者を含めて数理科学の論理で考える者にとり心引かれる話題である。煩雑にならない程度に述べたい。

リアル・オプションは、現実問題へのオプション理論の応用として大変に興味深い。とはいえ、数理モデルの観点からはやっかいな対象であるとも思われる。基礎となる考え方を手短に述べたい。

2．信用リスク

⑴　信用リスク

信用リスク（credit risk）とは、保有する金融商品の対象企業や発行体がその債務を履行できなくなる状態、この状態をデフォルト（default）というが、デフォルトに起因する直接間接の損失を総称して言う。ここで直接の損失とは、デフォルトが発生したときに、金融商品の保有者が予定されていた利益の全部あるいは一部を受け取ることができなくなる損失のことである。また間接の損失とは、実際にデフォルトが起こらなくとも、業績悪化や経営不安による信用力低下のため、評価損など結果的にもたらされる損失のことである。信用リスクは、市場取引されている株式や金利などの価格変動に起因する市場リスク（market risk）とともに、リスク管理の主要な対象と見なされている。

さて、保有する金融商品が内包する信用リスクには、前述のようにデフォルトした場合に直接損失を受けるリスクや、信用力低下により保有資産が減少するリスクなどさまざまな側面がある。それら側面の一つ一つに対して、保有者が許容できるリスクの程度は異なる。リスクのヘッジは可能だろうか。ここで金融デリバティブ商品には、変動金利と固定金利を交換し、それぞれのリスクを変換する金利スワップ（swap）のような商品が考案され、必要に応じて取引されていることに注意しよう。これと同様に、保有する信用リスクを、スワップを通じて相手方に移動する取引が存在し、実際に取引されている。これをCDS（credit default swap）という。すなわち定められた金融商品、これを参照資産というが、その対象企業がデフォルトあるいは支払い不履行などを引き起こした場合に、定められた支払いが発生するような金融商品のことである。支払いを契約相手から受け取る権利のことをプロテクション（protection）と呼び、このプロテクションの売買を通じて信用リスクを交換するのである。プロテクションの売り手にリスクがあるため、プロテクションの買い手は、プロテクションの売り手に一定の契約料（premium）を支払い、保有する金融商品のデフォルト等の信用リスクをヘッジする。今回の金融危機で大きな問題となったのは、これらCDSの取引に関してであった。

さらに、複数のこれらCDSを裏付けとして新たに組成される証券化商品が考案されている。これらの商品を一般にCDO（collateralized debt obligations：債務担保証券）という。CDOに関しては、残念ながらここではこれ以上踏み込まないことにする。

⑵　よく用いられるデフォルトの数理モデル

信用リスクの評価に関して、数理モデルの観点から問題となる最初の点は、デフォルトのモデル化に関してである。一つの企業がデフォルトすることをどのようにモデル化するのか。また、ある企業がデフォルトすることと、別の企業がデフォルトすることとをどのように関連付けて、すなわちデフォルト相関をどのようにモデル化するのか、の２点である。

（デフォルトのモデル化）

前者のデフォルトのモデルに関しては、楠岡ほか［2001］に従って述べていくと、大きく二つの方向性がある。一つの方向は、デフォルトを企業資産が負債総額を下回る状態と見なし、企業価値をブラウン運動等の確率過程を用いた数理モデルで表す立場である。これはstructuralアプローチと呼ばれている。当該企業の財務情報の入手やその透明性に関して困難な面があるので、モデルで用いる数値の推定はやっかいである。もう一つの方向は、デフォルトの分布そのものを、公表される企業の財務情報などとは表面上無関係に、突発的な事象としてモデル化するものである。用いられる数理モデルは、Poisson過程とその拡張過程を用いることが一般であり、Poisson過程の強度過程に相当する指標、すなわちハザード率（hazard rate）によりデフォルト分布を与える方向である。これはreduced-formアプローチ、あるいはintensity-basedアプローチと呼ばれている。当該企業の社債が市場で示す情報から、そのハザード率に関係する変数を推定し得る利点があり、それがさらに信用デリバティブの価値評価に利用される。Poisson過程に関しては、保険の数理との関連も考慮して次回により詳しく述べる。

