

デリバティブ再入門

(第2回)

二項モデルと離散Ito公式

石村直之

目次

- | | |
|-------------------|------------|
| 1. はじめに | 4. 離散Ito公式 |
| 2. 二項モデル再訪 | 5. 終わりに |
| 3. 無裁定の原理とリスク中立確率 | |

金融工学あるいは数理ファイナンスの一つの基礎であり、特に価格評価の理論支柱である無裁定の原理について、二項モデルを復習しながら再考する。内容そのものは多くの教科書に述べられている。重複を恐れずに、読みやすさを重視して解説する。

後半では、二項モデルなどの離散過程に対するIto（伊藤）の公式、すなわち離散Ito公式について手短かに紹介する。これは近年、藤田岳彦教授（一橋大学大学院商学研究科）により導入された理論である。極限として標準ブラウン運動に対するItoの公式が得られることを確認する。

1. はじめに

言い伝えやことわざの類には、その含意する内容が全く逆のものがあつたり、単なる浅知恵にすぎないものもある。その一方では、深い生活の知恵が警句の形で述べられており、年齢を重ねるにつれて味わい深くなるものもある。今回の内容に関連することわざは「うまい儲け話はない」、あるいはより強く踏み込んで「虎穴に入らずんば虎児を得ず」である。

前者の「うまい儲け話はない」は、もしかするとむしろ処世訓であり、まれな幸運を期待せずコツコツと努力しなさい、という程度の俚諺かもしれない。しかし金融工学・数理ファイナンスの世界では、理論の基礎となる原則である無裁定の原理と対応する。また後者の「虎穴に入らずんば虎児を得ず」は、後漢書に由来する箴言であるが、金融の世界では「リスクなくしてリターンなし」と相応する。今回の主題は、数理モデルを基にしてこれらのことわざに対応する原理、無裁定の原



石村 直之（いしむら なおゆき）

一橋大学 大学院経済学研究科教授。1989年東京大学大学院理学系研究科修士課程修了。同年4月、東京大学理学部数学教室助手。東京大学大学院数理学研究科助手、一橋大学経済学部助教授を経て、2005年4月より現職。主な著書に『経済数学』（新世社、2003年、武隈慎一教授と共著）がある。

■デリバティブ再入門■

理を再考したい。

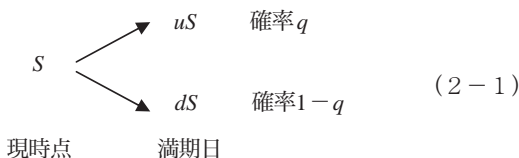
用いるのは二項モデル (binomial model) である。入門書に限らずデリバティブに関する書物には、二項モデルは必ずといってよいほどに解説されている。一つの理由は、そこで用いられる数学が、基本的には連立一次方程式のみと初等的なためである。しかもそうでありながら、無裁定の原理、複製ポートフォリオ、リスク中立確率など、数理ファイナンスにおいて主要かつ重要な概念が本質的に用いられる。誠に都合のよい題材である。ここでも、いまさら、と思われるかもしれないがこの二項モデルを取り上げよう。ただし、数理モデルとしての側面を重視するので、まずは前回述べた一次元ブラウン運動モデルとの類似性を追求する。また最後には、Ito (伊藤) の公式をその離散版を中心に解説する。

連立一次方程式とその変形が中心にすぎないので、数式が少し多くなることをお許しいただきたい。

2. 二項モデル再訪

(1) 二項モデル

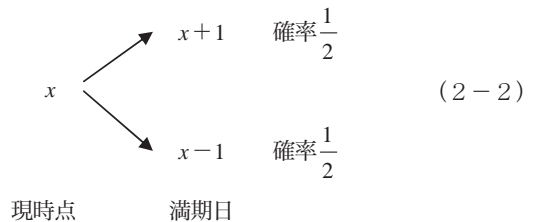
まず1期間二項モデルから始める。それは株価 S の1期間後の変化を次のようにモデル化する。



