経済研究
Vol. 47, No. 1, Jan. 1996

離散時間マルチンゲール無裁定オプション価格理論

刈 屋 武 昭

1 離散時間マルチンゲール・アプローチ

本稿では，マルチンゲール・アプローチに基づいて離散時間の場合におけるオプション価格理論を展開する．この論文の主たる貢献は，連続時間の場合について高度な数学的理論を展開しているオプション理論の基本構造を明らかにし，離散時間の場合の理論の整理と基礎を与えることにある．これまでは，状態空間が離散の場合について離散時間価格理論を展開している文献はあるが，状態空間が連続な場合での離散時間価格理論は少ない．なお，オプション価格理論の文献としては，Duffie(1992)，木島(1994)が詳しい．マルチンゲール・アプローチによるやさしい解説としては刈屋(1995)をみよ．

オプション・プライシング・アプローチとしては

1) 局所的無裁定アプローチ(偏微分方程式アプローチ)
2) 大域的無裁定アプローチ(マルチンゲール・アプローチ)

に分類できよう．前者では，与えられた資産に対して微小区間について無裁定性を要求し，そこから偏微分方程式を導出する．その偏微分方程式をオプションペイオフによる境界条件のもとで解くことでオプション価格を与える．このアプローチでは，確率微分方程式に基づく伊藤解析が数学的基礎として必須となる．他方，後者のアプローチでは，以下でみるようにオプション・プライシングの基礎としては，微小時間による議論は必要ではなく，無裁定性の概念と自己金融取引ルールのみを基礎とする．もちろん連続時間の価格理論を展開するためには，確率積分の概念を必要とし，数学的には伊藤解析による確率微分方程式の利用を要求される．この要求は，実はモデルの範囲を限定し，応用上の制約を与えることになる．この点は後に再述する．しかし，離散時間の場合，この数学的要求から解放され，モデルの範囲が拡大し，応用上幅広い適用可能性が確保される．

定義(マルチンゲール) ある確率変数列(プロセス)$\{Z_n\}$がマルチンゲールであるとは

$$E_m[Z_n] = Z_m \quad (\text{確率}\,1) \quad (n>m)$$

が成立する場合をいう．この定義は次式と同等である．

$$E_{n-1}(Z_n) = Z_{n-1} \quad (\text{確率}\,1) \quad (\text{すべての}\,n)$$

2 無裁定性理論の基礎

いま簡単化のために3つの金融資産 X_0, X_1, X_2 があるとし，その t 時点価格を

$$(2.1) \quad \boldsymbol{X}(t) = (X_0(t), X_1(t), X_2(t))' \qquad 0 \leqq t \leqq T$$

で表現する．T は派生証券プライシングの場合，派生証券の満期期間に対応する．(2.1)は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ で定義された確率プロセス $\{\boldsymbol{X}(t) : 0 \leqq t \leqq T\}$ である．$\{\boldsymbol{X}(s) : s \leqq t\}$ が生成するシグマ加法族を $\mathcal{F}_t$ とすると，$\boldsymbol{X}(t)$ は $\mathcal{F}_t$ 適合的となる．離散時間アプローチでは，$[0, T]$ 区間を時間幅 h で N 等分し，

$$(2.2) \quad X_{in} = X_i(nh) \quad n = 0, 1, \cdots, N \qquad (Nh = T)$$

と表現する．従って(2.1)は離散時間確率プロ

セス

(2.3) $\boldsymbol{X}_n = (X_{0n}, X_{1n}, X_{2n})'$
$(n = 0, 1, \cdots, N)$

を与える．(2.1)と(2.3)の違いは，(2.1)では非可算個の確率変数を対象とするため $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 Q によってその確率法則を表現せざるをえないが，(2.3)では $3(N+1)$ 個の確率変数

$$\mathcal{X}_N = \{\boldsymbol{X}_0, \cdots, \boldsymbol{X}_N\}$$

を対象とするため，直接的に $\mathcal{X}_N$ の確率分布を考えることができる．本節では，この確率分布について特定化しない．

無裁定価格理論を展開するため各 n 時点で構築するポートフォリオ

(2.4) $\boldsymbol{a}_n = (a_{0n}, a_{1n}, a_{2n})'$

で表す．a_{0n}, a_{1n}, a_{2n} は資産 X_0, X_1, X_2 の n 時点での組入枚数を示す．従って n 時点ポートフォリオ $\boldsymbol{a}_n$ の価値は

(2.5) $V_n(\boldsymbol{a}_n) = a_{0n}X_{0n} + a_{1n}X_{1n} + a_{2n}X_{2n}$
$= \boldsymbol{a}_n'\boldsymbol{X}_n$

