経済研究
Vol. 57, No. 1, Jan. 2006

日本の株式収益率に対する構造変化を伴うボラティリティ変動モデルによる分析[1)]

塩　濱　敬　之

本論文は，東証株価指数(TOPIX)と日経225株価指数を用いた，日本の株式市場における収益率のボラティリティ変動の構造変化点推定に関する実証分析である．ボラティリティ変動には，GARCHモデルと原資産収益率とボラティリティ間の負の相関を考慮したGJRモデルを用いて定式化した．未知の構造変化点を最尤推定量によって推定し，未知の変化点数の特定やモデル選択のためにAICとSIC．また推定されたボラティリティの予測パフォーマンスを比較した．分析に用いるモデルによって構造変化点推定値が異なるが，主要な変化点として1999年3月4日，2000年4月14日，2004年5月6日が挙げられた．これらの変化点によってTOPIX，日経225とも1999年3月5日から2000年4月14日までの期間において，ボラティリティに対するショックの持続性が低かったこと，2004年5月6日以降は，期待収益率の無条件分散が大きく低下したこと，日経225における2004年4月24日の銘柄入れ替えによる構造変化は系列相関の構造変化に表れたこと等の結果が得られた．

1. はじめに

株価，為替レート，債券価格といった資産価格の収益率はボラティリティと呼ばれる2次モーメントが時間を通じて確率的に変動していることが知られている．資産価格のボラティリティは投資リスクを表す指標であり，オプション価格を決定する要因である．時間を通じて確率的に変動するボラティリティの特性を明らかにすることは金融資産のリスク管理を行う上で重要なことである．ボラティリティの変動を定式化するのによく用いられるモデルに，Bolleslev (1986)によって提案されたGARCH(Gereralized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)モデルがある[2)]．GARCHモデルおよびそれらを発展させたモデルを用いてた日本の株式収益率データの実証分析には渡部(1995, 1998, 2000)やオプション価格付けの実証分析を行った三井(2000)，三井・渡部(2003)，渡部(2003)等多数ある．

1996年11月橋本内閣が日本版ビッグバンの構想を掲げて以降,「貯蓄から投資」が謳われて8年が過ぎた．バブル崩壊後日本経済が低迷基調を辿る中で，日本の金融市場を取り巻く環境は市場の活性化のための規制緩和や制度の自由化・効率化の進展を受けて変化を遂げてきた．金融システム改革の目的は，金融取引の国際化の進展や国際競争の激化に対応すること，また金融市場の効率化を図ることによって，経済全体を活性化させることにある．このような，規制緩和や市場整備に向けた努力の結果，株式保有構造の変化につながった．企業の株式持合いの解消に伴って，金融機関の株式保有比率が，90年代以降低下した．一方，外国人投資家の保有比率が急速に増加した．また，インターネット取引の増加や，証券投資制度の見直しや金融商品の多様化による証券投資の需要創造を受けて，個人投資家の保有比率も近年上昇している．

このように次々と行われる規制緩和措置や法改正のため，株式市場における構造変化の時期の特定は難しい．しかしながら，日々確率的に変動するボラティリティが長期間に渡って規制緩和や法改正の存在にも関わらすに同じ確率的構造を保持しているのであろうか．本論文の目的は，日本の代表的な株価指数である東京証券取引所株価指数(TOPIX)と日経225株価指数(日経225)の日次変化率におけるボラティリティ変動に構造変化があるのか，構造変化があるならばその時期はいつであるのか，どのような変化が起きたのかを分析することである．

GARCHモデルを扱ったボラティリティ変動の分析において，構造変化を特定する問題は

重要である．ボラティリティパラメータの安定性を検定する重要性はLamoureux and Lastrapes(1990)，Bollerslev, Chou and Kroner(1992)，Diebold(1986)によって指摘されてきた．そこでは，もしボラティリティ変動に構造変化があるのに，それを考慮せずGARCHモデルを当てはめた場合，ショックの持続性が消滅しないIGARCHモデルを特定してしまう可能性があると指摘している[3]．ボラティリティの定式化において構造変化を見落としたことによる誤特定化の問題は，最適ポートフォリオ選択の誤った推定や，金融資産のリスク評価の誤った評価につながるおそれがある．

GARCHモデルにおけるパラメータの構造変化の検定や推定問題に対していくつかの先行研究がある．Chu(1995)やLundbergh and Terasvirta(2002)はGARCHモデルの構造変化の有無を検定するラグランジュ乗数検定を考えた．Kim, Cho and Lee(2000)やLee, Tokutsu and Maekawa(2004)ではGARCHモデルの構造変化点のCUSUM検定を提案した．また，Berkes, Horva'th and Kokoszka(2005)ではスコア検定に基づく検定方式を提案した．GARCHモデルの構造変化に対するこれらの検定方式のシミュレーションによるパフォーマンスを見ると，標本数が少ないときや，パラメータシフトの大きさが小さいときに検出力が低く，実際に起きた構造変化を見逃してしまう危険性がある．そこで，少ない標本数や変化の規模が小さい構造変化に対して，その変化時点の推定問題が重要になる．

Shiohama(2005)は構造変化があるセミパラメトリックGARCHモデルに対して，構造変化点の最尤推定量，ベイズ推定量を提案し，その漸近理論を調べた．また，ベイズ推定量を用いた変化点推定量が最尤推定量のそれより漸近有効であることが分かった．本論文では，Shiohama (2005)に従いTOPIXと日経225の日次変化率に対してGARCH型モデルを当てはめたときの構造変化点を推定し，どのような変化が起きたのかについて分析する．

株式収益率のデータを用いた分散の構造変化の問題はInclan and Tiao(1994)やChen and Gupta(1997)で扱われた．日本の株式収益率の構造変化を取り入れたGARCHモデルの実証分析として渡部(1999, 2003)がある．先物取引が現物市場にどのような影響をあたえるかについて，渡部(1999)は日経225先物取引に対する規制強化期と緩和期とで，日経225株価指数およびその先物価格の変動には構造変化がないことをEGARCHモデルを用いて示した[4]．また，渡部(2003)は日経225株価指数の価格変動について1997年4月から2002年4月までの日次変化率のデータを用いて60の標本期間のGARCHモデルのパラメータ推定をしている．各標本期間でのパラメータ推定値が安定的に推移していることから構造変化はないと述べているが，2000年4月24日の日経225株価指数の銘柄入れ替えによる構造変化の可能性について示唆している．

本論文で得られた結論は以下のとおりである．

1. 構造変化点の推定値は選択するモデルによって異なる値をとること．また，モデルを選択の規準を変えると選択されるモデルも異なることが分かった．

2. しかしながら，TOPIX，日経225とも主要な変化点は(99/3/4, 00/4/14, 04/5/6)であると推定された．1999年3月5日から2000年4月14日までは，いわゆるITバブルの時期にあたる．この間TOPIX，日経225の日次変化率の自己回帰部分の定数項が有意な正の値を持って変動し，ボラティリティのショックの持続性はこの間著しく低くなっていた．2000年4月14日のニューヨークダウの大幅下落を受けて，TOPIX，日経225とも正のトレンドから負のトレンドへと変化し，再びショックの持続性が強まるボラティリティ変動へと移った．2000年4月24日の日経225の銘柄入れ換えによるのボラティリティの構造変化については，2004年4月14日の構造変化がTOPIX，日経225ともに観測されることから，その構造変化が銘柄入れ替えによるかどうかは特定できない．しかしながら，2004年4月17日以降日経225の日次変化率における系列相関の存在が確認できないことから，銘柄入れ替えによる構造変化は系列相関の変化に表れたといえる．2004年5月7日以降，TOPIX，日経225とも無条件分散がそれ以前のレベルに比べて低い水準で変動していた．

3. 1999年3月5日から2000年4月14日の

期間以外では，GARCH モデルのボラティリティの定式化に構造変化を考慮しても，TOPIX，日経 225 ともショックの持続性が高いままであることが分かった．

4. 誤差項の分布を正規分布にすると，ボラティリティの予測パフォーマンスの点で，t 分布を当てはめたモデルに勝るが，これは誤差項の分散の変化を GARCH パラメータのシフトで捉えるか，t 分布の自由度の変化で捉えるのかの違いである．