ただし $u > d$ は定数、また $0 < q < 1$ である。すなわち、現時点での株価は、1期間後=満期日において、確率 q で (上昇して) uS となり、確率 $1 - q$ で (下落して) dS となるモデルである。また以下では、株式には考えている期間において配

当はないものとする。恐らく現行の教科書の多くは、この確率 q を書いていない。実際、確率 q そのものにあまり意味はなく、後で導出されるリスク中立確率がより重要だからである。しかしここでは、Cox *et al.* [1979] の原論文に従い、この確率 q を残しておいて解説を進める。

すぐに想像されるように、この変動モデルは、前回触れた一次元ブラウン運動のモデルと類似性がある。より詳しくは、その一次元モデルを特別な場合に含んでいる。すなわち、前回のモデルを今回の (2-1) 式に倣って書くと、株価 S を位置 x に対応させ、その1期間後の変化が次のようにモデル化されることになる。



これを、上の1期間二項モデルとさらに対応させれば、 $\log(uS) = \log u + \log S$ 等に注意すると

$$x = \log S, \quad \log u = 1, \quad \log d = -1,$$

$$\text{および } q = \frac{1}{2}$$

である。すなわちモデル (2-1) の対数を考えた過程が一次元ブラウン運動となる。これはもちろん、次回に詳しく述べる予定であるが、Black-Scholes方程式の基本となる確率過程が対数正規過程であることと対応している。特にモデル (2-1) によって株価 S は負の値をとることはない。また、 $\log u = 1, \log d = -1$ 、さらに確率 $q = \frac{1}{2}$ ということは、前回の一次元ブラウン運動モデルは、実は対称性が強いことを意味している。実際、過程 (2-2) で表されるモデルは、対称ランダムウォーク (random walk、酔歩) と呼ばれている。

さて、この株価変動過程(2-1)は、もう一つ債券の変動過程とともに考えることが一般である。ここで債券の価格 B は、確定的に変動し、1期間後の満期日には確実に rB となるとする。ただし $r \geq 1$ は変動しない定数の利子率とする。図示してみれば次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 B & \longrightarrow & rB \\
 \text{現時点} & & \text{満期日}
 \end{array} \quad (2-3)$$

通常は株価変動過程(2-1)と債券の過程(2-3)を併せて1期間二項モデルと呼んでいる。

(2) 複製ポートフォリオ

さて今、ある金融資産 C を考えよう。ここで金融資産とは、その価格が変動を被るような証券あるいは金融商品とする。もちろん念頭にあるのは、例えば行使価格 E のコールオプション等である。しかし C は、特にオプションに限ることなく他の資産、例えば株価の二乗 $C = S^2$ などでもよい。考えたいのは、株式 S と債券 B の組み合わせ、つまりポートフォリオにより、満期日に株価が uS となった場合でも dS となった場合でも、 C と同等の価値を持たせることは可能かどうか、という問題である。同等というのは、正確には確率1で等しいという意味である。

そのようなポートフォリオは可能であるとし、現時点での株式 S を Δ 単位、債券は B 単位であるとすると。ただし債券の1単位の変動は

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \longrightarrow & r \\
 \text{現時点} & & \text{満期日}
 \end{array}$$

であるとする。現時点の価値が1であることは、債券を基準貨(Numeraire)としたことを含意する。

満期日における C の価格を、株価が uS となった場合は C_u とし、 dS となった場合は C_d と表す。

満期日において価値が等しいことは、

$$\begin{array}{l}
 \text{株価 } uS \text{ のとき } \Delta uS + rB = C_u \\
 \hspace{10em} (2-4)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{株価 } dS \text{ のとき } \Delta dS + rB = C_d
 \end{array}$$

である。この連立一次方程式を Δ 、 B に関して解く。つまり二つの式を満たすような Δ と B を求める。まず辺々引いて

$$\Delta(u-d)S = C_u - C_d$$

よって

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \quad (2-5)$$

この得られた Δ を、(2-4)のどちらの式に代入しても同じ B が求められる。例えば第一式に代入すれば、

$$rB = C_u - \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} uS = \frac{uC_d - dC_u}{u-d}$$