（デフォルト相関のモデル化）

後者のデフォルト相関のモデルについては、室町教授のよくまとめられた好著［2007］に従って述べると、以下の大きく三つのモデルが知られている。

一つ目はデフォルトの条件付き独立モデル（conditional independent model）である。企業の数をNとし、企業j（$j = 1,2,\cdots, N$）のデフォルト発生時刻を確率変数τ_jを用いて表したとき、τ_j（$j = 1,2,\cdots, N$）が条件付き独立であることを仮定するモデルの総称である。ここで各確率変数τ_jは、しばしばPoisson過程およびその拡張過程によりモデル化される。特にこのとき、異なる企業が同時にデフォルトする確率は０である。また条件付き独立とは、ある与えられた条件の下で各事象が独立であることを意味する。条件の与え方でいろいろなモデルを構成することができる。一般に、条件付き独立性と単なる事象の独立性には関係はない。つまり、条件付き独立だからといって独立とは限らないし、逆に独立だからといって条件付き独立というわけではない。デフォルト時刻の条件付き独立モデルは、複数資産の信用リスクに依存するような金融商品のモデルに用いられる。

二つ目は感染デフォルトモデル（infectious default model）である。これは、ある企業のデフォルト可能性をモデル化する強度過程が、別の企業の強度過程に依存するようなモデルである。資本関係が密な企業集団や、親子関係にある企業のデフォルトをモデル化するときに用いられる。連鎖倒産のモデル化にも利用される。ただ、企業数が３以上の場合は、依存関係の詳細な解析は数理としてもやっかいなことが多い。

三つ目はコピュラモデル（copula model）である。コピュラの定義そのものをここで述べることは行わないが、大ざっぱな意味は、同時分布関数を表す比較的簡単な関数たち、と考えていただきたい。幾つかの関数たちがよく用いられている。同時分

布関数なので、デフォルト相関のモデル化には次のような手法が提案されている。すなわち、デフォルト時刻τ_j（$j = 1,2,\cdots, N$）の同時分布をコピュラで表すモデルと、デフォルトを定める閾値の同時分布をコピュラで表すモデルである。後者におけるデフォルトを定める閾値とは、デフォルト時刻を、ある閾値に到達する停止時刻で定めたときその閾値を意味する。

(3) 問題点

昨年来の金融危機において、一部のCDSやCDOの価格付けが機能しなくなった、あるいはそれらの損失が総額どれくらいになるのか確定できなかった、等ささやかれていたよう記憶する。当事者ではないので正確な事実は分からないが、伝えられる当局の規制の動きから想像されるところでは、そのような状態も発生していたのであろう。金融商品としてのCDSそのものは、信用リスクの交換を賄う基本的な商品と言える。必要に応じて考え出されたものであり、良識をもって利用される限りにおいては、今後もなくなるとは考えられない。ただ、その価格評価の基礎となる数理モデルそのものには、まだまだ改良改善の余地があるようだ。用いられる数学は確かに複雑となるものの、常人の理解をはるかに超える内容ではないので、それら数理モデルの長所や短所、さらには限界に関しては、ある程度の理解や感覚を持っている必要があろう。そもそも数理モデルが前提とする仮定が、すべて完全に満たされることは、現実には通常存在しないことは、認識しておいてしかるべきであろう。

3．リスク尺度

(1) リスクを表す関数

大ざっぱな述べ方であるが、それぞれのポートフォリオが内包するリスクの程度を、ある関数値をもって表すことは可能であろうか。実際振り返れば、H.M.Markowitzによる平均・分散モデルでは、確率分布Xのリスクの程度を、平均$E[X]$が一定の下で分散$V[X]$の大小により評価したモデル、ととらえることができる。そこでは、ポートフォリオの期待収益率すなわち平均を一定にしたとき、その分散を最小にするポートフォリオを最小分散ポートフォリオと呼ぶ。周知のようにこの考え方は、W.Sharpeによる資本資産評価モデル（Capital Asset Pricing Model）すなわちCAPMへとつながっていく。この意味では、リスクを表す関数の概念そのものは、証券投資に数理的な方法が導入された最初から用いられていたと見なしても大きな誤りではない。