5. t 分布の自由度の推定値が各期間で大きく異なることから，誤差項の分布構造に変化があることが示唆された．

本論文は，以下のように構成されている．第 2 節では，構造変化を持つ GARCH 型モデルの構造変化点推定量の漸近理論を述べる．また，分析に用いるボラティリティ変動モデルの定式化を行う．第 3 節では分析結果を説明する．最後に第 4 節では結論と今後の発展について述べる．

2. ボラティリティ変動の定式化と構造変化点推定

2.1 セミパラメトリック GARCH モデルに対する構造変化点推定量の漸近理論

分析の基礎となるセミパラメトリック GARCH モデルに対する構造変化点推定量の漸近理論を紹介する．$\{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$は平均 0，分散 1 を持つ独立同分布に従う確率変数とし，その密度関数を g とする．$\xi_{it} = \mu_i + \sigma_i \varepsilon_{ti}$, $i=1,2$ とすると，ξ_{it} は平均 μ_i，分散 σ_i^2 を持つ確率変数となり，その密度関数は $\sigma_i^{-1} g(\{\cdot - \mu_i\}/\sigma_i)$ となる．変化点数 1 のセミパラメトリック GARCH モデルは次のようになる．

$$y_t = \begin{cases} h_{1t}^{1/2}\xi_{1t} = \mu_1 h_{1t}^{1/2} + \sigma_1 h_{1t}^{1/2}\varepsilon_t, \ t = 1, \dots, [\tau n] \\ h_{2t}^{1/2}\xi_{2t} = \mu_2 h_{2t}^{1/2} + \sigma_2 h_{2t}^{1/2}\varepsilon_t, \\ \quad t = [\tau n]+1, \dots, n \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\tau \in [0, 1]$ は未知の変化点であり，ボラティリティの系列 h_{1t} と h_{2t} は以下で定義される．

$$h_{1t} = \omega_1 + \beta_1 h_{1t-1} + \alpha_1 y_{t-1}^2, \ t = 1, \dots, [\tau n], \tag{2}$$
$$h_{2t} = \omega_2 + \beta_2 h_{2t-1} + \alpha_2 y_{t-1}^2, \ t = [\tau n]+1, \dots, n. \tag{3}$$

ボラティリティ変動が定常であるための Nelson (1990)による次の仮定を設ける．

$$E \ln\{\beta_i + \alpha_i \xi_i^2\} < 0, \text{ for } i = 1, 2.$$

また，ε の分布関数が位置母数と尺度母数に対して有限なフィッシャー情報量を持つことを仮定する．モデルの未知母数 $\theta = (\mu_i, \sigma_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^5$ とする．構造変化点を含めたパラメータベクトルを $\theta = (\theta_1, \theta_2, \tau) \in \Theta \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \times [0, 1]$ と表す．このとき変化点を含む未知母数の最尤推定量 $\hat{\theta}_n^{(ML)}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n^{(ML)} &= (\hat{\theta}_{1n}^{(ML)}, \hat{\theta}_{2n}^{(ML)}, \hat{\tau}_n^{(ML)}) \\ &= \underset{(\theta_1, \theta_2, \tau) \in \Theta}{\arg\sup} L_n(\theta_1, \theta_2, \tau). \end{aligned}$$

ここで $L_n(\theta_1, \theta_2, \tau)$ は尤度関数である．また，ベイズ推定量 $\tilde{\theta}_n^{(B)}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n^{(B)} &= (\tilde{\theta}_{1n}^{(B)}, \ \tilde{\theta}_{2n}^{(B)}, \ \tilde{\tau}_n^{(B)}) \\ &= \int_{\Theta} (\theta_1, \theta_2, \tau) \\ &\times \frac{q(\theta) L_n(\theta)}{\int_{\Theta \times T} q(\theta_1, \theta_2, \tau) L_n(\theta_1, \theta_2, \tau) d(\theta_1, \theta_2, \tau)} d(\theta_1, \theta_2, \tau) \end{aligned}$$

ここで $q(\cdot)$ はパラメータ θ の事前分布である．第 i レジームのパラメータ θ_i の最尤推定量 $\hat{\theta}_{in}^{(ML)}$ とベイズ推定量 $\tilde{\theta}_{in}^{(B)}$ はどちらも同じ極限分布を持つが，変化点推定量 $\hat{\tau}_n^{(ML)}$ と $\tilde{\tau}_n^{(B)}$ の極限分布は異なる．

定理 1 最尤推定量 $\theta_n^{(ML)}$ は $\theta = (\theta_1, \theta_2, \tau) \in \Theta$ 上で一様に以下が成り立つ．

(i) 一致性 $P \lim_{n \to \infty} \hat{\theta}_n^{(ML)} = \theta$,

(ii) 分布収束 $\mathscr{L}_\theta(\mathscr{A}_n(\hat{\theta}_{ML} - \theta)) \xrightarrow[D]{} \mathscr{L}(\xi_1, \xi_2, \hat{u})$,

(iii) 期待損失の収束 $\lim_{n \to \infty} E_\theta w(\mathscr{A}_n(\hat{\theta}_{ML} - \theta)) = Ew(\xi_1, \xi_2, \hat{u})$.

ここで $\mathscr{A}_n = \mathrm{diag}(\underbrace{\sqrt{\tau n}, \dots, \sqrt{\tau n}}_{5},$ $\underbrace{\sqrt{(1-\tau)n}, \dots, \sqrt{(1-\tau)n}}_{5}, n)$ である．また，ξ_1, ξ_2, $\hat{u}$ はそれぞれ次のような確率変数である[5]．

$$\hat{u} = \arg\sup\{\Lambda(u)\}$$
$$\mathscr{L}\{\xi_i\} = N(0, I(\theta_i)^{-1}).$$

$w(\cdot)$は損失関数である．次にベイズ推定量$\tilde{\theta}_n^{(B)}$の漸近特性について以下が成り立つ．証明はShiohama(2005)を参照すること．

定理2　ベイズ推定量$\tilde{\theta}_B$は一様に$\theta=(\theta_1, \theta_2, \tau)\in\Theta$上で以下が成り立つ．

(i)　一致性$P\lim_{n\to\infty}\tilde{\theta}_B = \theta$,

(ii)　分布収束$\mathscr{L}_\theta\{\mathscr{A}_n(\tilde{\theta}_B-\theta)\}\underset{D}{\to}\mathscr{L}(\xi_1, \xi_2, \tilde{u})$.

(iii)　期待損失の収束$\lim_{n\to\infty}E_\theta w(\mathscr{A}_n(\tilde{\theta}_B-\theta)) = Ew(\xi_1, \xi_2, \tilde{u})$.