よって

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \quad (2-6)$$

このような Δ と B の組を複製ポートフォリオという。すなわち、 S と B を用いて C を、満期日において同じ価値であるように複製したのである。任意の金融資産 C に対して、このように S と B の組み合わせにより複製可能なとき、そのモデルは完備(complete)であるという。二項モデルは完備なモデルである。ただしこの完備の定義は1期間の場合であり、後で出てくる多期間の場合はもう少し条件が課されることを注意しておこう。

例. $C = S^2$ のときに複製ポートフォリオを求めよう。

$$C_u = u^2 S^2, \quad C_d = d^2 S^2$$

■ デリバティブ再入門 ■

となるから、計算が少し面倒であるが

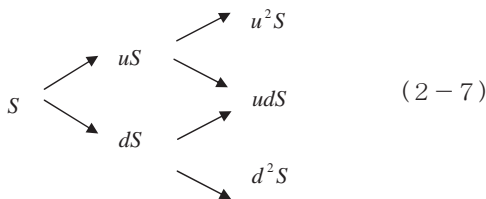
$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{u^2S^2 - d^2S^2}{(u-d)S} = \frac{(u-d)(u+d)S}{u-d} \\ &= (u+d)S \\ B &= \frac{ud^2S^2 - du^2S^2}{(u-d)r} = \frac{udS^2(d-u)}{(u-d)r} \\ &= -\frac{ud}{r}S^2 \end{aligned}$$

を得る。Bが負の値をとることは、債券を売っていることを意味する。

一つ注意を述べておくと、この例ではΔとBの式に株式Sが含まれているが、このSは変動する量ではないのか、という疑問である。今の場合、二つの金融資産の価値は満期日で等しくなるようにポートフォリオを選択した。ただし、ここで用いられているSなどの量は1期間前での値、つまり現時点での値を用いている。よって既に実現して確定している量と考えるのである。この考え方は連続モデルを考察する際により微妙かつ重要となる。

(3) 多期間二項モデル

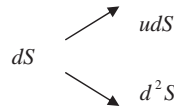
期間がさらに増えて多期間、n期間(n=2,3,...)となった場合は、1期間モデルを繰り返すこととなる。例えば2期間二項モデルは次のようになる。



現時点 1期間後 2期間後

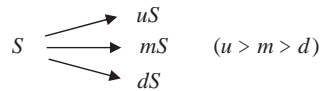
すなわち基本となる1期間モデル(2-1)を、1期間後のそれぞれの値を基にして上下につなげた形である。2期間後の価値を実現する複製ポ-

トフォリオは、基本となる1期間モデルを用いて、それぞれ1期間後の値により構成される。例えば下半分は



に対して複製ポートフォリオを構成する。これをさらに現時点まで引き戻すには、無裁定の原理を用いる必要があるため次節で考える。

最後になぜ二項なのか注意しておこう。つまり取り得る値をより多くした、例えば三項モデルならばどうなるか、という疑問である。



結論を述べればこの三項モデルは完備でない。例えば、SとBを用いて複製ポートフォリオを作ろうとする際も、(2-4)式に対応する式は三つとなり、ΔとBが確定するためには別の条件がもう一つ必要となるのである。より詳しくは、例えば木島・田中 [2007] の好著を参照されたい。

3. 無裁定の原理とリスク中立確率

(1) 無裁定の原理

再び1期間の二項モデル(2-1)を考える。任意の金融資産Cに対して、満期日における複製ポートフォリオを構成した。改めて(2-5)(2-6)式をまとめて書いておくと

$$C_1 = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} S_1 + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} B_1 \quad (3-1)$$

