

## 混合整数計画法のプロダクト・ミックス決定問題への適用

小林 啓 孝

### 目 次

- 一 問題の提起
- 二 固定費の分類と混合整数計画法
- 三 混合整数計画法のプロダクト・ミックス決定問題への適用
- 四 まとめ
- 一 問題の提起

企業の経営管理者は第二次大戦後に生じた経済上の諸変化から利益管理の重要性を認識した。直接原価計算が正規の損益計算書上で短期利益計画に役立つ原価・営業量・利益の関係 (cost-volume-profit relationship) についての情報を明示することから経営管理者の直接原価計算 (direct costing) に対する関心が一九五〇年代に急激に高まった。直接原価計算は短期利益計画用に正規の損益計算書上で原価・営業量・利益の関係についての分析 (CVP分析) が行なえるように工夫された原価計

算であり、原価を変動費と固定費とに分解し、売上高からまず変動費を差し引いて限界利益 (貢献利益) を計算し、限界利益から固定費を差し引いて営業利益を計算する損益計算の一方方法である。

伝統的CVP分析は短期利益計画設定に有用で簡便な手法であるが、これには多くの仮定ないし前提があり、したがってまた、そこに帰因する限界が存在する。伝統的CVP分析の主要な仮定を例示すれば次のとおりである。(1) 製品品種単位当り販売価格および変動費の値は確定的である。(2) 収益関数および原価関数は適当な操作圏 (the relevant range) において線型である。(3) 原価に影響を及ぼす操業度以外の要因は一定である。(4) 需要上および生産上の制約は明示的には考えない。(5) 生産量と販売量は等しい。

伝統的CVP分析の限界がこれら諸仮定に帰因するものである以上、伝統的CVP分析の短期利益計画設定に対する有用性を高めるためには、これらの諸仮定を弛めてモデルを現実に近いづける必要がある。実際、一九六〇年代になると、伝統的CVP分析をこのような方向に発展せしめようとする試みが現われてきたのである。そのような試みのなかで注目し得ると思われる動きの一つは直接原価計算と線型計画法 (Linear Programming; LP) とを結合しようとする試みである。

従来、プロダクト・ミックスの決定には直接原価計算が有用であるとされてきたが、直接原価計算方式によっては多数の需要上あるいは生産上の制約を考慮しながら最適プロダクト・ミ

ックスを決定することは困難である。直接原価計算方式による場合、考慮に入れることのできる稀少資源は一種類である。企業の生産局面には、生産物間や生産要素間に相互依存関係や相互排他関係が存在すると思われるが、直接原価計算方式によるプロダクト・ミックスの決定はこれらを考慮できず現実を単純化しすぎていると言えよう。したがって、短期利益計画設定に對する有用性を高めるために直接原価計算とL.P.を結合しようとする試みは当然の発展である。

ところで、最適プロダクト・ミックスの決定にあたり、注意はもっぱら限界利益と制約条件に向けられて、固定費については考慮されることが少なかった。これは固定費が製品の生産販売量の増減とともに変動しないためである。しかしながら他方には、このような態度、すなわち、最適プロダクト・ミックスの決定上、固定費をまったく無視しうる要素とする態度に對する疑問が存在した。しかし、固定費をも考慮した最適プロダクト・ミックス決定問題に對するシステムティックなアプローチの開発は管理会計上の課題として一九六〇年代を通じて残されたままだったのである。

(一) (一)の仮定を強めて伝統的CVP分析に確率を持ち込むことを試みた論文として R. K. Jaedicke and A. A. Robichek, "Cost-Volume-Profit Analysis Under Conditions of Uncertainty," *The Accounting Review* (October 1964), pp. 917—26, がある。(4)の仮定を強めて伝統的CVP分析に需要上および生産上の制約を持ち

込むことを試みた論文には R. K. Jaedicke, "Improving B-E Analysis by Linear Programming Technique," *N. A. A. Bulletin* (March 1961), pp. 5—12, がある。同じ流れに沿ってのものは、目標計画法 (Goal Programming) を展開表 (Spread Sheet) の結合を論じた論文 V. A. Charnes, W. W. Cooper, and Y. Ijiri, "Break-even Budgeting and Programming to Goals," *Journal of Accounting Research* (Spring 1963), pp. 16—43, がある。