ここで確率変数$\tilde{u}$は以下で与えられる．

$$\tilde{u} = \frac{\int_{\mathbb{R}} u\Lambda(u)\,du}{\int_{\mathbb{R}}\Lambda(u)\,du}$$

Ibragimov and Has'minski(1981)の定理1．9．1を用いると

$$E(\hat{u})^2 \geq E(\tilde{u})^2$$

となり，ベイズ推定量を用いた構造変化点推定量が最尤推定量のそれより漸近有効であることが分かる．

上では，$\theta_1\neq\theta_2$としたときの推定量の漸近理論であったが，実際問題でθ_1とθ_2の変化の規模が大きいときには，変化点推定問題は極めて簡単にできる．また，変化点推定量の漸近分布が複雑な式で構成されるため，漸近分布を基にした信頼区間の構成が困難である．そこで小さな変化に対応した変化点推定量の漸近理論が重要になる．$\theta_2-\theta_1=\delta_n$とし$n\to\infty$としたときに$\delta_n\to 0$になるような変化点問題を考える．この問題は大きなパラメータのシフトにも対応していて，また漸近分布を基にした信頼区間の構成も簡単にできる．

$\{W_1(t); t\in[0, \infty)\}$と$\{W_2(t); t\in[0, \infty)\}$は独立なウィーナー過程とし，確率過程$W(u)$と$Z(u)$を以下で定義する．

$$W(u) = \begin{cases} W_1(u) & u\geq 0 \\ W_2(-u) & u<0, \end{cases}$$

$$Z(u) = \exp\left\{VW(u)-\frac{1}{2}|u|\ V^2\right\}.$$

このときの変化点推定量$\hat{\tau}_n^{(ML)}$と$\tilde{\tau}_n^{(B)}$の分布収束について次のことが成り立つ．

定理3　$\theta_2-\theta_1=\delta_n, n\to\infty$としたときに$\delta_n\to 0$とすると，変化点の最尤推定量$\hat{\tau}_n^{(ML)}$とベイズ推定量$\tilde{\tau}_n^{(B)}$は次の極限分布を持つ

$$n\delta_n(\hat{\tau}_n^{(ML)}-\tau)\underset{D}{\to}\mathscr{L}(\zeta),$$
$$n\delta_n(\tilde{\tau}_n^{(B)}-\tau)\underset{D}{\to}\mathscr{L}(\tilde{\zeta})$$

ここで確率変数$\zeta\in\mathbb{R}$と$\tilde{\zeta}\in\mathbb{R}$は次のようになる．

$$\zeta = \arg\sup_{u\in\mathbb{R}} Z(u),\ \tilde{\zeta} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} vZ(v)\,dv}{\int_{-\infty}^{\infty} Z(v)\,dv}$$

定理1から3は，変化点数1のGARCH(1, 1)モデルの漸近理論を述べたものだが，これらの定理は変化点数をmに増やしても，GARCH(p, q)モデルに拡張しても同様に成り立つ．

2.2　ボラティリティ変動の定式化

日本の株式市場の代表的な株価指数である日経225株価指数とTOPIXを用いてボラティリティ変動の構造変化について分析するに当たって，GARCHモデル，GJRモデルを用いてボラティリティの変動を定式化する[6]．多くの実証研究においてボラティリティ変動過程の次数を多くしてもパフォーマンスは改善されないことが示されていることから，本論文ではGARCH(1,1)モデルとGJR(1,1)モデルを用いて分析を行う．構造変化点数mは未知であるとしその特定化もあわせて行う．m個の構造変化点$k_1, \ldots, k_m$を持つGARCHモデルは以下の式によって表される．

$$R_t = \mu_i+\phi_{i1}R_{t-1}+\phi_{i2}R_{t-2}+\varepsilon_t,\quad t = k_{i-1}+1, \ldots, k_i \tag{4}$$

$$\varepsilon_t = h_{it}^{1/2}z_t,\ z_t\sim i.i.d.(0, 1)\quad t = k_{i-1}+1, \ldots, k_i \tag{5}$$

$$h_{it} = \omega_i+\beta_i h_{i,t-1}+\alpha_i\varepsilon_{t-1}^2,\quad t = k_{i-1}+1, \ldots, k\quad i = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{6}$$

ここで$k_0=0, k_{m+1}=n$である．株式の収益率の分布の裾の厚さはボラティリティの変動だけでは，完全に説明することはできず，誤差項の分布にも裾の厚い分布を当てはめたほうがフィットが良くなることが知られているので，z_tの分

布は，標準正規分布と分散を1に基準化した t 分布を用いる．

GARCH モデルは，資産価格のボラティリティがいったん上昇(低下)すると，その後しばらくの間ボラティリティの高い(低い)日が続く現象である "volatility clustering" をうまく捉えることができる．このときボラティリティのショックの持続性は GARCH モデルを用いると $|\alpha+\beta|$ の値によって測ることができる．$|\alpha+\beta|$ の値が1に近いほどショックが長時間続くことになる．日経 225 株式指数や TOPIX データに GARCH モデルを当てはめた場合，$|\alpha+\beta|$ の推定値が1に近い値が得られることが多い[7]．しかしながら，ボラティリティの定式化に構造変化がある場合に $|\alpha+\beta|$ の推定値が1に近くなることが知られており，このことからも日経 225 株式指数や TOPIX の日次変化率の系列に構造変化があることが示唆されている．(4)式で定義される第 i レジームの残差 ε_t の分散は

$$E\varepsilon_t^2 = \omega_i/(1-\alpha_i-\beta_i)$$

であるから，ボラティリティパラメータのシフトは残差項の分散の変化になる．

株式収益率のボラティリティは株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方が上昇する傾向があることが経験的に知られている．上述の GARCH モデルでは，こうしたボラティリティの非対称性を捕らえることができないので，ボラティリティ変動の非対称性を取り入れた GJR モデルを用いたボラティリティの定式化を行う．このとき GJR(1,1)モデルのボラティリティは(6)にボラティリティ変動の非対称性を表す γ を加えて以下のように表される．

$$h_{i,t} = \omega_i+\beta_i h_{i,t-1}+(\alpha_i+\gamma_i D_{t-1}^{-})\varepsilon_{t-1}^2, \quad i = 1,2,\ldots,m+1. \tag{7}$$

前日の ε_t が正であれば $D_{t-1}^{-}=0$ であるから(7)式は

$$h_{i,t} = \omega_i+\beta_i h_{i,t-1}+\alpha_i\varepsilon_{t-1}^2$$

となり，前日の ε_t が負であれば $D_{t-1}^{-}=1$ であるから

$$h_{i,t} = \omega_i+\beta_i h_{i,t-1}+(\alpha_t+\gamma)\varepsilon_{t-1}^2$$

となる．$\gamma>0$ であれば，予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった翌日のほうがボラティリティがより上昇することになる．

これらの GARCH モデルによって捉えることのできる構造変化は次の3つである．第1に μ_i のシフト，第2に (ϕ_{1i}, ϕ_{2i}) の変化によって起きる日次変化率の系列相関の構造変化，第3にボラティリティパラメータ $(\alpha, \omega, \beta, \gamma)$ のシフトによる無条件分散のシフトである．

以下では，ボラティリティの定式化に GARCH モデルを用い，誤差項の分布に標準正規分布を用いたものを GARCH-n と表し，t 分布を用いたものを GARCH-t と表す．またボラティリティの定式化に GJR モデルを用い，誤差項の分布に標準正規分布を用いたものを GJR-n と表し，t 分布を用いたものを GJR-t と表す．

3. 実証分析

3.1 データと構造変化がないときの推定結果

本研究では，TOPIX と日経 225 の終値の日次データを用いて未知の構造変化時点を含むモデルのパラメータを推定した．収益率 R_t はそれぞれの株価指数終値の変化率として計算した[8]．標本期間は 1997 年1月7日から 2005 年3月31日まで，標本数は 2027 である．表1にデータの基本統計量をまとめた．TOPIX，日経 225 とも標本平均が負の値を示しているが，これは有意な値ではない．分布の歪みを測る歪度を見ると，日経 225 の負の値の歪度は有意な値ではないが，TOPIX の歪度は有意な負の値を示している．このことから，日経 225 の日次変化率は対照な分布であるのに対し，TOPIX の日次変化率の分布は左に裾が長いことがわかる．TOPIX，日経 225 の Ljung-Box 統計量はそれぞれ 26.19，22.06 であるから，1階から 12 階までの系列相関係数がすべてゼロであるとする帰無仮説は 5% 有意水準で棄却される．このことからも両指数の日次変化率が過去の値と系列相関をもって変動している可能性を示唆している．

構造変化がないときの GARCH モデルを当てはめた場合の推定値を表2に示した．TOPIX は有意なラグ1の系列相関を持つが，日経 225 のそれは有意な値を持たない[9]．また自己回帰部分の定数項 μ は統計的に有意な値が得られなかった．また，GARCH モデルにお

表1．TOPIX と日経225の日次変化率の基本統計量

標本数	平均	標準誤差	最大値	最小値	歪度	尖度	LB(12)
日経225							
2027	−0.0252	1.5294	7.6605	−7.2340	−0.0017	4.6415	22.062
	(0.034)				(0.054)	(0.109)	
TOPIX							
2027	−0.0111	1.3176	6.5993	−6.5736	−0.1138	4.7430	26.191
	(0.029)				(0.054)	(0.109)	