ただし、現時点と満期日を区別するため、下付きの添え字でそれぞれ0と1とした。また同じ文字

を用いるが $B_t (t=0,1)$ によって1単位の債券を表す。念のためにまとめて書いておくと

$$S_0 = S, \quad S_1 = \begin{cases} uS & (\text{確率 } q) \\ dS & (\text{確率 } 1-q) \end{cases}$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = r$$

である。またもちろん

$$C_1 = \begin{cases} C_u & (\text{株価 } uS \text{ のとき}) \\ C_d & (\text{株価 } dS \text{ のとき}) \end{cases}$$

としている。

問題にしたいのは、現時点における C の価値 C_0 をどう評価するか、である。すぐ思い付く候補は、(3-1) 式を現時点に転用して

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} S_0 + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} B_0 \\ &= \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \end{aligned} \quad (3-2)$$

とするものであろう。この考え方は正しいのだろうか。

結論から述べれば、無裁定の原理により (3-2) 式は正しいとされる。その考え方を手短かに復習しよう。ただし、この二項モデルが想定している市場では空売りは自由に行うことができ、しかもすべての売買には取引費用はかからないものとする。

まず (3-2) 式の右辺を Π_0 とおく。つまり

$$\Pi_0 = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} S_0 + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} B_0$$

注意を述べておくと、この記号の下では満期日において

$$\Pi_1 = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} S_1 + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} B_1 (= C_1)$$

ということである。

もし $C_0 > \Pi_0$ ならば、現時点で Π_0 を売却し同時に C_0 を購入する。この売買で $C_0 - \Pi_0$ の利益を得

るがそれは債券に投資する。満期日には、(3-1) 式より $C_1 = \Pi_1$ なので、 C_1 を買い戻し Π_1 を売却してポジションを清算する。手元には $(C_0 - \Pi_0)r$ の正の利益のみが確率1で残る。現時点では資金は何も必要なかったため、これはあり得ない。もし逆に $C_0 < \Pi_0$ ならば、売買を逆に交換した取引を行えば、満期日において $(\Pi_0 - C_0)r$ の正の利益が確率1で得られることとなり、やはりあり得ない。よって評価式 (3-2) が示された。

この論証で出てきたような、現時点での元手は何も必要ないのに、満期日において正の利益が確率1で得られる取引を、裁定機会 (arbitrage opportunity) がある取引、裁定取引と言う。あるいはサヤ取り取引と言う。俗に言うタダメシにありつけるのである。少し厳密に述べれば、裁定機会があるとは次のように定義がなされる (Björk [2004] の教科書を参照されたい)。

裁定機会 (その1)

現時点で価値が0の金融資産が、満期日には確率1で正の価値となる。

裁定機会 (その2)

現時点で価値が負の金融資産が、満期日には確率1で非負の価値となる。

どちらの場合でも単に裁定機会があるという。

金融工学あるいは数理ファイナンスにおける価格評価の基礎は、完全な市場 (perfect market) ではこのような裁定機会が存在しないという要請にある。これを無裁定の原理 (no-arbitrage principle) といい、この原理に基づいて求められた価格を無裁定価格と呼んでいる。繰り返すと、 C_0 は無裁定価格として求められるのである。

無裁定の原理の下では、考えている二項モデル

■ デリバティブ再入門 ■

の係数間の大小関係が確定する。それは

$$u \geq r \geq d \quad (3-3)$$

である。実際、もしも $r > u$ であったとする。現時点で、株式が -1 単位、債券が S 単位のポートフォリオから成る金融資産 $C = C_t (t=0,1)$ を考える。 C_0 の価値は 0 である。満期日では

$$C_1 = \begin{cases} -uS + rS & (\text{株価 } uS \text{ のとき}) \\ -dS + rS & (\text{株価 } dS \text{ のとき}) \end{cases}$$

これは共に正の値となり裁定機会を与えることになり矛盾である。もしも $d > r$ ならば、株式が 1 単位、債券が $-S$ 単位のポートフォリオを考えれば、同様に裁定機会が発生し、やはり矛盾が導かれる。