となる．各時点で構築するポートフォリオの列 $\{\boldsymbol{a}_n\} \equiv \{\boldsymbol{a}_n : n=0, 1, \cdots, N\}$ (ただし最終時点ではポートフォリオを構築する必要がないので $\boldsymbol{a}_N \equiv \boldsymbol{a}_{N-1}$)を取引ルール(リバランス・ルール)という．$n$ 時点で再構築するポートフォリオ $\boldsymbol{a}_n$ は n 時点までに観測できる価格

(2.6) $\mathcal{X}_n = \{\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n\}$

のみに依存し，将来の $\boldsymbol{X}$ に依存しない．次の自己金融的ルールの概念は無裁定価格理論の基本である．

定義(自己金融取引ルール)

取引ルール $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が自己金融取引ルール(self-financing trading rule)であるとは

(2.7) $V_n(\boldsymbol{a}_{n-1}) = V_n(\boldsymbol{a}_n)$ すなわち
$\boldsymbol{a}_{n-1}'\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{a}_n'\boldsymbol{X}_n$

が成立する場合をいう．

$n-1$ 時点で構築されたポートフォリオの価値 $V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})$ は，n 時点で価格変化 ($\boldsymbol{X}_{n-1} \to \boldsymbol{X}_n$) のために $V_n(\boldsymbol{a}_{n-1})$ に変化する．n 時点で $n-1$ 時点のポートフォリオ $\boldsymbol{a}_{n-1}$ を $\boldsymbol{a}_n$ に変更(再構築)すると，再構築後の n 時点ポートフォリオの価値は $V_n(\boldsymbol{a}_n)$ となるが，n 時点で再構築前のポートフォリオの価値と再構築後のポートの価値が等しいことを要求するのが自己金融取引ルールである．

$$V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})$$
$$= \sum_{i=0}^{2} a_{in-1}X_{in-1} \to V_n(\boldsymbol{a}_{n-1}) = \sum_{i=0}^{2} a_{in-1}X_{in}$$
$$V_n(\boldsymbol{a}_n) = \sum_{i=0}^{2} a_{in}X_{in} \to$$

定義 (無裁定性)

資産 X_0, X_1, X_2 が時点 m で裁定機会を許すとは，適当な自己金融取引ルール $\{\boldsymbol{a}_n\}$ をとると

(2.8)

$V_m(\boldsymbol{a}_m) \leqq 0,\quad V_N(\boldsymbol{a}_N) > 0$ (確率 1) または

$V_m(\boldsymbol{a}_m) < 0,\quad V_N(\boldsymbol{a}_N) \geqq 0$ (確率 1)

が成立する場合いう．どのような自己金融取引ルールをとっても(2.8)が成立しないとき3資産は m 時点で互いに無裁定関係にあるという．各時点で互いに無裁定であるとき，単に3資産は無裁定であるという．

(2.8)は，上式は $V_m(\boldsymbol{a}_m) \leqq 0$ と $V_N(\boldsymbol{a}_N) > 0$ が同時に起る確率が1であることを意味する．すなわち

$$Q(V_m(\boldsymbol{a}_m) \leqq 0, V_N(\boldsymbol{a}_N) > 0) = 1$$

与えられた複数個の資産が無裁定関係であるとは，どのような自己金融取引ルールをとっても $0, 1, \cdots, N$ 時点のどの時点に対しても確率1で非負(または正)の所得を生み，最終時点 N で正(または非負)の所得を生むポートフォリオを作ることができないことである．(2.8)でポートフォリオの価値が負であることは，いくつかの資産の組入枚数が負であること，すなわち

空売り(ショート)があることを意味し，その結果正の収入があることを意味する．従って適当な自己金融取引ルールをとると(2.8)が成立するということは，最初に空売りによって非負(または正)の収入があり，自己金融であるため途中の金銭の出し入れなく毎期ポートフォリオを再構築することで(いわばそのルールによって放っておけば)，最終時点までに空売り(ショート)を解消して正の(ロング)ポジションにし，正(または非負)の収入を与えることになる．なお，期間 $\{0, 1, \cdots, N\}$ 上で与えられた資産が無裁定関係にある場合，その部分期間 $\{m, m+1, \cdots, N\}$ 上でも無裁定関係にある．実際，期間 $\{m, m+1, \cdots, N\}$ 上の自己金融取引ルールに基づくポートフォリオは，$\boldsymbol{a}_0=\cdots=\boldsymbol{a}_{m-1}=\boldsymbol{0}$ をもつ期間 $\{0, 1, \cdots, N\}$ 上の自己金融取引ルールに基づくポートフォリオとみなせる．