(2) R. K. Jaedicke, op. cit.; A. Charnes et al., op. cit.; J. M. Samuel, "Opportunity Costing: An Application of Mathematical Programming," *Journal of Accounting Research* (Autumn 1965), pp. 182—91; J. S. Demski, "An Accounting System Structured on a Linear Programming Model," *The Accounting Review* (October 1967), pp. 701—12, がある。

(3) 岡本清「大成節夫「直接原価計算とリニア・プログラミング」4『企業会計』一九七一年二月号、一四三頁」W. Keller, and W. L. Ferrara, *Management Accounting for Profit Control*, McGraw-Hill, 1966, p. 673

## 二 固定費の分類と混整合数計画法

一九六〇年代の管理会計上の顕著な動向の一つとして、固定

費の分類が論じられたということがある。第二次大戦後、製品の多角化や分権管理が重視された結果、利益管理上、企業を構成するセグメント別(すなわち、事業部別、製品品種別、販売地域別など)の損益計算を行なうて、企業全体の利益に対する各セグメントの貢献を判定する必要が生じた。固定費の分類が論じられた直接の原因としては次の二つがあると思われる。一つは、伝統的な全部原価計算を支持する人々からの直接原価計算という名称は不適當で、変動原価計算(variable costing)という名称が適當であるという指摘を切掛にして、直接原価計算における直接の意味を考え直してみようという気運が生じたことである。その結果、固定費はあるセグメントに対する跡づけ可能性の有無から、セグメント別個別固定費と共通固定費とに分類可能なことが明らかにされたのである。その二は、直接原価計算が提唱された当初、直接原価計算は営業利益に対する固定費の圧迫を明示するという利点を有すとされておき、固定費は管理不能な原価であると考えられていたのであるが、この営業利益に対して圧迫を加えている固定費はどこから発生してきたか、本當に管理不能なのかという疑問が生じたことである。その結果、固定費をその発生源からキャパシティ・コスト(capacity cost)として促え、キャパシティ・コストがその性質とそれに応じた管理方法の違いからマネジド・コスト(managed cost)とコミティド・コスト(committed cost)に分類可能なことが明らかにされたのである。そして、短期利益計画のためには、セグメント別個別固定費をさらにマネジド・

コストとコミティド・コストに分類すべきこと、また、短期利益統制のためには、セグメント別個別固定費をさらにセグメントの長にとって管理可能か不能かという観点から管理可能固定費と管理不能固定費とに分類すべきことなどの考えに到ったのである。

一方、一九五〇年代初頭には数理計画法の分野において、固定費を発生させるような種々のアクティビティに関連した問題(たとえば、セット・アップ費に関連した問題)は未解決の重要な問題であった。<sup>(1)</sup> W. M. Hirsch と G. B. Dantzig はこの種の問題に対する一般的な解の性格を論じた論文を一九五四年に執筆した。一九五〇年代の終わりから整数計画法(Integer Linear Programming; ILP)や混合整数計画法(Mixed Integer Linear Programming; MILP)の解法が開発され始めた。そして、一九六〇年に Dantzig は固定費問題をどのようにして MILP の形に定式化するかを示したのである。一九六〇年代には ILP や MILP に対する新しい解法も開発され、たとえば、切除平面法(Cutting Plane Method)のほかにもブランチ・アンド・バウンド法(Branch and Bound Algorithm)や、バイナリ計画法(Binary (Zero-One) Programming)に対するバラスの加算法(Balas' Additive Algorithm)などが知られるに到ったのである。

このようにして、一九六〇年代を通じて、固定費をも考慮した最適プロダクト・ミックス決定問題に MILP を適用する準備が整った。すなわち、一方では、跡づけ可能性の有無や目的

に応じた固定費の分類という考えが受け入れられ、他方では、固定費問題のMILPへの定式化やMILPの解法が開発されたのである。したがって、残された問題はDantzigの示した方法が適用できるように固定費を分類することであり、また、果してそのように固定費を分類することが可能か、ということである。

(1) W. M. Hirsch, and G. B. Dantzig, "The Fixed Charge Problem," *The Naval Research Logistics Quarterly*, (September 1968), pp. 413—24. 参照頁は、p. 413

(2) この論文はThe Rand Corporationに載ったものであるが、後に(1)に示したように再録されている。

(3) G. B. Dantzig, "On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables," *Econometrica*, (January 1960), pp. 30—44. 参照頁は、p. 30. なお、この論文の内容はほとんどその著者G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963, pp. 535—50. に再録されている。