1990年代以降、ポートフォリオXの内包する上記の意味でのリスクの程度$\rho(X)$、それがどのようなものであるべきかを定める規則$X \mapsto \rho(X)$の研究が盛んとなっている。ここで記号$X \mapsto \rho(X)$の意味は、Xに対して数値$\rho(X)$が対応することを表す。この規則をリスク尺度（risk measure）と呼ぶ。数学では「measure」には通常「測度」の訳語を与え、測度論（measure theory）として偏微分方程式論や位相空間論と同様に独立した分野であるが、ここでの「measure」は正確にはその「測度」ではないため、「尺度」の訳語を与える。

ここでは、これらさまざまなリスク尺度について、代表的なVaRと、コヒーレント・リスク尺度について手短に再考する。

⑵ VaR（Value at Risk）

VaR（Value at Risk）に関しては、その計測手法等、恐らく新たな解説も不要なほどよく知られた事項と考えられる。ここでは数理的な事項を中心に、簡単に述べたい。

まずVaRの定義は次の通りである。今、リスクを表す確率変数Xは損失（loss）を表すものとする。このとき$0 \le \alpha \le 1$に対して、Xの信頼水準100（1－α）％の（下限（lower））Value at Riskとは、基準点を０とした場合

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) = q_{1-\alpha}(X)$$

で定められる。ここで$q_{1-\alpha}(X)$は、Xの下方分位関数（lower quantile function）を表す（注１）。すなわち

$$\begin{aligned} q_{1-\alpha}(X) &= \inf\{x \mid P(X \le x) \ge 1-\alpha\} \\ &= \sup\{x \mid P(X \le x) < 1-\alpha\} \end{aligned}$$

上でinf、supは、それぞれinfimum、supremumの略で、下限、上限と訳される。最小、最大に対応するminimum、maximumと異なるところは、それを達成する要素が存在するかどうかにかかわる。

例を挙げると

$\min\{x \mid 2 < x\}$（２より大きい実数の最小値）

を満たすxは存在しないが、

$\inf\{x \mid 2 < x\} = 2\,(= \inf\{x \mid 2 \le x\} = \min\{x \mid 2 \le x\})$

である。分位関数に、なぜこのような定義を用いるかといえば、分布関数$P(X \le x)$には不連続な点があり得るからである。例えば

$$X = \begin{cases} 0 & \text{確率}1/2\text{で} \\ 1 & \text{確率}1/2\text{で} \end{cases}$$

とすれば

$$P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0\text{のとき} \\ 1/2 & 0 \le x < 1\text{のとき} \\ 1 & x \ge 1\text{のとき} \end{cases}$$

となり、$x=0$および$x=1$で不連続となるからである。ちなみにこのとき

$$q_{1/2}(X) = 0, \quad q_{1}(X) = 1$$

である（注２）。

さてVaRの意味を粗く述べれば次の通りである。すなわち、$\mathrm{VaR}_{0.01}(X) = M$であるとは、１％の確率で起こり得るような$X$が大きな値をとる場合を除いて、$X$のとり得る値の上限は$M$である。

次の例は、VaRへの批判としてしばしば挙げられる、いわゆる劣加法性の問題を扱っている。

例．等確率で起こり得る二つの状態a、bに対して値が定められる、次の二つの確率変数X、Yを考える。

$$X = \begin{cases} 20 & \text{状態}a\text{のとき} \\ -10 & \text{状態}b\text{のとき} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} -10 & \text{状態}a\text{のとき} \\ 20 & \text{状態}b\text{のとき} \end{cases}$$

このとき、$\alpha=1/2$に対して、つまり信頼水準

（注１） 上側（upper）VaRも上方分位関数（upper quantile function）を用いて同様に定義される。さらに、Xが将来価値を表す場合は、Xを$-X$に変更し、また上方と下方を入れ換えた定義となる。本質的には同じなので、どれか一つで理解しておけば問題ない。

