ウェーブレット解析

うぇーぶれっとかいせき
wavelet analysis

時系列データのウェーブレット解析は，従来からの代表的な方法である時間解析とフーリエ解析（[スペクトル] 参照）の長所を同時に取り込んだ方法である．

まず，連続時間 $t \in R$ で定義される時系列を $\{X(t)\}$ として，標本関数ごとに 2 乗可積分，すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)\,dt < \infty$$

であると仮定する．そして，$\{X(t)\}$ のウェーブレット解析を行うために，次の条件を満たすウェーブレット関数 $\psi(t)$ を導入する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t)\,dt = 1.$$

このとき，$X(t)$ の連続ウェーブレット変換 (CWT: continuous wavelet transform) は，次のように定義される．

$$\begin{aligned} C_{a,b}^{\psi}(X) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\tilde{\psi}_{a,b}(t)dt. \end{aligned}$$

ここで，

$$\tilde{\psi}_{a,b}(t) = \psi((t-b)/a)/\sqrt{a}$$

である．a は，波長の拡大・縮小を制御するスケールパラメータであり，$1/a$ が周波数の意味合いをもっている．b はシフトパラメータであり，波長の拡大・縮小の基準時点を調整する時間的な役割をもっている．座標 $(b, 1/a)$ により作られる平面は信号平面とよばれる．ウェーブレット変換は，信号 (時系列) を信号平面上にプロットしたものである．工学的な観点からは，ウェーブレット変換は，X を $\tilde{\psi}_{a,b}$ によってフィルタリング演算したものと解釈できる．そして，フィルタリングの結果として，$\psi(t)$ が原点まわりで局在しているウェーブレットであれば，$X(t)$ の時点 b，周波数 $1/a$ における成分が抽出されるものと考えることができる．

ウェーブレット関数の最も単純な例としては，次に定義されるハール関数 $\psi_H(t)$ がある．

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t < 1/2) \\ -1 & (1/2 \le t < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

この場合のウェーブレット変換は，幅 $a/2$ の隣り合う 2 つの区間 $[b, b+a/2]$ と $[b+a/2, b+a]$ 上での $X(t)$ の平均 (の定数倍) の差を計算したものとなる．パラメータ b が時点に関係し，パラメータ a がスケールに関係することは明らかである．

$\{X(t)\}$ が離散確率過程の場合には，観測ベクトル $\boldsymbol{X} = (X(1), \cdots, X(T))'$，ただし，$T = 2^J$ (J は自然数) に対して，離散ウェーブレット変換 (discrete wavelet transform, DWT)

$$\boldsymbol{w} = \mathcal{W}\boldsymbol{X}$$

が定義される．行列 $\mathcal{W}$ は，連続な場合のウェーブレット関数に対応するものであり，フィルター演算の役割をする T 次の直交行列である．また，T 次元ウェーブレット係数 $\boldsymbol{w}$ の要素は，スケールごとに分解される．すなわち，最初の $T/2$ 個の要素からなるベクトル $\boldsymbol{w}_1$ は最高周波数に対応するレベル 1 のウェーブレット，次の $T/4$ 個の要素からなるベクトル $\boldsymbol{w}_2$ は次の高周波数に対応するレベル 2 のウェーブレット，以下，$T/2^j$ 個の要素からなるベクトル $\boldsymbol{w}_j$ はレベル j のウェーブレット，というように分解される．

DWT は，レベル 1 のウェーブレットから段階的にフィルタ演算を行うピラミッドアルゴリズムにより実行される．そのために，次の条件を満たす幅 m のウェーブレットフィルタ $\{h_l\}$ を考える．

$$\sum_{l=1}^{m} h_l = 0, \quad \sum_{l=1}^{m} h_l h_{l+2n} = \delta_{n,0}.$$

ここで，$\delta_{n,0}$ は，$n = 0$ のとき 1，それ以外は 0 となる関数である．最初の条件は，$\{h_l\}$ が振動的なフィルタであり，高周波数成分を検出するフィルタであることを意味している．あとの条件は，大きさを 1 とする規準化条件であると同時に，偶数個のシフトに対して直交するもので，この制約から，フィルタの幅 m は偶数となる．最も単純な例は，ハールのウェーブレットフィルタであり，それは，

$$m = 2, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

で定義される．

$T/2$ 個の要素からなるレベル 1 のウェーブレット $\boldsymbol{w}_1$ の t 番目の要素 $w_{1,t}$ は

$$w_{1,t} = \sum_{l=1}^{m} h_l X(2t - l + 1)_{(\mathrm{mod}\ T)}$$

により計算される．これは，データを重なり合わせないように 2 時点ずつ進ませる downsampling による計算である．次に，$T/4$ 個の要素

からなるレベル 2 のウェーブレット $\boldsymbol{w}_2$ の計算に移る．そのために，幅 m のフィルタ $\{g_l\}$ を

$$g_l = (-1)^l h_{m+1-l}, \quad (l = 1, \ldots, m)$$

により定義する．この関係から得られるフィルタを QMF (quadrature mirror filter) という．フィルタ $\{g_l\}$ は，スケーリングフィルタとよばれる．