3　無裁定性の条件

資産 X_0, X_1, X_2 が $n=0, 1, \cdots, N$ の時点で互いに無裁定であるための条件を求める．この条件は，(2.8)を否定する条件である．自己金融取引ルールの定義から $V_n(\boldsymbol{a}_{n-1})=V_n(\boldsymbol{a}_n)$ を用いて最終時点のポートフォリオの価値を任意の $m<N$ に対して

$$(3.1)\quad \begin{aligned} V_N(\boldsymbol{a}_N) &= V_m(\boldsymbol{a}_m)+\sum_{n=m+1}^{N}[V_n(\boldsymbol{a}_{n-1}) - V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})] \\ &= V_m(\boldsymbol{a}_m) + \sum_{n=m+1}^{N}\left[\sum_{i=0}^{2}a_{in-1}(X_{in}-X_{in-1})\right] \end{aligned}$$

と表現する．特に $m=0$ の場合

$$(3.2)\quad \begin{aligned} V_N(\boldsymbol{a}_N) &= V_0(\boldsymbol{a}_0)+\sum_{n=1}^{N}[V_n(\boldsymbol{a}_{n-1}) - V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})] \\ &= V_0(\boldsymbol{a}_0) + \sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{i=0}^{2}a_{in-1}(X_{in}-X_{in-1})\right] \end{aligned}$$

[ ]の中は，$n-1$ 時点から n 時点までの価格変化による価値の変化を示しゲインとよぶ．(2.8)を排除する条件(＝無裁定条件)を考えよう．いま，実際の $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_N$ を生成する確率分布 Q でなくてもそれと同等な適当な確率分布 Q^* をとると $\mathscr{X}_0=\{\boldsymbol{X}_0\}$ を与えたときの Q^* のもとでの $V_N(\boldsymbol{a}_N)$ の条件付期待値が

$$(3.3)\quad E_0{}^*[V_N(\boldsymbol{a}_N)] = V_0(\boldsymbol{a}_0)$$

を満たしたとする．このとき $V_N(\boldsymbol{a}_N)>0$(または $V_N(\boldsymbol{a}_N)\geqq 0$)ならば $V_0(\boldsymbol{a}_0)>0$(または $V_0(\boldsymbol{a}_0)\geqq 0$)となり，(2.8)の $m=0$ の場合が否定される．同様に $\mathscr{X}_m=\{\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_m\}$ を与えたときの Q^* のもとでの $V_N(\boldsymbol{a}_N)$ の条件付期待値が

$$(3.4)\quad E_m{}^*[V_N(\boldsymbol{a}_N)] = V_m(\boldsymbol{a}_m)$$

を満たしたとすると，(2.8)が否定される．(3.4)が $m=0, 1, \cdots, N-1$ に対して成立する場合

$$(3.5)\quad E_m{}^*[V_n(\boldsymbol{a}_n)] = V_m(\boldsymbol{a}_m) \quad (n>m)$$

を満たし，$V_n(\boldsymbol{a}_n)$ は Q^* のもとでマルチンゲールとなる．なお，2つの確率測度 Q と Q^* が同等であるとは，$Q(A)>0$ なる集合 $A\in\mathscr{F}$ に対して $Q^*(A)>0$ が成立し，逆も成立する場合をいう．

(3.5)で $m=n-1$ をとると

$$(3.6)\quad E_{n-1}{}^*[V_n(\boldsymbol{a}_n)] = V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} V_n(\boldsymbol{a}_n) &= V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})+[V_n(\boldsymbol{a}_{n-1}) - V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})] \\ &= V_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1})+\sum_{i=0}^{2}a_{in-1}(X_{in}-X_{in-1}) \end{aligned}$$

であり，a_{in-1} は $\mathscr{X}_{n-1}=\{\boldsymbol{X}_0, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-1}\}$ のみに依存するから，(3.6)は

$$(3.7)\quad \sum_{i=1}^{2}a_{in-1}[E_{n-1}{}^*(X_{in})-X_{in-1}] = 0$$

と同等である．各 n について(3.6)が成立する場合(3.4)は各 m について成立する．あきらかにもし各 i について

$$(3.8)\quad E_{n-1}{}^*(X_{in}) = X_{in-1}$$

(各 X_{in} は Q^* に関してマルチンゲール)

が成立する場合，(3.7)は成立する．

命題　各資産価格 $X_{in}(n=0,1,\cdots,N)$ が確率測度 Q と同等な適当な確率測度 Q^* のもとでマルチンゲールとなる場合，当該資産は互いに無裁定となる．すなわち $\boldsymbol{X}_n$ の Q^* のもとでのマルチンゲール性が無裁定性の十分条件である．