例. 先の $C = S^2$ の例は、今の記号では $C_1 = S_1^2$ を意味している。無裁定の原理により、現時点における C の無裁定価格 C_0 を計算してみよう。

$$\begin{aligned} C_0 &= \Delta S_0 + BB_0 = (u+d)S \cdot S - \frac{ud}{r} S^2 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{r} \{r(u+d) - ud\} S^2 \\ &= \frac{1}{r} \{(u-r)(r-d) + r^2\} S^2 \end{aligned}$$

すなわち、 $\frac{1}{r} \{(u-r)(r-d) + r^2\} \geq r \geq 1$ なので一般には S^2 より大きい値となる。満期で株価の二乗の価値がある金融商品の現時点での価値は、現時点の株価の二乗より大きいのである。これは一瞬奇妙な結論のようであるが、次のような状況を考えてみると納得できるだろう。例えば、 $u = 1.1$ 、 $d = 0.9$ 、 $r = 1$ としたとき、 $u^2 = 1.21$ 、 $d^2 = 0.81$ となり、二乗した場合は上昇の度合いが下落の度合いより卓越しているため、その価値の分だけ現在価格が大きいのである。

無裁定価格およびその理論、無裁定価格理論は金融工学において基本的な考え方である。しかし、門外漢の気楽な発言を許していただくなら、状況をあまりに単純化し過ぎている。そのための問題点も多いように思われる。この点については、後で今回の最後にもう一度考えてみたい。

(2) リスク中立確率

無裁定の原理による現時点での価格式 (3-2) 式を、次のようにさらに書き直す。

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{r} \left(\frac{r-d}{u-d} C_u + \frac{u-r}{u-d} C_d \right) \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{r-d}{u-d} C_u + \left(1 - \frac{r-d}{u-d} \right) C_d \right\} \quad (3-4) \end{aligned}$$

ここで

$$p = \frac{r-d}{u-d}$$

とおくと、(3-3) 式より $0 \leq p \leq 1$ が分かる。すなわち p は確率を定める。この確率をリスク中立確率 (risk neutral probability) という。

リスク中立確率を用いれば、(3-4) 式は金融資産 C の現在価値 C_0 を、上昇したときの価格 C_u を確率 p により、下落したときの価格 C_d を確率 $1-p$ によりそれぞれ加重平均して得られる期待値を導出し、それをさらに金利 r で割り引いた形となる。くどいようだが、そのように (3-4) 式を書き直しておく

$$C_0 = \frac{1}{r} \{pC_u + (1-p)C_d\}$$

なぜ確率 p をリスク中立確率と呼ぶかといえば、変動モデル (2-1) において、金融資産 $C = S$ の満期日における期待値を現時点に割り引いてみよう。すなわち