ける $\alpha+\beta$ の値が1に近いことからショックが高い持続性を持つことが観測され，これは過去の研究と整合的な結果である．

3.2　モデルと変化点数の選択

TOPIX または日経225株価指数の収益率の変動における構造変化点を推定するために，(4)-(6)式からなる GARCH モデルまたボラティリティ変動を(7)式で表した GJR モデルを用いる．収益率の系列相関は2次までの自己回帰モデルを当てはめる．構造変化点は次のようにして求める．まず，全期間のデータを使い $m=1$ の場合の構造変化点を最尤推定量によって推定し，それを $\hat{k}_1^{(ML)}$ と表す．変化点数が $m=2$ の場合は，最初に推定された構造変化点によって標本期間を2つにわけ，標本期間内前半，後半それぞれについて構造変化点を推定し，それを $\hat{k}_2^{(ML)*}$，$\hat{k}_2^{(ML)**}$ と表す．2つの変化点 $(\hat{k}_1^{(ML)}, \hat{k}_2^{(ML)*})$ と $(\hat{k}_1^{(ML)}, \hat{k}_2^{(ML)**})$ を用い，対数尤度を最大にする変化点推定量を $(\hat{k}_1^{(ML)}, \hat{k}_2^{(ML)})$ とする．このことを $m=4$ になるまで繰り返して，最大で4個の構造変化点を推定する．こうして推定された m 個の変化点を持つ GARCH 型モデルにおける未知の変化点数の推定をシュワルツ規準(SIC)

$$SIC(m) = -2\log \text{likelihood} + \{p(m+1)+m\}\log n$$

を最小化にする変化点数 $\hat{m}^{(SIC)}$ と AIC タイプの情報量規準

$$AIC(m) = -2\log \text{likelihood} + 2\{p(m+1)+3m\}$$

を最小化する変化点数 $\hat{m}^{(AIC)}$ を用いて推定する．ここで p は各レジームにおけるパラメータ数である．SIC の一致性は Yao(1993)によって正規分布の平均の変化点問題の設定で示されたが，SIC とは異なる罰則項に対しても一致性が成り立つことが Lee(1995)や Braun, Brown and Muller(2000)によって示された．また，AIC タイプの変化点パラメータの罰則は正則なパラメータの罰則の3倍であることが正規分布の平均の変化点問題の設定で Ninomiya(2005)によって示された．変化点がある場合の

表2．変化点数0の場合のパラメータ推定値

	TOPIX				日経225			
	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
μ	0.0179	0.0160	−0.0173	−0.0092	0.0040	0.0048	−0.0236	−0.0162
	(0.0273)	(0.0265)	(0.0281)	(0.0272)	(0.0285)	(0.2778)	(0.0291)	(0.0282)
ϕ_1	0.0978***	0.0907***	0.0992***	0.0933***	−0.0130	−0.0216	−0.0123	−0.0214
	(0.0236)	(0.0229)	(0.0235)	(0.0228)	(0.0236)	(0.0227)	(0.0234)	(0.0226)
ϕ_2	−0.0388*	−0.0465**	−0.0362	−0.0414*	−0.0377	−0.0388*	−0.0355	−0.0353
	(0.0232)	(0.0227)	(0.0232)	(0.0227)	(0.0232)	(0.0226)	(0.0232)	(0.0225)
ω	0.0505***	0.0453***	0.0579***	0.0518***	0.0543***	0.0406**	0.0595***	0.0456***
	(0.0151)	(0.0157)	(0.0149)	(0.0153)	(0.0175)	(0.0173)	(0.0165)	(0.0163)
α	0.0900***	0.0799***	0.0355***	0.0296**	0.0786***	0.0678***	0.0349***	0.0272**
	(0.0128)	(0.0131)	(0.0121)	(0.0126)	(0.0117)	(0.0119)	(0.0112)	(0.0112)
β	0.8828***	0.8948***	0.8806***	0.8928***	0.8993***	0.9155***	0.8995***	0.9152***
	(0.0160)	(0.0169)	(0.0160)	(0.0166)	(0.0143)	(0.0151)	(0.0140)	(0.0147)
γ			0.1041***	0.0956***			0.0817***	0.0764***
			(0.0216)	(0.0228)			(0.0191)	(0.0196)
DF		10.4343***		10.9471***		10.5192***		11.0705***
		(2.0905)		(2.3250)		(2.1580)		(2.3668)

注）括弧内の値は標準誤差，DF は t 分布の自由度．
***：1% 有意，**：5% 有意，*：10% 有意．

表 3. TOPIX と日経 225 の日次変化率に対する AIC と SIC 及び変化点数

	TOPIX				日経 225			
	$\widehat{m}^{(AIC)}$	AIC	$\widehat{m}^{(SIC)}$	SIC	$\widehat{m}^{(AIC)}$	AIC	$\widehat{m}^{(SIC)}$	SIC
AR(2)-GARCH-n	3	6637.2	0	6714.3	3	7242.4	0	7321.3
AR(2)-GJR-n	3	6612.8	0	6694.3	3	7223.4	0	7307.7
AR(2)-GARCH-t	3	6621.2	0	6682.9	3	7230.6	0	7290.9
AR(2)-GJR-t	3	**6604.6**	0	**6669.5**	3	**7221.2**	0	**7280.1**

表 4. 構造変化点の最尤推定値

	TOPIX	日経 225
AR(2)-GARCH-n	**99/3/4, 00/4/14, 04/5/6**	**99/3/4, 00/4/14, 04/5/6**
AR(2)-GJR-n	**99/3/4, 00/4/14,** 03/10/22	**99/3/4, 00/4/14, 04/5/6**
AR(2)-GARCH-t	**00/4/14,** 03/4/25, **04/5/6**	**00/4/14,** 03/3/27, **04/5/6**
AR(2)-GJR-t	**99/3/4, 00/4/14,** 04/5/20	98/12/10, **00/4/14,** 03/3/27

GARCH 型モデルにおける情報量規準の統計的性質はまだ明らかになっていないが，ここでは便宜的に AIC と SIC を用いる．表 3 に AIC と SIC を用いたときの TOPIX，日経 225 の変化点数の推定値 $\widehat{m}^{(AIC)}$ と $\widehat{m}^{(SIC)}$ と，そのときの AIC 及び SIC の値を示した．表 4 は AIC によって選択された変化点数 $\widehat{m}^{(AIC)}$ を用いたときのその変化点推定値を示した．

SIC を用いた変化点数の推定はどのモデルに対しても変化点数が $\widehat{m}^{(SIC)}=0$ となり構造変化のないモデルを選択する．一方，AIC を用いると，TOPIX，日経 225 とも変化点数 $m=3$ の AR(2)-GJR-t モデルが選択される．このように，AIC と SIC とでは選択されるモデルも変化点数も異なることから，別の規準からモデルと変化点数を選択する必要がある．

モデルと変化点数を選択するために，ボラティリティの推定値を用いた残差 2 乗の予測パフォーマンスを比較して，モデルの比較を行う．そのために以下の特性値を調べる．

$$RMSE1=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\widehat{\varepsilon}_t^2-\widehat{h}_t)^2} \tag{8}$$

$$RMSE2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\widehat{\varepsilon}_t-\widehat{h}_t^{1/2})^2} \tag{9}$$

$$QLIKE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\log\widehat{h}_t+\widehat{\varepsilon}_t^2\widehat{h}_t^{-1})^2 \tag{10}$$

$$R2LOG=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[\log(\widehat{\varepsilon}_t^2\widehat{h}_t^{-1})]^2 \tag{11}$$

$$RMAD1=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|\widehat{\varepsilon}_t^2-\widehat{h}_t|} \tag{12}$$

$$RMAD2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|\widehat{\varepsilon}_t-\widehat{h}_t^{1/2}|} \tag{13}$$