### 三 混合整数計画法のプロダクト・ミックス決定問題への適用

Dantzigの示した方法が最適プロダクト・ミックスの決定問題に適用可能なことを示したのはGrovesらである。<sup>(1)</sup> 彼らは、多数のアクティビティに従事する企業において、

固定費は時間と企業の従事する特定のアクティビティの両面から影響を受ける、という。そして、予算期間毎におおののアクティビティおよびアクティビティのグループ毎に個別に跡づけられる固定費の存在するのが通例である、とする。固定費は、たとえて言えば、ブロックの集合であって、その高さや量は企業の従事するアクティビティの組み合わせに依存して決定される、という。これらのアクティビティは、しばしばオーヴァーラップし、相互依存関係に立ち、また、相互に排他関係に立つこともある、とする。<sup>(2)</sup>

企業が、固定費差引後の利益にも関心を持つのは当然である。そして、第一節に述べたような理由からプロダクト・ミックスの決定に当り、固定費は無視されることが多かったのであるが、Grovesらの述べる如く、固定費の発生額がアクティビティの組み合わせに依存して決まるとしたら、プロダクト・ミックスの決定に当りても固定費を考慮に入れなければならないであろう。また、アクティビティ間に相互依存関係や排他関係がある場合には、それらを考慮に入れた意思決定を行なう必要がある。これらが、最適プロダクト・ミックス決定問題に固定費差引後の利益を目的関数とするようなMILPの適用を必要とする理由である。

ところで、Grovesらの言う固定費が限定された意味で使われていることに注意しなければならない。すなわち、彼らの言う固定費は、計画過程において、一ないし数種のアクティビティへ従事することをやめたとしたら、その発生を回避しうる

原価であり、営業量とともに変動しないが、一予算期間毎に契約されるような短期原価である。そして、当該原価を発生させるか否かの意思決定は各予算期間の当初に行なわれるのである。

なお、彼らは長期のコミティド・コストと思われる固定費の中に短期の固定費とすることが可能な原価があるととして、機械設備を購入するかわりにリースにする場合、建物を購入するかわりにオフィスにするスペースを賃借する場合などの例をあげている。

さて、多品種製品製造企業でこのような固定費が存在する場合、この問題は次のように定式化される。

まず、2変数の場合を示そう。ただし、企業活動上の制約は明示的には考えないものとしてよう。

$$\text{Max } Z = ax - FC, \delta$$

Subject to

$$0 \leq x \leq U_0$$

$$0 \leq \delta \leq 1$$

$$\delta = 0, 1$$

ここで、 $o$  は製品品種一単位当りの限界利益、 $x$  は製品品種、 $FC$  は一予算期間当りの固定費、 $\delta$  は0、1変数、 $U$  は $x$ の値のある上限 (upper bound) を示す。仮に、 $o = 0$  となつたとすると、制約条件の第一式より、 $x = 0$  となり、目的関数の値は0となるのである。また、 $\delta = 1$  の場合は同様にして、 $x$  は $U$ までの範囲で正の値をとり、それに応じて、 $Z$ の値

も変化するのである。(a)

$n$ 変数の場合は次のようになる。(c)

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^m c_j^A x_j^A - \sum_{j=m+1}^n c_j^F x_j^F \quad j = (1, \dots, m, (m+1), \dots, n)$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^m a_{kj} x_j^A \leq b_k$$

$$x_j^A \geq 0$$

$$z = (1, \dots, p)$$

$$U_k x_k^F \leq 0, j \text{ or } k = (m+1, \dots, n) \\ x_k^F = 0, 1$$

ここで、 $c_j^A$  は製品品種またはアクティヴィティ一単位当りの限界利益、 $x_j^A$  は製品品種またはアクティヴィティ、 $c_j^F$  はあるアクティヴィティまたはアクティヴィティのグループに属づけられる固定費(ただし、限定された意味での固定費)、 $x_k^F$  は0、1変数をあらわすものとする。また、 $a_{kj}$  は0または1の値をとるものとする。 $U_k$  は $\sum_{j=1}^m a_{kj} x_j^A$  の上限である。