$$\frac{1}{r}\{quS+(1-q)dS\}$$

投資家がリスクに対して中立的であるならば、当然ながらこの値は S に等しいと見なすであろう。

すなわち

$$\frac{1}{r}\{quS+(1-q)dS\} = S$$

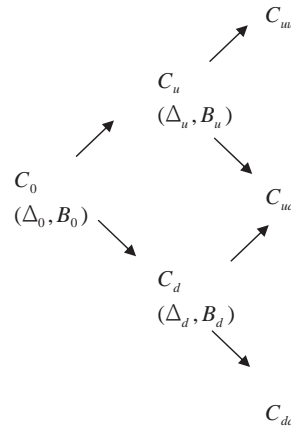
よって S で割り整理すると $(u-d)q=r-d$ となり

$$p = q$$

が得られるからである。つまりモデルの提示で最初に現れた確率が、リスク中立の下では確定されることになる。

(3) 多期間の場合と数値例

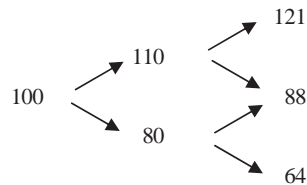
無裁定の原理の下では、多期間二項モデルに対して満期日から順々に現時点まで、価格評価を行うことができる。簡単のために2期間モデル(2-7)で考える。金融資産 C は、株価が u^2S の場合の価格は C_{uu} であり、株価が udS の場合の価格は C_{ud} 、株価が d^2S の場合の価格は C_{dd} であるとする。これから現時点の価格 C_0 までを評価しようとするのである。一つ前の1期間後の価格は、2期間後=満期日の価格を元に複製ポートフォリオを構成し無裁定価格を求める。それは基本となる1期間モデルを用いて計算し、株式価格が uS の場合の価格 C_u と、株式価格が dS の場合の価格 C_d の二つが得られる。現時点の価格 C_0 は、この C_u と C_d を元にして、1期間モデルの無最低価格を導出するのである。



(3-5)

重要なことは、この価格決定過程において、各段階で複製ポートフォリオを組み替えるものの、外部からの新たな資金導入も外部への資金流出もないことである。これを自己充足的 (self-financing) なポートフォリオという。完備の定義も、これに対応して次のように変更される。すなわち、任意の金融資産が自己充足的なポートフォリオにより複製可能なとき、そのモデルは完備であるという。二項モデルはこの定義でもやはり完備なモデルである。

最後に計算例を与えておく。簡単のため $S=100$ 、 $u=1.1$ 、 $d=0.8$ 、 $r=1$ とする。すなわち株価変動は



リスク中立確率は $p = \frac{1-0.8}{1.1-0.8} = \frac{2}{3}$ である。

金融資産 C は任意に値を与えることが可能なので、(3-5)において例えば

$$C_{uu}=44, C_{ud}=22, C_{dd}=10$$

■ デリバティブ再入門 ■

とする。計算しやすいように数字を配しただけである。

まず1期間後の価格 C_u 、 C_d は、対応する複製ポートフォリオをそれぞれ (Δ_u, B_u) 、 (Δ_d, B_d) とすると、

$$\begin{cases} 121\Delta_u + B_u = C_{uu} = 44 \\ 88\Delta_u + B_u = C_{ud} = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 88\Delta_d + B_d = 22 \\ 64\Delta_d + B_d = C_{dd} = 10 \end{cases}$$

より、 $(\Delta_u, B_u) = (\frac{2}{3}, -\frac{110}{3})$ 、 $(\Delta_d, B_d) = (\frac{1}{2}, -22)$ となる。これから

$$C_u = 110\Delta_u + B_u = \frac{110}{3}$$

$$C_d = 80\Delta_d + B_d = 18$$

もちろんこれは、リスク中立確率を用いて

$$C_u = \frac{2}{3} \cdot 44 + \frac{1}{3} \cdot 22 = \frac{110}{3}$$

$$C_d = \frac{2}{3} \cdot 22 + \frac{1}{3} \cdot 10 = 18$$

と計算しても同じ値を得る。仮定の $r = 1$ に注意していただきたい。

現時点の価格も、 C_u と C_d を用いて同様に計算される (注1)。結果は次である。

$$(\Delta_0, B_0) = \left(\frac{28}{45}, -\frac{286}{9} \right), C_0 = \frac{274}{9}$$

(注1)

$$\begin{cases} 110\Delta_0 + B_0 = C_u = \frac{110}{3} \\ 80\Delta_0 + B_0 = C_d = 18 \end{cases}$$

を解いて $(\Delta_0, B_0) = \left(\frac{28}{45}, -\frac{286}{9} \right)$ を得る。さらに、 $C_0 = 100\Delta_0 + B_0 = \frac{274}{9}$ 、あるいはリスク中立確率を用いて

$$C_0 = \frac{2}{3}C_u + \frac{1}{3}C_d = \frac{2}{3} \cdot \frac{110}{3} + \frac{1}{3} \cdot 18 = \frac{274}{9} \text{ を得る。}$$