(4)，(5)は平均 2 乗誤差規準であり，平均絶対誤差規準(Mean Absolute Deviation)である(8)，(9)は外れ値に対して MSE 規準より頑健である．(6)は正規尤度から示唆される誤差である[10]．(7)は Pagan and Schwert(1990)によって指摘された対数損失関数である[11]．表 5 に変化点数を 0 と 3 にした場合の GARCH モデル，GJR モデルによるボラティリティの予測のパフォーマンスを比較した[12]．この表からは，TOPIX，日経 225 とも AR(2)-GJR-n モデルが残差の予測のパフォーマンスに関しては優れていることが分かる．

モデルを選択する規準が異なることで選択されるモデルが異なることが明らかになった．したがって，各モデルについてその変化点の持つ意味を考慮する必要がある．

3.3 推計結果

ここでは，推定された変化点とそこで起きたパラメータシフトについて考察する．表 4 には各モデルに対して AIC によって推定された構造変化点推定値を示した．これによると構造変化点はモデルにより異なるが，複数推定された構造変化点は 1999 年 3 月 4 日，2000 年 4 月 14 日また 2004 年 5 月 6 日であることが分かる．表 6 には変化点数を 3 とし，最も多く選択された 3 つの変化時点 1999 年 3 月 4 日，2000 年 4 月 14 日，2004 年 5 月 6 日を用いたときの各標本期間内での基本統計量を調べた．この表から以下のことが分かる．

1. 1997 年 1 月 7 日から 1999 年 3 月 4 日ま

表 5. 推定されたボラティリティの予測誤差のパフォーマンスの比較

	TOPIX					
$m=0$	RMSE1	RMSE2	QLIKE	R2LOG	RMAD1	RMAD2
AR(2)-GARCH-n	3.286	0.888	1.454	7.519	1.331	0.847
AR(2)-GJR-n	3.276	0.884	1.440	7.225	1.328	0.844
AR(2)-GARCH-t	3.287	0.890	1.452	7.645	1.332	0.848
AR(2)-GJR-t	3.153	0.883	1.440	7.404	1.326	0.844
$m=3$						
AR(2)-GARCH-n	**3.031**	0.857	1.407	6.991	1.300	0.836
AR(2)-GJR-n	3.056	**0.835**	**1.388**	**6.964**	**1.294**	**0.831**
AR(2)-GARCH-t	3.057	0.864	1.411	7.033	1.303	0.840
AR(2)-GJR-t	3.087	0.856	1.392	7.081	1.300	0.833
	日経 225					
$m=0$	RMSE1	RMSE2	QLIKE	R2LOG	RMAD1	RMAD2
AR(2)-GARCH-n	4.318	1.036	1.753	7.823	1.550	0.916
AR(2)-GJR-n	4.309	1.032	1.742	7.371	1.546	0.914
AR(2)-GARCH-t	4.316	1.035	1.753	7.398	1.549	0.916
AR(2)-GJR-t	4.306	1.031	1.742	7.360	1.545	0.913
$m=3$						
AR(2)-GARCH-n	4.030	1.000	1.706	7.312	1.512	0.903
AR(2)-GJR-n	**4.014**	**0.995**	**1.693**	7.231	**1.506**	**0.898**
AR(2)-GARCH-t	4.086	1.006	1.708	**7.054**	1.516	0.904
AR(2)-GJR-t	4.090	1.007	1.698	7.546	1.515	0.902

での標本期間を 1 期と呼ぶことにすると，この間日経 225 は 18896 円 19 銭から 14183 円 45 銭まで約 27% 下落し TOPIX も 1453.05 から 1105.11 まで約 25% 下落した．TOPIX，日経 225 とも標本平均は負の値を示しているが，統計的に有意な値ではない．また LB(12) の値から TOPIX，日経 225 とも統計的に有意な系列相関が存在することを示している．

2．1999 年 3 月 5 日から 2000 年 4 月 14 日までの標本期間を 2 期とすると，この間 IT バブルにより日経 225 は 14894 円 00 銭から 20434 円 68 銭まで約 44% 上昇し，TOPIX も 1105.11 から 1653.70 まで約 50% 上昇した．標本平均はそれぞれ正に有意な値を示している．TOPIX には系列相関が存在しないという帰無仮説は棄却されないが，日経 225 には 5% で有意な系列相関が観測される．2000 年 4 月 14 日はニューヨークダウ平均が 617 ドル 78 セントの史上最大の下落を見せた日である．またこの日に日本経済新聞社は日本の産業構造の構造変化に対応するために日経 225 対象 225 銘柄のうち，30 銘柄の入れ替えを発表した．実施は 4 月 24 日からであった[13]．

3．2000 年 4 月 17 日から 2004 年 5 月 6 日までの標本期間を 3 期とする．TOPIX は 1552.46 から始まり 2003 年 3 月 11 日にバブル崩壊後の最安値 770.62 をつけ，その後 1186.31 まで回復した．日経 225 は 19008 円 64 銭から始まり 2003 年 4 月 28 日にバブル崩壊後の最安値 7607 円 88 銭をつけたが，その後株価は上昇し 2005 年 4 月 30 日に 11761 円 79 銭まで回復した．TOPIX，日経 225 ともこの期間では，系列相関の存在は確認できない．

4．2004 年 5 月 7 日から 2005 年 3 月 31 日までの標本期間を 4 期とする．この間 TOPIX は 1,150.89 から 1,182.18 へ，また日経 225 は 11438 円 82 銭から 11668 円 95 銭とほぼ横ばいの推移を示している．2004 年 5 月 7 日の翌営業日の 5 月 10 日には日経 225 で 554 円 12 銭の下げ幅を記録し，TOPIX では 5.7% 下げた．またこの期間，標準偏差が第 3 期に比べ大きく低下していることが分かる．また，第 3 期で確認できなかった系列相関の存在が再び確認された．

表 7 は，1997 年 1 月 7 日から 2005 年 3 月 31 日までの TOPIX と日経 225 における上位 10 営業日の価格の上昇率と下落率を表した．この表からみると，構造変化点推定値は大きな値動きがあった日と関連していることがわかる．

このように AIC で選択された 3 つの最尤推定量による構造変化点推定値は価格の大きな変化に伴った確率的トレンドの変化に対応してい

表6. TOPIX，日経225の日次変化率の基本統計量

	TOPIX				日経225			
	97/1/7-99/3/4	99/3/5-00/4/14	00/4/17-04/5/6	04/5/7-05/3/31	97/1/7-99/3/4	99/3/5-00/4/14	00/4/17-04/5/6	04/5/7-05/3/31
標本数	533	274	997	233	533	274	997	233
平均	−0.055	0.147	−0.035	0.065	−0.059	0.133	−0.057	0.004
	(0.059)	(0.081)	(0.043)	(0.065)	(0.073)	(0.077)	(0.050)	(0.007)
標準誤差	1.368	1.348	1.347	0.975	1.696	1.277	1.587	1.051
最大値	6.599	4.870	6.127	3.023	7.660	4.888	7.222	2.764
最小値	−5.248	−4.710	−6.574	−5.846	5.957	−3.444	−7.234	−4.965
歪度	0.178	−0.213	−0.181	−0.845	0.149	0.149	−0.052	−0.447
	(0.106)	(0.148)	(0.078)	(0.164)	(0.106)	(0.148)	(0.078)	(0.164)
尖度	5.090	3.994	4.324	8.800	4.662	3.994	4.207	5.074
	(0.212)	(0.296)	(0.155)	(0.328)	(0.212)	(0.296)	(0.155)	(0.328)
LB(12)	26.754	14.461	14.195	19.038	26.754	21.611	6.288	25.909
p 値	0.008	0.272	0.246	0.088	0.008	0.042	0.901	0.011