この命題は，与えられた価格プロセスをマルチンゲールにする確率測度 Q^* の存在問題と関係する．我々は，これまでのところ $\boldsymbol{X}_n$ のプロセスについて何も特定化していないので，それを仮定すれば十分である．

後に無裁定の必要条件についてふれる．

4　基準化

一般に価格そのものは必ずしもマルチンゲールとはならない．例えば，連続複利率 r 一定の預金の価値プロセスは $L(t)=\exp(rt)$ で与えられる．その離散時間表現

$$L_n=\exp(rnh) \qquad (r\text{ 一定})$$

は非確率的であるから，どのような確率測度をとっても $E_{n-1}(L_n)=L_n$ である．この預金の価値プロセス $L(t)$ の逆数 $L(t)^{-1}$ は，ブラック＝ショールズの公式で割引債の価格として利用されている．このような場合上の命題を直接的に適用できない．そこで上の無裁定性の定義は $X_{0m}>0$ である限り

(4.1)

$$\begin{cases} V_m(\boldsymbol{a}_m)/X_{0m}\leqq 0,\ V_N(\boldsymbol{a}_N)/X_{0N}>0 & (\text{確率 }1)\\ \text{または} & \\ V_m(\boldsymbol{a}_m)/X_{0m}<0,\ V_N(\boldsymbol{a}_N)/X_{0N}\geqq 0 & (\text{確率 }1)\end{cases}$$

が $m=0,1,\cdots,N$ に対して成立しないことと同等であることに注意する．すなわち，基準化ポートの価値

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\boldsymbol{a}_n) &= V_n(\boldsymbol{a}_n)/X_{0N}\\ &= a_{0n}\tilde{X}_{0n}+a_{1n}\tilde{X}_{1n}+a_{2n}\tilde{X}_{2n}\\ &\qquad \tilde{X}_{in}=X_{in}/X_{0n}\quad (i=1,2),\ \tilde{X}_{0n}\equiv 1\end{aligned}$$

を考える．この場合 $\tilde{X}_{0n}\equiv 1$ はマルチンゲールであるから，3節と同じ議論によって次の命題をえる．

命題　基準化価格 $\tilde{X}_{1n},\tilde{X}_{2n}(n=0,1,\cdots,N)$ が Q と同等な適当な確率測度 Q^* のもとでマルチンゲールならば，3資産 X_0,X_1,X_2 は互いに無裁定である．

この命題を用いると，ブラック＝ショールズ株式オプション価格式等多くの派生証券無裁定理論価格を与えることができる．このことを次の2つの形に要約しておく．

I　ヨーロピアン・オプション理論価格

最終時点でそのペイオフが定義されるヨーロピアン・オプションの場合

$\{X_{0n}\}$：基準化価格プロセス

$\{X_{1n}\}$：オプションの対象となる基礎証券価格プロセス

$\{X_{2n}\}$：プライシング対象のヨーロピアン派生証券価格プロセス

とおく．ここで確率プロセス $\{X_{0n}\},\{X_{1n}\}$ は確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},Q)$ で定義されているとし，n 時点での求める派生証券価格 X_{2n} は

$$\hat{\mathscr{X}}_n=\{\hat{\boldsymbol{X}}_0,\cdots,\hat{\boldsymbol{X}}_n\},$$

$$\text{ただし，}\quad \hat{\boldsymbol{X}}_k=(X_{0k},X_{1k})'$$

にのみに依存する．最終時点でのヨーロピアン・オプションのペイオフの構造は，$\hat{\mathscr{X}}_N$ の既知関数として

$$X_{2N}=g(\hat{\mathscr{X}}_N)$$

で与えられているものとする．このとき上の命題から，3資産 X_0,X_1,X_2 が無裁定となるための条件は，Q と同等な適当な確率測度 Q^* のもとで相対価格プロセス $\{\tilde{X}_{1n}\},\{\tilde{X}_{2n}\}$ がマルチンゲールとなることである．

(1)　$\{\tilde{X}_{1n}\}$ がマルチンゲール：

$$(4.2)\quad X_{1n}/X_{0n}=E_n{}^*[X_{1n+1}/X_{0n+1}]$$

(2)　$\{X_{2n}\}$ がマルチンゲール：

$$X_{2n}/X_{0n}=E_n{}^*[X_{2N}/X_{0N}]\quad \text{すなわち}$$

$$(4.3)\quad X_{2n}=X_{0n}E_n{}^*[g(\hat{\mathscr{X}}_N)/X_{0N}].$$

(4.2)は確率プロセス $\{X_{0n}\},\{X_{1n}\}$ に課せられる条件であり，(4.3)はその条件のもとで決まる

n 時点オプション理論価格を与える式である．(4.3)で X_{2n} を定義する限り，$\tilde{X}_{2n}=X_{2n}/X_{0n}$ は常にマルチンゲールとなるので，X_0, X_1, X_2 は互いに無裁定となる．