（注２） 上方分位関数は $q^{1-\alpha} = \inf\{x \mid P(X \le x) > 1-\alpha\} = \sup\{x \mid P(X \le x) \le 1-\alpha\}$ で定義されるが、これに対しては次の値となる。 $q^{1/2}(X) = 1,\ q^{1}(X) = \infty$ 上方分位関数と下方分位関数の定義における、等号の有無の微妙な差に注意いただきたい。

50％のVaRは、

$$\mathrm{VaR}_{1/2}(X)=\mathrm{VaR}_{1/2}(Y)=-10$$

しかし、確率変数$X+Y$は確率１で、すなわち状態がaのときもbのときも値は20－10＝10なので

$$\mathrm{VaR}_{1/2}(X+Y)=10$$

よって

$$\mathrm{VaR}_{1/2}(X+Y)>\mathrm{VaR}_{1/2}(X)+\mathrm{VaR}_{1/2}(Y)$$

という不等式が成立している。

この例では、$\alpha=1/2$といういささか人工的な設定であるが、よく用いられる値の$\alpha=0.01$、つまり信頼水準99％の場合でも同種の例は構成できる。意味するところは、VaRがリスクの分散投資効果をうまくとらえ切れていないという事実である。劣加法性を満たすように改良されたVaRとして、条件付きVaRすなわちCVaRが知られている。

⑶　コヒーレント・リスク尺度

その名高い論文Artzner *et al.*［1999］において著者たちは、リスクの尺度が満たすべき望ましい諸性質を公理として挙げ、これらの公理を満足するリスク尺度に関して議論した。これを公理論的手法という。そして彼らは、以下に述べる四つの公理を満たすリスク尺度を、コヒーレント・リスク尺度（coherent risk measure）と呼んだ。この節では、このコヒーレント・リスク尺度の基礎事項を再訪しよう。

以下では、X、Yはポートフォリオの現在価値を表す確率変数とする。コヒーレント性の公理とは次の四つである。

公理１（単調性<monotonicity>）

$X\leq Y$ならば$\rho(X)\geq\rho(Y)$

この公理は、小さな利益しか生み出さないようなポートフォリオはよりリスクが高いことを意味する。あるいは同値な述べ方であるが、より大きな損失を出すようなポートフォリオは高リスクであるという要請である。

公理２（並進不変性<translation invariance>）

任意の実数αに対して$\rho(X+\alpha)=\rho(X)-\alpha$

この公理は、確率変動しない資産、すなわちリスクのない資産を加えると、その分だけ全体のリスクは低下することを要請する。さらには、リスク尺度ρの縮尺（scale）とαの縮尺が同じであることも意味している。

公理３（正の斉次性<positive homogeneity>）

任意の$\lambda\geq 0$に対して$\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$

この公理は、すべての資産量をλ倍したポートフォリオのリスクは、やはりλ倍になるという要請である。理論上便利な性質であろうが、λが極めて大きいとき、λXはリスク分散とは逆の、同一の巨大なポジションという戦略であるため、この要請が果たして妥当がどうかには批判もある。

公理４（劣加法性<subadditivity>）

$\rho(X+Y)\leq\rho(X)+\rho(Y)$

この公理は､いわゆる分散投資効果を意味する。すなわち、別個独立にポートフォリオを管理する戦略よりも、それらをまとめたポートフォリオを管理する戦略の方が、リスクが増すことはないという要請である。先の例で見たように、VaRはこの劣加法性の公理を満たさない。