る．また，系列相関の構造変化や誤差項の分散の変化点を示している．各モデルのGARCHモデルのパラメータ推定の詳細は次節で詳しく見る．

3.4 GARCHモデルの推定結果

前節で基本統計量の構造変化を見たが，ここではGARCH，GJRモデルの推計結果からモデルのパラメータがどのようにシフトしたのかについて考察する．

(1)GARCHモデルにおける構造変化

まずは，GARCH-nモデルを当てはめたときに推定された構造変化点とボラティリティパラメータの構造変化を見てみよう．表8にAR(2)-GARCH-nモデルを当てはめたときの推定結果をまとめた．GARCH-nを当てはめたときの構造変化点推定値はTOPIX，日経225とも1999年3月4日，2000年4月14日，2004年5月6日である．AR(2)-GARCH-nモデルを自己回帰部分とGARCH部分に分けて，明確な構造変化を述べよう．自己回帰部分の定数項は1999年3月4日から2000年4月14日までの期間で有意な正の値をとる．これは，表6でも確認できた．また，2次までの系列相関を示すϕ_1とϕ_2の値は，1999年3月4日から2000年4月14日までの期間で有意な値をとらない．TOPIXにおいては，その後2000年4月17日から2004年5月6日までの期間で1次の自己回帰係数に有意な正の値が観察される．また，2004年5月6日以降では，2次の自己回帰係数に10%で有意な負の値が確認できる．一方，日経225においては，1997年1月7日から1999年3月4日までの期間で確認された2次の自己回帰係数に有意な負の系列相関は，それ以降観測されない．表6からは，第2，4期において，12階までの有意な系列相関の存在があったが，これは，この期間の日経225日次変化率において高次のラグに系列相関が検出されたからである．次にGARCHパートの構造変化をみる．無条件分散の大きさの違いを$\omega/(1-\alpha-\beta)$で確認できる．TOPIXの日次変化率において，第4期にその値が第3期に比べて約34%

表7. TOPIX，日経225の騰落率上位10日

日付	上昇率	日付	下落率
TOPIX			
1997/11/17	6.60	2001/9/12	−6.57
2001/3/21	6.13	**2000/4/17**	**−6.32**
1998/10/7	4.90	2004/5/10	−5.85
2000/1/11	4.87	**2003/10/23**	**−5.43**
2002/3/4	4.63	1997/11/25	−5.25
1998/1/16	4.48	2000/3/13	−4.71
2001/3/26	4.28	1997/11/19	−4.67
1998/10/12	4.07	1998/10/8	−4.44
1998/11/4	3.82	1997/1/10	−4.04
1999/3/5	**3.70**	2001/3/29	−3.97
日経225			
1997/11/17	7.66	**2000/4/17**	**−7.23**
2001/3/21	7.22	2001/9/12	−6.86
1998/10/7	5.99	1998/10/8	−5.96
1998/1/16	5.93	1997/11/19	−5.43
2002/3/4	5.74	1997/12/19	−5.38
1998/9/7	5.18	1997/11/25	−5.24
1998/10/12	5.11	1998/9/11	−5.24
1999/3/5	**4.89**	2003/10/23	−5.23
2001/3/26	4.79	2001/9/17	−5.17
1997/1/13	4.60	2001/3/29	−5.17

表 8.　AR(2)-GARCH-n のパラメータ推定値

	TOPIX				日経 225			
	97/1/7-99/3/4	99/3/5-00/4/14	00/4/17-04/5/6	04/5/7-05/3/31	97/1/7-99/3/4	99/3/5-00/4/14	00/4/17-04/5/6	04/5/7-05/3/31
μ	−0.0164	0.1657**	−0.0165	0.0549	−0.0336	0.1468**	−0.0332	0.0362
	(0.0483)	(0.0784)	(0.0445)	(0.0463)	(0.0545)	(0.0658)	(0.0478)	(0.0491)
ϕ_1	0.1032**	0.0831	0.1153***	0.0290	−0.0452	−0.0813	0.0161	−0.0992
	(0.0460)	(0.0652)	(0.0332)	(0.0715)	(0.0455)	(0.0649)	(0.0335)	(0.0667)
ϕ_2	−0.1177***	−0.0954	−0.0036	−0.1105*	−0.1185***	−0.0643	−0.0015	−0.0936
	(0.0450)	(0.0619)	(0.0322)	(0.0578)	(0.0451)	(0.0608)	(0.0323)	(0.0637)
ω	0.0598**	0.6087	0.0878***	0.0127	0.0836**	0.6032	0.0986**	0.0044
	(0.0267)	(0.3985)	(0.0328)	(0.0124)	(0.0402)	(0.4386)	(0.0400)	(0.0107)
α	0.1039***	0.0928	0.0681***	0.0847**	0.0794***	0.1246*	0.0601***	0.0402
	(0.0254)	(0.0632)	(0.0173)	(0.0394)	(0.0213)	(0.0682)	(0.0157)	(0.0296)
β	0.8609***	0.5598**	0.8825***	0.8943***	0.8885***	0.4734	0.9000***	0.9500***
	(0.0312)	(0.2539)	(0.0265)	(0.0434)	(0.0274)	(0.3272)	(0.0236)	(0.0367)
$\alpha+\beta$	0.9648	0.6526	0.9506	0.9790	0.9679	0.5980	0.9601	0.9902
$\frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}$	1.6989	1.7522	1.7773	0.6048	2.6044	1.5005	2.4712	0.4490

注）括弧内の値は標準誤差．
***: 1% 有意，**: 5% 有意，*: 10% 有意．

に減少した．日経 225 においても第 4 期に無条件分散の大きさが第 3 期に比べて約 18% までに減少した．ボラティリティのショックの持続性を測る $\alpha+\beta$ の値を見ると，第 2 期においてその持続性の強さが著しく低下していることが分かる．その他の期間については，$\alpha+\beta$ の値は 1 に近い値で推移している．

表 9 は AR(2)-GARCH-t モデルを当てはめたときの推定結果をまとめた．GARCH-n との違いは，TOPIX において 2003 年 4 月 25 日，日経 225 において 2003 年 3 月 27 日の構造変化点を推定していることである．この変化点は株価の長期的な確率トレンドの変化点を捕らえている．すなわち，自己回帰部分における定数項の値がその変化点以前は有意な負の値であったのが，変化点以後有意な正の値に変化した．また，誤差項の裾の厚さを示す t 分布の自由度の推定値が 19.28 から 7.27 へと下がったことにより，誤差項の分布の構造が変化したことが伺える．

(2)GJR モデルにおける構造変化

表 10，11 はそれぞれ誤差項の分布を正規分布，t 分布にしたときに GJR モデルを当てはめたときの推定結果である．AR(2)-GJR-n モデルを当てはめたときの TOPIX の構造変化点の推定値は 1999 年 3 月 4 日，20004 年 4 月 14 日，2003 年 10 月 22 日であり，日経 225 の構造変化点の推定値は 1999 年 3 月 3 日，2004 年 4 月 14 日，2004 年 5 月 6 日であった．TOPIX,日経 225 とも第 1 期で有意に推定された自己回帰係数が第 2 期では有意な推定値が得られていない．またボラティリティ式における β の値が第 2 期で低下したことは GARCH-n モデルの結果と同様である．ボラティリティの非対称性を表す γ の値は TOPIX では 0.32 と推定されているが，日経 225 においては有意な推定値が得られていない．また，2003 年 10 月 23 日以降は γ の値が 0.34 と大きく変化した．負のショックに対するボラティリティの反応は TOPIX の系列のほうが日経 225 よりも大きいといえる．誤差項の分布を t 分布にした場合の TOPIX の変化点推定値は 1999 年 3 月 4 日，2000 年 4 月 14 日，2004 年 5 月 20 日である．200 年 5 月 21 日以降は，γ の値が有意に推定されていないことから，負のショックに対するボラティリティの反応はないといえる．また，自由度の推定値がうまくできていないことが分かり，2004 年 5 月 21 日以降に t 分布を当てはめることが適当ではないことが分かる．このことは GARCH-n モデルについても同様であった．日経 225 については，第 2 期と第 4 期の γ の推定値が有意な値となっていないことが分かる．