II 3資産の相互無裁定性

割引債等複数個の資産の相互の無裁定性を議論する場合，$\{X_{0n}\}, \{X_{1n}\}, \{X_{2n}\}$ の確率プロセスを最初に与えて，その与えたプロセスに対してモデル内部のマルチンゲール性の条件を導出する．このような例が Heath, Jarrow and Morton(1992)の例である．この場合，3つの確率プロセスを全く任意に与えると，相対価格をマルチンゲールにする Q と同等な確率測度 Q^* は一般に存在しない．従ってモデルの定式化が重要となる．次節では，その代表的なモデルとして積プロセスを考える．

5 積プロセスのマルチンゲール性

本節では，3資産の価格プロセスが次の積プロセスで与えられる場合に相対価格をマルチンゲールにする Q と同等な適当な確率測度 Q^* の存在条件を求める．3ファクタ積プロセスモデルは，$i=0,1,2$ に対して

(5.1)
$$X_{in} = X_{i0}\prod_{m=1}^{n}\exp\left[\alpha_{im-1}h + \sum_{k=0}^{2}\beta_{ikm-1}\sqrt{h}\,\varepsilon_{km}\right] = X_{i0}\exp\left[\sum_{m=1}^{n}\alpha_{im-1}h + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{2}\beta_{ikm-1}\sqrt{h}\,\varepsilon_{km}\right]$$

で与えられる．ここで，

(1) ε_{kn} は各 k に対して iid(互いに独立に同じ正規分布)$N(0,1)\,(n=1,\cdots,N)$ に従う$(k=0,1,2)$，

(2) $\{\varepsilon_{0n}\}, \{\varepsilon_{1n}\}, \{\varepsilon_{2n}\}$ のプロセスは互いに独立である，

(3) $\alpha_{im-1}, \beta_{ikm-1}$ は $\mathcal{X}_{m-1}$ に依存してよい，

(4) X_{i0} は所与である．

このモデルは伊藤プロセスとよばれる連続モデル

(5.2)
$$X_i(t) = X_i(0)\exp\left[\int_0^t \alpha_i(u)\,du + \sum_{k=0}^{2}\int_0^t \beta_{ik}(u)\,dW_k(u)\right]$$

の離散表現に対応する．ここで $\{W_k(t)\}(k=0,1,2)$ は互いに独立な標準ブラウン運動(ウィナープロセス)である．$\alpha_i(u)$ はドリフト関数，$\beta_{ik}(u)$ はディフュージョン関数である．$\boldsymbol{X}_0$ が所与であるとき，$\mathcal{X}_{n-1}=(\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-1})$ と $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}\}$ は1対1対応をするので $\mathcal{X}_{n-1}$ を与えることと，ε_{n-1} を与えることは同等である．(5.1)の確率法則は，確率変数が有限個であるので，確率密度関数

(5.3)
$$dQ = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(0))\,\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(1))\,\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(2))\,d\boldsymbol{\varepsilon}(0)\,d\boldsymbol{\varepsilon}(1)\,d\boldsymbol{\varepsilon}(2)$$

ただし，

$$\phi(\boldsymbol{z}) = (2\pi)^{-N/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\right) \quad (\boldsymbol{z}\in R^N)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = (\varepsilon_{k1}, \cdots, \varepsilon_{kN})' \qquad (k=0,1,2)$$

で与えることができる．(5.1)のプロセスのもとでは，相対価格 $\tilde{X}_{in}=X_{in}/X_{0n}$ のプロセスは，$i=1,2$ に対して

(5.4)
$$\tilde{X}_{in} = \tilde{X}_{i0}\exp\left[\sum_{m=1}^{n}\eta_{im-1}h + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{2}\delta_{ikm-1}\sqrt{h}\,\varepsilon_{km}\right] = \tilde{X}_{in-1}\exp\left[\eta_{in-1}h + \sum_{k=0}^{2}\delta_{ikn-1}\sqrt{h}\,\varepsilon_{kn}\right] \quad (i=1,2)$$

ただし，

$$\eta_{im-1} = \alpha_{im-1} - \alpha_{0m-1},$$
$$\delta_{ikm-1} = \beta_{ikm-1} - \beta_{0km-1},$$