これらの公理から直ちに導かれる性質は、例えば次がある。

$$\rho(0)=0$$

これは、公理３において$\lambda=0$とすれば分かる。この性質は$\rho(X)$の値は、ある意味で正規化されていることを示す。

$$\rho(X+\rho(X))=0$$

これは、$\rho(X)$が実数値なので公理２より出てくる。

コヒーレント・リスク尺度の例としては（注３）、例えば

$\rho(X)=-E[X]$：Xの平均

$\rho(X)=\mathrm{ess\ sup}(-X)$：$-X$の本質的上限

がある。ここで、ess supはessential supremumの略であり、確率変数Xが、確率０の集合を除いてとり得る値の上限を考えることを表す。ほかにも幾つかの例が知られている。しかし、リスク尺度としては当然考えられそうな、例えばXの標準偏差$\sigma[X]$を用いた

$$\rho(X)=\sigma[X]$$

などは公理１の単調性を満たさないので、コヒーレントではない。

(4) 問題点

コヒーレント・リスク尺度のように、望ましい公理を満たす対象を見いだすような問題は、数理科学の訓練を受けた者には大きな興味を抱かせる。とはいえ、現実の経済現象はあまりに多様である。臨機応変に対処すべき実際の現象を、厳しい公理体系でとらえようとすると、全体のごく一部分しか見ないこととともなろう。そもそもリスク尺度に関しては、それ一つで十分でありすべてうまく進むような尺度は見いだしにくい。やはり幾つかのリスク尺度を併用すべきであろう。

4. リアル・オプション

(1) リアル・オプションとは

この章では話題を変えて、不確実な状況の下での意思決定の問題に金融デリバティブの考え方が応用された、リアル・オプションの理論を振り返ろう。

リアル・オプション（real option）とは、文字通りには現物の資産（real asset）に関する選択権（option）の問題を考察する理論である。例えばある会社が、一つの製品を製造する工場を、別の製品を製造するように組み替えしようとする、そのような判断に関する理論上の材料を提供する。工場という現物の資産に関して、その製造内容を変更しようかどうかという選択の問題を論じるのである。もちろん実際の変更の根拠には、消費者の嗜好が変化したため現行の製品は今後とも売り上げの改善は見込めないとか、乗り換えようとする別の製品は潜在需要がはっきりしており今ここで決断しないと先行利益は見込めないとかのさまざまな要因が複合しているであろう。よってたとえ工場の組み替えを決定したとしても、それはとても一筋縄ではいかない判断であっただろう。いわば「指導者の判断」とでも評価されるべきものだろう。

なぜ素朴にも、工場を組み替えるという決定がこのような感覚を抱かせるかと考えれば、一つの理由には、その行為が一度行われてしまえば簡単には後戻りのできない、いうなれば不可逆的な行為である事情が挙げられる。工場の組み替えに

（注３） 個々のコヒーレント・リスク尺度を議論する際には、通常確率変数Xが属すべき集合、すなわち許容集合（acceptance set）を同時に考える。ここでは記述が煩雑になるのを避けるため、この部分に関しては略する。

は、もちろん組み替えを売買する取引が行われているわけではないし、さらに金融取引でのように簡単に反対売買ができる内容ではないのである。リアル・オプションが対象とするのは、このような工場を組み替えようとする選択のように、市場で取引されているわけではない資産の問題であったり、あるいはその選択決定が、一度実行されてしまえば取り返しが効かない問題であったりする。そのような現実の意思決定の問題に、数理モデルを用いて判断の材料を提供しようとするのである。不確実な状況の下で、事業を構成し直すような決定を含めた広い意味での投資、その投資をどのように評価するのか理論付けるのである。

リアル･オプションが取り扱う他の例としては、
・事業戦略において、拡大戦略を選択するのかそれとも縮小戦略あるいは撤退するのかの選択、また投資を延期するのかあるいは投資に段階を設けるのかなどの意思決定問題、
・ブランドや評判などの無形資産の価値評価の問題、
その他がある。最近の研究の動向として、津田ほか編［2008］の論文集を挙げておく。

⑵　例－待つ選択

ところでこのような意思決定にかかわる価値評価には、純現在価値（Net Present Value：NPV）、すなわち投資が生み出すであろう利益を現在価値に割り引き、さらに必要経費を差し引いた価値、を指標とすることがよく行われている。リアル・オプションは、この純現在価値のみでは評価しきれない状況も取り入れようとする。例で考えてみよう。この例は、本質的にはDixit and Pindyck［1994］の教科書の最初に述べられている例を参考にしたものである。