4. 離散Ito公式

二項モデルは、現時点、1期間後、2期間後と時間についてとびとびの値をとる。このような確率過程を離散過程 (discrete process) という。これに対して、前回のブラウン運動は時間連続的なので連続過程 (continuous process) と呼ばれている。状況から連続と理解できる場合は、改めてそう言及しない場合が多い。名高いIto (伊藤) の公式あるいはItoの補題は、この連続ブラウン運動に関するものである。

最近、藤田岳彦教授 (一橋大学大学院商学研究科) により、離散過程におけるItoの公式が整備された (藤田 [2002,2008])。ここではこの離散Ito公式を紹介する。詳しい議論は省略するが、極限を考えれば離散Ito公式から通常のItoの公式が導かれる。

まず一次元モデル (2-2) で表される離散過程を、各 $t = 1, 2, \dots$ について ξ_t と表す。各 ξ_t は、確率2分の1で1の値を取り、確率2分の1で-1の値をとる確率変数である。確率変数を定義していないが、このような関数のことを、業界用語を用いて述べたと考えていただきたい。この変動が次々に繰り返されることは、 $\xi_t (t = 1, 2, \dots)$ の和をとり

$$Z_t = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_t$$

という新しい確率変数を考えていることにほかならない。 Z_t のとり値が、ブラウン運動している粒子の t における位置なのである。次々に繰り返されるとは、数学では各々が独立と定義される。正確には Z_t のことを対称ランダムウォークという。

前回も出てきたItoの補題は、この対称ランダムウォークでは

$$(Z_t - Z_{t-1})^2 = 1 \quad (4-1)$$

という極めて単純な事実にほかならない。要するに $(\xi_t)^2 = 1$ である。これは、 ξ_t のとり得る値が 1 または -1 なので当然と言えば当然であろう。この場合のItoの補題はむしろ簡単なのである。

藤田教授による離散Ito公式は、その最も基本の場合に次の形で与えられる、任意の実数値関数 f に対して

$$\begin{aligned} & f(Z_{t+1}) - f(Z_t) \\ &= \frac{f(Z_t+1) - f(Z_t-1)}{2} (Z_{t+1} - Z_t) \\ & \quad + \frac{f(Z_t+1) - 2f(Z_t) + f(Z_t-1)}{2} \end{aligned} \quad (4-2)$$

この公式の意味は、左辺の変動過程を、右辺第1項の確率変動する項と第2項の確定項の和で表すということである。証明は容易である。実際、 $Z_{t+1} - Z_t$ が 1 となる場合と -1 となる場合のそれぞれについて確かめればよい。例えば $Z_{t+1} - Z_t =$

-1 のときは

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= f(Z_t, -1) - f(Z_t) \\ &= \frac{f(Z_t+1) - f(Z_t-1)}{2} (-1) \\ & \quad + \frac{f(Z_t+1) - 2f(Z_t) + f(Z_t-1)}{2} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

他の場合も同様に確かめられ、(4-2)式が示された。

さて、この離散過程の極限として連続な場合のItoの公式を導出しよう。離散Itoの補題(4-1)を、前回の標準ブラウン運動の式 $(\Delta x)^2 = \Delta t$ と比較すると、(4-1)式の両辺に Δt を掛けたと思えば

$$\Delta x = \sqrt{\Delta t} (Z_{(t+1)/\Delta t} - Z_{t/\Delta t})$$

となる。(4-2)式に対応する式において、 $(\Delta x)^2 = \Delta t \rightarrow 0$ の極限を考える。より詳しい計算は脚注に回すが、 $\sqrt{\Delta t} Z_{t/\Delta t} \rightarrow W_t$ (W_t は標準ブラウン運動を表す)、 $\Delta x \rightarrow dW_t$ 、 $\Delta t \rightarrow dt$ として