で与えられる．この相対価格プロセスをマルチンゲールにする Q と同等な確率測度 Q^* の導出法を与えよう．この導出法は，連続時間の確率プロセス(5.2)の場合のいわゆるギルサノフ定理に対応するものであるが，有限個の確率変数を対象とする離散時間のプロセスでは，きわめて直接的である．Q^* として

(5.5)
$$dQ^* = \exp\left[\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{2}\xi_{km-1}\sqrt{h}\,\varepsilon_{km}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{2}\xi_{km-1}{}^{2}h\Big]dQ$$

と定義する．ここで ξ_{km-1} は一般に $\mathcal{X}_{m-1}$ に依存し，Q^* のもとで $\{\tilde{X}_{1n}\}, \{\tilde{X}_{2n}\}$ がマルチンゲールになるように後に選択する．Q^* は特定な n に依存していない．(5.5)の Q^* は Q^* のもとで ε_{kn} の条件付分布が

(a)　各 k に対して $\mathcal{X}_{n-1}$ を与えたとき ε_{kn} は $N(\xi_{kn-1}\sqrt{h}, 1)$ に従う，従って Q^* は確率分布である

(b)　$\varepsilon_{0n}, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}$ は，$\mathcal{X}_{n-1}$ を与えたとき互いに独立である

を満たすように選択されている．従って n 時点のノイズ

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(\varepsilon_{0n}, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n})'$$

の条件付密度関数を

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_n\,|\,\mathcal{X}_{n-1})\qquad n=1, \cdots, N$$

で表現すると，Q^* の同時密度関数は

$$dQ^*=\prod_{n=1}^{N}[f(\boldsymbol{\varepsilon}_n\,|\,\mathcal{X}_{n-1})\,d\boldsymbol{\varepsilon}_n]$$

で与えられる．$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_N$ の同時分布は一般に正規分布でないことに注意せよ．この Q^* のもとでは，$\tilde{\mathcal{X}}_{n-1}$ を与えたときの $\tilde{X}_{in}$ の条件付期待値は，(5.4)より

(5.6)　$E_{n-1}{}^*(\tilde{X}_{in})=$

$$\tilde{X}_{in-1}E_{n-1}{}^*\Big\{\exp\Big[\eta_{in-1}h+\sum_{k=0}^{2}\delta_{ikn-1}\sqrt{h}\,\varepsilon_{kn}\Big]\Big\}\qquad(i=1,2)$$

となる．この式から明らかなように $\{\tilde{X}_{in}\}$ がマルチンゲールとなる条件は，右辺の期待値の部分が1であることである．この条件は上の(a)(b)から

(5.7)
$$\exp\Big[\eta_{in-1}h+\sum_{k=0}^{2}\delta_{ikn-1}\xi_{kn-1}h+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2}\delta_{ikn-1}h\Big]=1$$

となる．従って

(5.8)
$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(\eta_{1n-1}, \eta_{2n-1})',$$
$$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(\xi_{1n-1}, \xi_{2n-1})'$$
$$\boldsymbol{\Delta}_{n-1}=(\delta_{ikn-1}):2\times 2\quad(i, k=1, 2)$$
$$\boldsymbol{\gamma}_{n-1}=\Big(\delta_{10n-1}\xi_{0n-1}+\frac{1}{2}\delta_{10n-1}{}^2,\ \delta_{20n-1}\xi_{0n-1}+\frac{1}{2}\delta_{20n-1}{}^2\Big)'$$

とおく．

定理　(5.5)の Q^* のもとで $\{\tilde{X}_{in}\}(i=1,2)$ がマルチンゲールとなる条件は，$\boldsymbol{\xi}_{n-1}$ が

(5.9)
$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}+\boldsymbol{\gamma}_{n-1}+\boldsymbol{\Delta}_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}=0\qquad(n=1, \cdots, N)$$

を満たすことである．

すなわち，与えられた各変数のドリフト α_{in-1} とディフュージョン $\beta_{ikn-1}(i, k=1, 2; n=1, \cdots, N)$ に対して，(5.9)の $\{\xi_{kn-1}\}$ の解の存在がマルチンゲール条件となる．Δ_{n-1} が正則ならば，任意に与えた $\xi_{0n-1}(n=1, \cdots, N)$ に対して

(5.10)
$$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=-\boldsymbol{\Delta}_{n-1}{}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_{n-1}+\boldsymbol{\gamma}_{n-1})$$

が与えられるから，その解は存在する．$\boldsymbol{\Delta}_{n-1}$ が正則でなくても各 $n-1$ に対して方程式数は2個であるのに対して，未知数 $\beta_{kn-1}(k=0,1,2)$ は3個であるから，解は存在する．