誤差項の分布に正規分布を用いた場合と，t 分布を用いた場合の違いは，残差項の無条件分

表 9. AR(2)-GARCH-t のパラメータ推定値

	TOPIX				日経 225			
	97/1/6-00/4/14	00/4/17-03/4/25	03/4/28-04/5/6	04/5/7-05/3/31	97/1/6-00/4/14	00/4/17-03/3/27	03/3/28-04/5/6	04/5/7-05/3/31
μ	0.0318	−0.1008**	0.2177***	0.0546	0.0243	−0.1255**	0.1861**	0.0376
	(0.0412)	(0.0505)	(0.0756)	(0.0462)	(0.0417)	(0.0562)	(0.0800)	(0.0486)
ϕ_1	0.0860**	0.0862**	0.1131*	0.0248	−0.0608*	−0.0244	0.0651	−0.0969
	(0.0365)	(0.0378)	(0.0642)	(0.0700)	(0.0365)	(0.0381)	(0.0596)	(0.0655)
ϕ_2	−0.0937***	−0.0148	−0.0286	−0.1114*	−0.0785**	−0.0002	−0.0588	−0.1038
	(0.0356)	(0.0369)	(0.0617)	(0.0598)	(0.0358)	(0.0377)	(0.0597)	(0.0660)
ω	0.0850**	0.1112**	0.0560	0.0123	0.0854**	0.1420**	0.0658	0.0035
	(0.0377)	(0.0503)	(0.0428)	(0.0123)	(0.0392)	(0.0669)	(0.0583)	(0.0108)
α	0.0822***	0.0642***	0.0424	0.0819**	0.0743***	0.0550***	0.0312	0.0384
	(0.0234)	(0.0209)	(0.0273)	(0.0396)	(0.0203)	(0.0199)	(0.0224)	(0.0292)
β	0.8707***	0.8764***	0.9177***	0.8977***	0.8878***	0.8916***	0.9325***	0.9530***
	(0.0358)	(0.0361)	(0.0436)	(0.0436)	(0.0301)	(0.0339)	(0.0415)	(0.0364)
DF	8.4431***	19.2756*	7.2697**	86.8302	9.6809***	16.9305*	10.0495	25.2288
	(2.4251)	(10.344)	(3.6870)	—	(3.0969)	(9.2025)	(6.1054)	(33.328)
$\alpha+\beta$	0.9529	0.9406	0.9601	0.9796	0.9621	0.9466	0.9637	0.9914
$\frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}$	1.8047	1.8721	1.4035	0.6029	2.2533	2.6592	1.8127	0.4070

注） 括弧内の値は標準誤差，DF は t 分布の自由度．
***：1% 有意，**：5% 有意，*：10% 有意．

散の変化を，正規分布の場合は，ボラティリティパラメータの変化によって捉えようとしているのに対し，t 分布の場合はその自由度の変化で分散の変化を捉えようとすることである．それゆえ，ボラティリティの予測のパフォーマンスを比較した表5において，正規分布を用いたほうが t 分布を用いたときよりもよいパフォーマンスが得られることになった．また，GJR モデルを用いて明らかになったことは，ボラティリティ変動の非対称性は全期間を通して確認できることではなく，予期せずに価格が下がった日の翌日のボラティリティに与える影響は期間によって異なるということである．日経 225 の推定値から判断すると，負のショックがボラティリティに与える影響は株価が下降トレンドを持って推移しているときに顕著であった．

4. 結論と今後の課題

本論文では，日本の株式市場における構造変化の有無について，また構造変化があるならばそれがいつ観測されたのかを，TOPIX と日経 225 の日次変化率を用いて調べた．推定された構造変化点はモデルによって異なり，AIC や SIC でモデル選択すると異なる変化点数を選択することなどから，どのモデルが最良であるのか判断することは難しい．ボラティリティの予測のパフォーマンスから判断すると TOPIX，日経 225 とも GJR-n モデルが優れていたことが分かったが，これは誤差項の分散の変化をボラティリティのシフトで捉えるか，t 分布の自由度の変化で捉えるかの違いである．ボラティリティの予測に関心があるのか，あるいはモデルのフィットの良さを求めるのか，状況によって使う分布を選択すればよい．GJR-n モデルによって推定された TOPIX の 3 個の変化点は 1999 年 3 月 4 日，2000 年 4 月 14 日，2003 年 10 月 22 日であり，日経 225 の 3 つの構造変化点は 1999 年 3 月 4 日，2000 年 4 月 14 日，2004 年 5 月 6 日であった．一方，GJR-t モデルによって推定された TOPIX の 3 個の変化点は 1999 年 3 月 4 日，2000 年 4 月 14 日，2004 年 5 月 20 日であり，日経 225 の 3 つの構造変化点は 1998 年 12 月 10 日，2000 年 4 月 14 日，2003 年 3 月 27 日であった．

構造変化を伴う GARCH 型モデルの推定から以下のことが分かった．

1. GARCH モデルの推定結果から判断すると IT バブルの時期にあたる 1999 年 3 月 5 日から 2000 年 4 月 14 日までの期間において，TOPIX，日経 225 ともボラティリティ変動のショックに対する持続性が低下した．しかしながら，これ以外の期間においては，ボラティリ

表 10. AR(2)-GJR-n のパラメータ推定値

	TOPIX				日経 225			
	97/1/7-99/3/4	99/3/5-00/4/14	00/4/17-03/10/22	03/10/23-05/3/31	97/1/7-99/3/4	99/3/5-00/4/14	00/4/17-04/5/6	04/5/7-05/3/31
μ	−0.0648	0.1340*	−0.0638	0.0334	−0.0709	0.1313**	−0.0632	−0.0022
	(0.0490)	(0.0762)	(0.0489)	(0.0504)	(0.0551)	(0.0649)	(0.0485)	(0.0498)
ϕ_1	0.0959**	0.0433	0.1057***	0.1160**	−0.0505	−0.0862	0.0186	−0.1113
	(0.0432)	(0.0647)	(0.0355)	(0.0577)	(0.0438)	(0.0644)	(0.0332)	(0.0685)
ϕ_2	−0.1099**	−0.0971	−0.0073	−0.0583	−0.1142***	−0.0590	−0.0022	−0.1238**
	(0.0437)	(0.0617)	(0.0345)	(0.0516)	(0.0442)	(0.0611)	(0.0322)	(0.0607)
ω	0.0473***	0.7003***	0.0924**	0.1095	0.0616**	0.7299**	0.0911***	0.0038
	(0.0179)	(0.2063)	(0.0362)	(0.0817)	(0.0286)	(0.3453)	(0.0340)	(0.0067)
α	0.0100	−0.0640	0.0304*	−0.0144	0.0100	0.0319	0.0253*	−0.0356
	(0.0243)	(0.0420)	(0.0181)	(0.0526)	(0.0240)	(0.0733)	(0.0144)	(0.0258)
β	0.8938***	0.5007***	0.8837***	0.7409***	0.9145***	0.3874	0.9027***	0.9787***
	(0.0265)	(0.1451)	(0.0288)	(0.1241)	(0.0263)	(0.2470)	(0.0220)	(0.0207)
γ	0.1399***	0.3206**	0.0720**	0.3448**	0.1052***	0.1871	0.0721***	0.1032**
	(0.0368)	(0.1310)	(0.0303)	(0.1741)	(0.0312)	(0.1343)	(0.0258)	(0.0468)