以上の準備のもとに，$T/2$ 個の値

$$v_{1,t} = \sum_{l=1}^{m} g_l X(2t - l + 1)_{(\mathrm{mod}\ T)}$$

を計算する．これら $T/2$ 個を要素とするベクトル $\boldsymbol{v}_1$ をレベル 1 のスケーリング係数という．以下，$T/2^j$ 個の要素からなるレベル j のウェーブレット $\boldsymbol{w}_j$ とスケーリング係数 $\boldsymbol{v}_j$ の各要素 $w_{j,t}$ と $v_{j,t}$ は，次のように計算される．

$$w_{j,t} = \sum_{l=1}^{m} h_l\, v_{j-1,2t-l+1\ (\mathrm{mod}\ T/2^{j-1})}$$

$$v_{j,t} = \sum_{l=1}^{m} g_l\, v_{j-1,2t-l+1\ (\mathrm{mod}\ T/2^{j-1})}.$$

このような DWT の例としては，ドーベシーのウェーブレットフィルタが有名であり，フィルタに追加的な制約条件を課した上で，さまざまな幅のフィルタが求められている (Percival and Walden [2000])．なお，ウェーブレット変換は，ここで説明した DWT 以外にも，さまざまなものがあり，必ずしも直交変換とならないものも提案されている．

DWT の応用としては，(a) 確率密度，スペクトル密度の推定，(b) 回帰関数の推定，(c) 信号抽出，(d) 不連続点の検出，(e) 長期記憶モデルの推定などがある (Bruce and Gao [1996], Percival and Walden [2000], 謝・鈴木 [2002], 田中 (2005))．

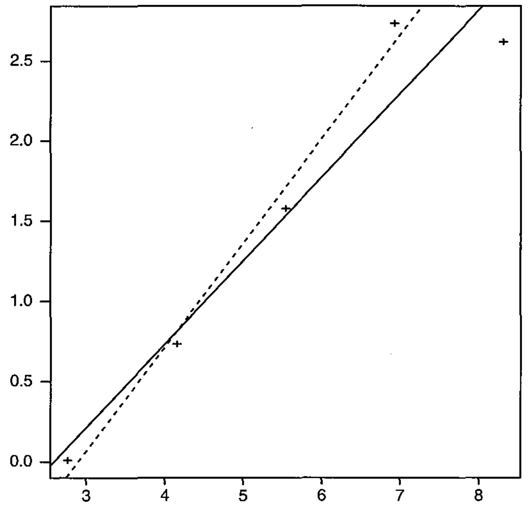
たとえば，長期記憶モデル ([ARIMA モデル] 参照)

$$(1 - L)^d X(t) = \varepsilon(t)$$

に対して，DWT に基づく差分パラメータ d の推定を考えよう．ここで，誤差項 $\{\varepsilon(t)\}$ は，平均 0，分散 σ^2 の独立系列である．$d \geq 1/2$ ならば $\{X(t)\}$ は非定常となるが，その場合でも，一般に，DWT はレベルごとにほぼ弱定常，独立となる．実際，レベル j の DWT は，平均 0，分散が，ほぼ 4^{jd} の定数倍となる．このことから，分散をレベルごとに推定することが可能となる．その推定量を $\hat{\sigma}_j^2$ とすれば，対数線形のウェーブレット回帰

$$\log \hat{\sigma}_j^2 = a + d \log 4^j + e_j$$

が得られ，パラメータ d を最小 2 乗法で推定することができる．図は，上の長期記憶モデル (d の真値 $= 0.6$) からの標本 (サイズは 512) に対してウェーブレット回帰を行った結果である．実線は 5 個のレベルに基づく回帰 (傾き $= 0.521$)，点線は 4 個のレベルに基づく回帰 (傾き $= 0.651$) である．レベルが上がるとともに自由度が少なくなるので，分散の推定精度が落ちていく．したがって，レベル数を多く使った回帰が必ずしも優れているとはいえない．実際，図の右端の点は精度に問題がある．



ウェーブレット分散は，レベルごとに異なるので，加重回帰や最尤推定の方が望ましい．最尤推定は，上述した DWT の性質を利用することにより，尤度関数の表現が単純となり，時間領域の場合よりもはるかに簡単に実行できるという利点がある (McCoy and Walden (1996))．

［田 中 勝 人］