以上の議論からわかるように，積プロセスのもとで相対価格のマルチンゲール性を求めるためには，p 変数に対して $p-1$ 個のファクタ数で十分である．すなわち，上の枠組では，積プロセス(5.1)の確率項の和 $\sum_{k=0}^{2}$ を $\sum_{k=1}^{2}$ でおきかえて出発できる．その場合，$\xi_{0n-1}=0$ に対応する．しかしその場合，$\mathcal{X}_{n-1}$ を与えたときの n 時点の3資産価格 X_0, X_{1n}, X_{2n} は関数関係をもつことになる，すなわち3つの確率変数 $\log X_{0n}$, $\log X_{1n}, \log X_{2n}$ は，$\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}$ を媒介にして線形従属となる．従って3資産価格の関数的独立性を確保するためには，ξ_{kn-1} の解が一意的に決まらなくても3つ以上のファクタ ε_{in} を必要とする．特に X_{in} が直接データで観察される場合，確率1でこれらの変数は関数関係にないので，変数と同等以上のファクタ数を必要とする．この点は，1ファクタモデルに基づく割引債の評価モデルの問題点に関係する．

なお上の議論は，3つの変数 ε_{kn} に関して対象であるので，どの ε_{kn} を消去してもよい．

6 オプション・プライシング(マルチンゲール無裁定アプローチ)

$X_{0n} = L_n = \exp(rnh)$
$X_{1n} = S_n$
$X_{2n} = C_n$ (オプション価格：未知)
ただし，$X_{2N} = C_N = \max(S_N - K, 0)$

をおく．このとき4節の命題よりもし $\tilde{X}_{1n} = X_{1n}/X_{0n}$, $\tilde{X}_{2n} = X_{2n}/X_{0n}$ が適当な測度 Q^* のもとでマルチンゲールならば，X_0, X_1, X_2 は互いに無裁定である．

(1) $\tilde{X}_{1n} = S_n/L_n$ のマルチンゲール性

(6.1) $E_m{}^*[S_n/L_n] = S_m/L_m \qquad (m<n)$

(2) $X_{2n} = C_n/L_n$ のマルチンゲール性

(6.2) $E_m{}^*[C_N/L_N] = C_m/L_m$, すなわち

$$C_m = L_m E_m{}^*\left[\frac{C_N}{L_N}\right] = \exp(-rh(N-m))E_m{}^*[C_N]$$

適当な確率測度 Q^* のもとで(1)を保証する S_n の確率プロセスを与えれば，m 時点のコールの価格は(6.2)によって Q^* のもとで $C_N = \max(S_N - K, 0)$ の条件付期待値 $E_m{}^*[C_N]$ に $\exp(-rh(N-m))$ をかけたものとして決まる．従ってそのような S_n の確率プロセスを与えればよい．

幾何的ブラウン運動(対数正規プロセス)

離散時間の場合の S_n のモデルとして

(6.3) $S_n = S_0 \exp\left[\mu nh + \sigma \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \sqrt{h}\right]$

を与える．ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N$ は互いに独立に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である．連続時間では(6.3)は

(6.3a) $S(t) = S(0)\exp\left[\mu t + \sigma \int_0^t dB_t\right]$

となる．S_n は一般に与えられた確率分布(測度)のもとでマルチンゲールとならない．(6.3)は

$$\log S_n = \log S_0 + \mu nh + \sigma\sqrt{h}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k \sim N(\log S_0 + \mu nh, \sigma^2 nh)$$

(対数正規)(S_0 given)

すなわち

(6.4) $\log S_n - \log S_{n-1} = \mu h + \sigma\sqrt{h}\,\varepsilon_n \sim \text{iid}\, N(\mu h, \sigma^2 h) \qquad (n=1, \cdots, \boldsymbol{N})$

と同等である．また S_n の相対価格は

(6.5) $S_n/L_n = (S_{n-1}/L_{n-1})\exp[(\mu - r)h + \sigma\sqrt{h}\,\varepsilon_n]$

となる．従って，相対価格が適当な測度 Q^* のもとでマルチンゲールとなる条件は

(6.6) $E_{n-1}{}^*[S_n/L_n] = S_{n-1}/L_{n-1} \Leftrightarrow E_{n-1}{}^*[\exp(\mu - r)h + \sigma\sqrt{h}\,\varepsilon_n] = 1$

である．従って (S_n/L_n) がマルチンゲールとなるためには(5.5)の右側を保証する(n に依存しない)確率測度 Q^* の存在とその具体的な形が必要である．ここで前節の離散時間ギルサノフの定理を用いる．まずモデルはワンファクタ・モデルであるから $\varepsilon_{0n}=0$, $\varepsilon_{2n}=0$ とおく．その結果(5.3)の Q 測度は

$$dQ = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(1))\,d\boldsymbol{\varepsilon}(1)$$