破線で囲んだ部分は普通のLPの問題であって、限界利益総額最大化問題となっている。それに変数 $x_j^F$ 、および $a_{kj}$ が0、1をとるような制約を課すことによって固定費差引後の利益を最大化するような変数の組の値を求めるMILPの問題になっているのである。

(1) R. Groves, R. Manes, and R. Sorensen, "The Application of the Hirsch-Dantzig 'Fixed Charge' "

Algorithm to Profit Planning: A Formal Statement of Product Profitability Analysis," *The Accounting Review*, (July 1970), pp. 481—89

(2) R. Groves et al. op. cit. p. 482

(3) R. Groves et al. op. cit. pp. 484—85. 彼等は Horn-gren の "committed", "discretionary" という固定費の分類は彼等の目的にとって有用でないと述べている。それによつて彼等の言う固定費は現金支出「キヤンシタツ」コストまたは Shillingraw の言う "caretaker and enabling cost" の範疇に入ると述べている。なお "discretionary cost" は第二節で述べたマネジド・コストに相当する。また Shillingraw はその著書の第三版 (G. Shillingraw, *Cost Accounting: Analysis and Control*, 3rd ed., Richard D. Irwin, 1972, p. 40) では caretaker cost を ロケータリ・コストと変更してゐる。enabling cost は 準固定費 (飛躍費) に相当する。

(4) R. Groves et al. op. cit. p. 485

(5) Groves 等はこれを 1 変数の場合と言っている。これは  $\delta$  を変数として考えなかつたためと思われるが、 $\delta$  は 0, 1 変数であること、ならびに後に示す  $n$  変数の場合には彼らが 0, 1 変数をも数えあげて  $n$  変数としてゐるところから、この場合も 2 変数とした方が妥当と思われる。したがつて、本文では 2 変数の場合としておいた。また、彼らは目的関数を  $Z = c_1x_1 + FC \cdot \delta$  として、 $FC$  は負の値を

ととつてゐるが、この扱ひも後に示す  $n$  変数の場合と一貫していない。 $FC$  が正の値をとるとした方が式のうえから管理会計担当者に分り易いと思われるので本文のように扱つて置いた。R. Groves et al. op. cit. p. 483 参照。なお Dantzig の定式化においては、目的関数は原価関数 
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \delta b \quad (\delta = 0, 1)$$
 となつてゐる。G. B. Dantzig, op. cit. p. 39

(6) R. Groves et al. op. cit. p. 483 では  $\delta = 1$  の場合、 $z$  は  $\delta$  のいかなる正の値をとれ、 $Z > 0$  となる、としてゐるが、 $Z > 0$  となることは必ずしも保証されていないと思ふ。

(7) ここでは R. Groves et al. op. cit. p. 483 に従つたが、0, 1 変数の下つきの使い方が一貫していないと思ふ。

#### 四 まとめ

生産面や市場面、その他の方面で各種の制約に直面しながら生産販売活動を行なつてゐるのが企業の現実の姿であろう。この時、より合理的な意思決定を行なうためには、意思決定を行なうにあたり、それらの中の重要な制約を考慮に入れることが必要であろう。こうして、プロダクト・ミックス決定問題にあつては、定式化のし易さや扱い易さという点から LP を採用して直接原価計算と結合することが短期利益計画の設定上、有用であるという考えが受け入れられていたのである。しかしながら、他方ではプロダクト・ミックス決定問題を解くにあた

り、固定費を無視しうる要素とすることに對する疑問があったのであった。

Grovesらは、固定費の中にはアクティヴィティに跡づけられ、かつ企業がそのアクティヴィティに従事することをやめたとしたらその発生を回避しうる固定費があるとして、このような固定費を識別することによってMILPをプロダクト・ミックス決定問題に適用することが可能であることを示したのである。

企業が固定費差引後の利益の増大に関心を持つのは当然である。そして、第三節で示したようにプロダクト・ミックス決定

問題をLPの形に定式化するとMILPの形に定式化することではランの結果が異なることが多いであろうことは容易に想像がつく。どちらが企業にとって望ましいかと言えば、固定費差引後の利益の多い結果を示すMILPの適用の方が望ましいであろう。だとするならば、MILPの適用を可能にするような固定費の分類が必要となってくるであろう。こうして、MILPをプロダクト・ミックス決定問題に適用することは管理会計担当者の注意を固定費に向け、固定費の分類に新たな視点を持ち込むと思われるのである。

(一橋大学大学院博士課程)