例．価格変動する商品の製造事業

ある会社が、現時点では月25万円の利益を上げ得る新商品の製造事業に、参入すべきかどうか判断しようとしている。もともとその会社は、この商品と類似の製品を製造しており、新商品製造に参入するのはむしろ容易である。しかし、新商品を製造するには製造する装置への初期投資が必要であり、それは1,200万円であるとする。この初期投資は５年で回収したいので、現時点から５年先までの利益を予測すれば十分であるとする。この会社は新商品製造に乗り出すべきか否か判断したい。簡単のため、安全利子率は１で変化しないものとする。

現時点で新商品製造に投資した場合、純現在価値は、５年つまり60カ月なので

$$-1200+\sum_{k=1}^{60}25=-1200+25\times 60=300$$

よって純現在価値の観点からは、この新商品製造に乗り出すべきである。

ところがここで、この新商品については来月に重大な状況の変化が起こることは確実であり、その結果としてこの新商品がもたらす利益は、月40万円に上昇するかもしれないし、またあるいは月10万円に下落するかもしれないとする。しかもその確率は半々であるとし、一度変化が起これぱこの先５年間はそのまま続くと仮定する。利益の流れを図で表すと次のようになる。

$$25 \begin{cases} \nearrow\ 40 \longrightarrow 40 \longrightarrow \cdots \text{確率 } 1/2 \\ \searrow\ 10 \longrightarrow 10 \longrightarrow \cdots \text{確率 } 1/2 \end{cases}$$

現時点　来月以降

この状況でも、現時点で新商品製造に投資した場合の純現在価値は前と同じである。というのは、上昇する場合と下落する場合を合わせた期待利益は、それぞれ半々の確率なので

$$\frac{1}{2}\times 40+\frac{1}{2}\times 10=25$$

となり現時点での利益水準に等しいからである。

さて、来月になって利益が月40万円となった場合に限り投資を実行するとしよう。この選択を行った場合の現時点での純現在価値は、上昇する確率が２分の１なので、

$$\frac{1}{2}\left(-1200+\sum_{k=1}^{59}40\right)=\frac{1}{2}\left(-1200+40\times 59\right)$$
$$=580$$

となり、現時点で投資を行う場合より高い評価となる。

この例が意味する教訓は、純現在価値が正であり、よって現時点で投資を行うことが純現在価値の指標で根拠付けられていても、１期間待つという選択を行うことには理由がある、という事実である。実際にこの例では、来月になり利益水準が上昇してから投資を行った方が、現時点で投資を行うより有利なことが示されている。リアル・オプションの優れた結論の一つには、この例のような、待つという選択の意義を理論の上から明らかにしたことがある。

⑶　問題点

ところがすぐに幾つかの問題点も思いつく。先の例で考えてみても、一度利益水準の変化が起これば、その後５年程度変化しないというのはあまりにむちゃな仮定である。それどころか、少し設定の数字を変更すれば、結論も直ちに変更される場合がある。

例えば先の例で、新商品がもたらす利益は変化が起こった後には30万円に上昇するか20万円に下落するか、やはり半々の確率で起こるとする。現時点で新商品製造に投資した場合の純現在価値は、この場合でも同じである。実際

$$\frac{1}{2}\times 30+\frac{1}{2}\times 20=25$$

となるからである。さらに利益の流れを図で表しておくと

$$25 \nearrow 30 \longrightarrow 30 \longrightarrow \cdots 確率 1/2$$
$$\searrow 20 \longrightarrow 20 \longrightarrow \cdots 確率 1/2$$

現時点　来月以降

しかし、来月になり利益が月30万円となるのを待って投資を実行すれば

$$\frac{1}{2}\left(-1200+\sum_{k=1}^{59}30\right)=\frac{1}{2}\left(-1200+30\times 59\right)$$
$$=285$$