となる．(5.4)は(6.5)で与えられるから(5.4)の η_{in-1}, δ_{ikn-1} は

(6.7) $\boldsymbol{\eta}_{in-1} = \mu - r$,
$\boldsymbol{\delta}_{i1n-1} = \sigma$, $\boldsymbol{\delta}_{i0n-1} = 0$, $\boldsymbol{\delta}_{i2n-1} = 0$

である．このもとで(5.5)の Q^* は

(6.8) $dQ^* = \exp\left[\sum_{m=1}^{N}\xi_{m-1}\sqrt{h}\,\varepsilon_m - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\xi_{m-1}{}^2 h\right]dQ$

を作る．この Q^* のもとで相対価格 S_n/L_n がマルチンゲールとなる必要十分条件は，(5.10)より

(6.9) $\xi_{n-1} = -\frac{1}{\sigma}\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ (n に無関係)

である．$-\xi_{n-1}$ をモデル(6.3)のリスクの市場価値という．従ってこの ξ_{n-1} を選択すると，Q^* のもとで相対価格のマルチンゲール性が確保されるので(6.1)が成立する．この ξ_{m-1} のもとでは，Q^* のもとでの $\log S_n$ の条件付分布は

$$\log S_n \sim N\left(\log S_{n-1} + rh - \frac{\sigma^2}{2}h, \sigma^2 h\right)$$

となる．すなわち

$$(6.10)\quad S_n = S_0 \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)hn+\sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right]$$

$$\varepsilon_i \sim N(0,1)$$

に従うとして期待値をとってよい．

このとき n 時点コールの価格は(6.10)のもとで，裁定機会を排除するマルチンゲール条件(6.2)より

$$(6.11)\quad C_n = \exp(-rh(N-n)) \quad E_n{}^*[\max(S_N-K,0)]$$

で与えられる．これを直接的に評価するとBlack＝Scholes公式

$$(6.12)\quad C(t) = S(t)\Phi(d_t) -\exp[-r(T-t)]K\Phi(d_t-\sigma\sqrt{T-t})$$

$$d_t = \left[\log(S(t)/K) +\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}$$

S_n の分布が比較的簡単な(6.10)のような場合，直接評価可能であるが，一般に直接評価できないことが多い．その場合，Feynman＝Kacの定理による微分方程式を解く，2項近似等の近似法を用いる，モンテカルロ計算をする，数値積分をする，等が行われている．

1) なお，Black＝Scholesの導出法として，複製法等により偏微分方程式を導出し，それを解く，というアプローチの方が有名．しかし上記のマンチンゲールアプローチは，偏微分方程式を回避するアプローチ．

2) 上の議論は，最終時点でのペイオフが任意の条件付請求権についてもそのまま成立．$W_N=g(S_N)$ の n 時点価値は

$$W_n = L_n E_n^*[W_N/L_N] = \exp(-r(T-t))E_n^*[W_N]$$

で与えられる．

3) 適当な確率測度のもとで $\tilde{X}_{jn}=X_{jn}/X_{0n}$ がマルチンゲールとなることは無裁定性の十分条件である．その必要性について $X(t)$ が伊藤プロセスに従い，一定の条件を満たすと，ほぼ必要であることが示されている．

7 応用可能性

BS公式の基本は，株価プロセスが(6.3)に従うこと．実際のデータが(6.3)に従うかどうかをみるためには(6.4)によって与えられる株価収益率

$$x_n = \log S_n - \log S_{n-1} = \mu h+\sigma\sqrt{h}\varepsilon_n$$

が互いに独立に同じ正規分布 $N(\mu h, \sigma^2 h)$ に従うかどうかをみる．そのため

1) x_n の歪度，尖度等(分布の形状)による正規性の検証

2) x_n の時系列的独立性の検証

等がなされる([6])．

(一橋大学経済研究所)

参 考 文 献

[1] Duffie, D. (1992) *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton.

[2] Harrison, J. M. and Pliska, S. (1982) "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading", *Stochastic Processes and their Appl*. 11, 215-260.

[3] Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. (1992). "Bond pricing and the term structure of interest rates", *Econometrica* **60**, 77-105.

[4] Kariya, T. (1993) *Quantitative Methods for Portfolio Analysis*, Kluwer Academic Pub.

[5] 刈屋武昭(1995)「オプション理論と応用可能性」『経済学年刊』成城大学経済研究所.

[6] 刈屋・佃・丸(1990)『日本の株価変動』東洋経済新報社.

[7] 木島正明(1994)『ファイナンス工学入門 (第II部)』日科技連.