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt \quad (4-3)$$

を得る(注2)。これが通常のItoの公式である。

5. 終わりに

多くの教科書で取り上げられている二項モデル

(注2) (4-2)式に対応するのは

$$\begin{aligned} & f(\sqrt{\Delta t} Z_{(t+1)/\Delta t}) - f(\sqrt{\Delta t} Z_{t/\Delta t}) \\ &= \frac{f(\sqrt{\Delta t} (Z_{t/\Delta t} + 1)) - f(\sqrt{\Delta t} (Z_{t/\Delta t} - 1))}{2\sqrt{\Delta t}} \Delta x + \frac{f(\sqrt{\Delta t} (Z_{t/\Delta t} + 1)) - 2f(\sqrt{\Delta t} Z_{t/\Delta t}) + f(\sqrt{\Delta t} (Z_{t/\Delta t} - 1))}{2} \end{aligned}$$

右辺をテイラー展開すれば

$$\text{右辺} = f'(\sqrt{\Delta t} Z_{t/\Delta t}) \Delta x + \frac{1}{2} f''(\sqrt{\Delta t} Z_{t/\Delta t}) \Delta t + (\text{高次項})$$

よって、左辺 $= df(\sqrt{\Delta t} Z_{t/\Delta t})$ と書いて極限において(4-3)式を得る。数学として厳密な理論では、もちろん詳細に収束性を論じる必要がある。

■デリバティブ再入門■

を用いて、複製ポートフォリオ、無裁定の原理、リスク中立確率の考え方を復習した。さらには離散過程に対する離散Ito公式について紹介した。

ここでは最後に、無裁定の原理について再び考察を加えたい。無裁定の原理は、例えるならばユークリッド幾何学における平行線の公理のように、深い内容を含んでいることは理解するものの、踏み込んで考えれば混乱が起りかねない原則である。特に日常の経済活動の中で適用された場合に問題点が顕著になるよう思われる。その一つは、無裁定価格理論の帰結の一つである一物一価の法則については、成立していない状況を挙げるのがあまりに容易である。例えばペットボトル飲料であるが、たとえ同じ製品でも量販店、コンビニエンスストア、あるいは高級ホテルの売店等では、それぞれ価格が異なっても不思議とは感じない。サヤ取りを試みる行為も恐らく無理であろう。それは現実ならばそれぞれに別の価値が認められているので当然だ、それだから理論には完全な市場という仮定があるのではないかと反論されるかもしれない。しかしそれならば逆に、そもそも完全な市場は存在するのか、と自問したとき積極的な肯定を躊躇するのも当然だろう。無裁定価格は、むしろ消極的な意味での理論価格、あるいは参考価格程度に考えた方が無難かも知れない。実務では、何か金融商品の価格評価を行う必要がある場合でも、保守的な理論価格より、恐らくさらに保守的に評価しているはずである。

もう一つの問題点は、サヤ取りの行為が善悪の

価値判断とは無関係なことである。他の述べ方をすれば、基本的にサヤ取りは無責任な行為なのではなかろうか。金融工学あるいは数理ファイナンスが、純粋な数理科学の理論にとどまるならば、そこでの原理は善悪や責任無責任等の価値判断あるいは倫理判断からは超越しており、しかもそれで十分である。しかし現実の経済活動の中で考えた場合には、もちろん金融取引では何が善悪かはつきりしない面はあるものの、全く何の倫理観もなしに取引することは、それはそれで問題が大き過ぎるだろう。金融工学が無裁定理論を基礎として精緻な理論体系を構築するのはよい。しかしその一方で、現実の経済活動の際には、金融工学理論の外での何か別の行動規範が必要なのではなかろうか。純粋な数学の理論体系でも、その体系の美しさは立派な評価項目である。しかし、美しさの要請は、数学理論体系そのものとは別の規範なのだから。

【参考文献】

- 木島正明・田中敬一 [2007] 『資産の価格付けと測度変換』、朝倉書店。
藤田岳彦 [2002] 『ファイナンスの確率解析』、講談社。
—— [2008] 『ランダムウォークと確率解析』、日本評論社。
Björk, T. [2004] *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd edition, Oxford University Press.
Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein, [1979] “Option pricing: A simplified approach,” *Journal of Financial Economics* 7, pp.229-263.