となり、現時点で投資を行う方が高い価値となるのである。

この反例は何を意味するのであろうか。それは直接には、数値の変化に対して結論が大きく影響されるという事実である。しかしより斜に構えた言説をお許しいただくならば、投資決定のような高度な判断を要する選択の根拠としては、一つの理論だけではあまりに脆弱であることを示していないだろうか。もちろんこのような単純なモデルでは、与える数値により異なる結論となるのも無理はない、と反論があるかもしれない。しかしより高度なモデル、例えば確率制御理論を用いた複雑なモデルを考え、最適解が満たすべきHJB（Hamilton-Jacobi-Bellman）方程式を解いたとしても、同様の現象はあり得るのである。また変動モデルの設定についても、株価変動モデルにブラウン運動が用いられる是非以上にはっきりしない面があるように思われる。現実世界の問題を扱う以上、数学として、最初からこれこれのモデルを仮定します式の論法では乱暴に過ぎる。待つ選択の意義や、隠れた無形資産の評価を明らかにした点は、リアル・オプションの優れた成果であること

は論をまたない。とはいうものの、一つのモデルの一つの結果のみを根拠にして重大な意思決定を行うというのは無謀であろう。

最後に、初回に述べた学生の進路決定の問題を再び考えてみよう。本年度の就職状況は大変に悪いため、自らのキャリアアップと２年後の景気好転を期待し、本年度の就職活動をあきらめ大学院進学を選択しようかと考えている学生の意思決定問題である。この選択を単なる経済上の問題と見なして考察すれば次のようになるだろう。経済情勢を不確実性の源泉として給与水準が変動する数理モデルを何か設定する。大学院での諸費用を投資資金として、苦しくとも本年度に就職活動を完遂する選択と、大学院に進学し、その場合は修了後に就職すれば給与水準が少し高いというその選択の、どちらがより利益をもたらすかを比較するのである。仮定の数値を代入すれば、比較可能な数値程度はもちろん出すことができるだろう。しかし、この根拠だけで進路決定を行うのは、やはりあまりに常軌を逸している。大学院に進学すれば、能力の高い外では得がたい友人が増えるかもしれないし、本年度就職すればそこでもしかすると生涯の伴侶に出会うかもしれない。このような不確実性は数理モデル化できるわけではない。だから人生は面白い、とも言えるのだろう、と思うがいかがであろうか。

5．終わりに

今回はデリバティブ理論の展開と称して、信用リスクに関する数理、リスク尺度、そしてリアル・オプションの考え方について、そのほとんど入り口のみを概観した。金融論としてのあるいは経済学としての深い意味付けを詳細に論じるには筆者は不適任である。そのため特に、信用リスクの話題においても、今回の金融危機で問題となった格付けに関する事項には立ち入ることはしなかった。というのは、これらの数理モデルでは格付けは所与として扱うことが一般だからである。筆者に可能なのは、それぞれに用いられている数理モデルに関して幾つかの事項を述べるのみである。しかもその数理の水準は、残念ながらそれぞれにある程度の準備を要するので、ここでの記述は表面的なものに過ぎざるを得なかった。お許しいただきたい。とはいえ、金融や経済としての問題点から離れて、数理科学の問題として考察した場合、今回の対象は大変に興味深い。新しい方程式や手法が生み出される可能性がある。そこで、数理科学としての研究は、広範にかつ深く進むこととなる。しかしそのような状況でも、現実との接点を失わない研究というのは、ともすれば実はなかなかに難しいものがある。暴走必至の理論が幅を利かせないためには、数理モデルを用いる上でも良識はやはり必要であろう。

〔参考文献〕

楠岡成雄・青沼君明・中川秀敏［2001］『クレジット・リスク・モデル』、金融財政事情研究会.

津田博史・中妻照雄・山田雄二（編）［2008］『非流動性資産の価格付けとリアル・オプション』、朝倉書店.

室町幸雄［2007］『信用リスク計測とCDOの価格付け』、朝倉書店.

森平爽一郎［1999－2000］「信用リスクの測定と管理（第１回－第６回）」、『証券アナリストジャーナル』第37巻第９号46-61ページ、第37巻第11号81-101ページ、第38巻第１号85-100ページ、第38巻第３号102-120ページ、第38巻第５号104-124ページ、第38巻第７号84-96ページ.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck［1994］*Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.

Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath［1999］“Coherent measures of risk,” *Mathematical Finance* (July).