注） 括弧内の値は標準誤差．
***: 1% 有意，**: 5% 有意，*: 10% 有意．

表 11. AR(2)-GJR-t のパラメータ推定値

	TOPIX				日経 225			
	97/1/7-99/3/4	99/3/5-00/4/14	00/4/17-04/5/20	04/5/21-05/3/31	97/1/7-98/12/10	98/12/11-00/4/14	00/4/17-03/3/27	03/3/28-05/3/31
μ	−0.0650	0.1624**	−0.0424	0.0281	−0.0678	0.1189*	−0.1630***	0.0836*
	(0.0480)	(0.0740)	(0.0445)	(0.0509)	(0.0571)	(0.0607)	(0.0566)	(0.0458)
ϕ_1	0.0832*	0.0517	0.1091***	0.0266	−0.0904*	−0.0481	−0.0234	0.0110
	(0.0437)	(0.0647)	(0.0325)	(0.0716)	(0.0466)	(0.0586)	(0.0379)	(0.0451)
ϕ_2	−0.1047**	−0.0952	−0.0096	−0.0832	−0.1049**	−0.0281	0.0020	−0.0578
	(0.0431)	(0.0600)	(0.0319)	(0.0713)	(0.0458)	(0.0580)	(0.0371)	(0.0445)
ω	0.0450**	0.7392***	0.0895***	0.0103	0.0615*	0.7276	0.0849*	0.0071
	(0.0198)	(0.2501)	(0.0327)	(0.0104)	(0.0362)	(0.4796)	(0.0474)	(0.0116)
α	0.0100	−0.0450	0.0213	0.0100	0.0100	0.0138	0.0180	0.0456**
	(0.0296)	(0.0543)	(0.0173)	(0.0512)	(0.0312)	(0.0783)	(0.0154)	(0.0235)
β	0.8972***	0.4572***	0.8843***	0.9235***	0.9164***	0.4253	0.9065***	0.9446***
	(0.0306)	(0.1705)	(0.0273)	(0.0405)	(0.0347)	(0.3094)	(0.0272)	(0.0235)
γ	0.1368***	0.3277**	0.0931***	0.1044	0.1059***	0.1958	0.0987***	0.0086
	(0.0415)	(0.1526)	(0.0322)	(0.0883)	(0.0361)	(0.1704)	(0.0350)	(0.0320)
DF	12.4688*	9.3347*	14.1886***	99.9999	12.4603*	8.0640**	19.0942*	11.2490**
	(6.5588)	(5.1242)	(5.1054)	(72.528)	(6.6819)	(3.8624)	(11.5020)	(4.9513)

注） 括弧内の値は標準誤差，DF は t 分布の自由度．
***: 1% 有意，**: 5% 有意，*: 10% 有意．

ティ変動のショックに対する持続性は高いまま推移した．ボラティリティパラメータのシフトによって無条件分散が変化してもショックの持続性はあまり変化していないことが 2000 年 4 月 14 日以降のデータについていえる．

2．この分析によって確認構造変化は，平均のパラメータのシフト，残差系列の無条件分散の変化，日次変化率の系列相関の構造変化であったが，これらの構造変化の 3 つの要因が複雑に関係しあっている影響でモデルによって推定する変化点が異なったと思われる．データの構造変化を平均，分散，系列相関に分けて分析することによって明確な構造変化点の解析ができるかもしれない．

3．2004 年 4 月 24 日における日経 225 の銘柄入れ替えによって株価指数の連続性が失われたといわれたが，日経 225 のボラティリティ変動における構造変化は 4 月 14 日と推定される．

この時の構造変化はニューヨークダウの大幅下落によってもたらされたと考えられ，また TOPIX においても同じ時点で構造変化が観測されることから，銘柄入れ換えによる構造変化かどうかはっきりと分からない[14]．しかしながら変化時点での TOPIX の変化と日経 225 の変化の大きな違いは，TOPIX が 2000 年 4 月 17 日以降に有意な 1 次の系列相関が存在するのに対し，日経 225 では，2004 年 4 月 14 日以前まで観測された自己相関がそれ以降 2004 年 4 月 6 日まで確認されなかったことにある．したがって，銘柄入れ替えによる構造変化は収益率の系列相関の構造変化に表れたといえる．

4. t 分布を当てはめた結果から，TOPIX，日経平均とも誤差項の分散の自由度の推定値が各標本期間で大きく異なることが分かった．このことは，誤差項の分布構造が変化していることを表している，この点を考慮すると正規分布の分布構造が全期間に渡って不変とした仮定の是非はどうであろうか．

今後の課題として以下のことが挙げられる．

1. 理論的な課題としては，変化点がある GARCH モデルに対してどのような情報量規準を用いたらよいのか調べる必要がある．様々な情報量規準の漸近特性やシミュレーションによるパフォーマンスの比較等研究する必要があるかも知れない．

2. 今回は GARCH 型モデルによる構造変化を調べたが，構造変化を取り入れた確率的ボラティリティ変動(SV)モデルによる構造変化点の推定も考えられる．この際，SV モデルを用いたら構造変化が推定されるのか，推定されるとしたら GARCH モデルで推定された変化点と同じ時期が推定されるのであろうか．

3. 本論文での分析では，なぜ構造変化が起きたのかについては答えられない．したがって，どんな要因が収益率の平均の値,分散の大きさ，系列相関の構造に変化をもたらすのかについて分析する必要がある．例えば，取引高の構造変化を考慮するため，取引高の情報を入れた GARCH 型モデルの推定や，GARCH-M モデルによる変化点推定等，ボラティリティの定式化を変えたアプローチによる分析が考えられる．

4. ニューヨークやロンドンの株価指数の構造変化を考慮した，多次元のボラティリティ変動モデルによる構造変化の問題について，

5. レジームスイッチングモデルによって当てはめたボラティリティ変動とのパフォーマンスの比較等，これらの問題についは今後の研究課題とする．

（一橋大学経済研究所）

注

1) 本研究は，文部科学省科学研究費(若手研究(B)，課題番号 16730111,「時系列の構造変化点の推定とその漸近最適性」)および日本商品先物取引振興協会から助成を受けた．

2) ボラティリティ変動を定式化するモデルには，GARCH モデルの他にも Stochastic Volatility(SV) モデルがある．SV モデルの詳細や実証研究については三井(1998)や渡部(2000)を参照．

3) IGARCH (Integrated GARCH) モデルの詳細については Engle and Bollerslev (1986) を参照．

4) EGARCH (Exponential GARCH) モデルについての詳細は Nelson (1991) を参照．

5) $\Lambda(u)$ の明示的な表現は紙面の都合上省略されていただく．詳細は Shiohama (2005) を参照のこと．

6) GJR モデルの詳細については Glosten, Jagannathan and Runkle (1993) を参照．

7) 渡部(2000)等参照．

8) 第 t 取引日の株価指数終値を S_t とすると，$R_t=\{\ln(S_t)-\ln(S_{t-1})\}\times100$ である．

9) TOPIX と日経 225 で系列相関の構造に違いが出るのは，両指数の算出方法の違いに原因があるのかもしれない．日経 225 は東京証券取引所一部上場銘柄の代表的な 225 銘柄の平均株価指数であるため，一部の値がさ株の値動きの影響を受けやすいが，TOPIX は東証一部上場全銘柄の時価総額を指数化した加重平均であるため，時価総額の大きな銘柄の影響をうけやすい．株価指数の算出方法や特徴については宮川・花枝(2002)を参照のこと．

10) 誤差項が正規分布を仮定した場合の GARCH モデルの対数尤度は定数項を除くと $\ln L=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\ln(h_t)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2/h_t$ である．

11) Pagan and Schwart (1990) は $\hat{h}_t$ が ε_t^2 の不偏推定量になっているかどうか調べるために $\varepsilon_t^2=a+b\hat{h}_t+v_t$ の回帰問題を考えた．$\hat{h}_t$ が $\hat{\varepsilon}_t$ の不偏推定量であるならば，$a=0, b=1$ である．

12) 変化点数を 1，2 とした場合の予測パフォーマンスについても調べたが変化点数 3 としたモデルのパフォーマンスの方が優れていた．

13) 銘柄入れ替えの実証分析については齊藤・大西(2001)を参照．

14) 日経 225 の値を TOPIX の値で除した指数 NT 倍率で見ると銘柄入れ替えによる明らかなジャンプが確認される．NT 倍率の構造変化の問題は今後の課題としたい．

参考文献

三井秀俊(1998)「日経 225 株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」,『ファイナン

ス研究』No. 24, pp. 23-40.

三井秀俊(2000)「日経225オプション価格のGARCHモデルによる分析」,『現代ファイナンス』No. 7, pp. 57-73.

三井秀俊・渡部敏明(2003)「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」,『日本統計学会誌』第33巻第3号, pp. 307-324.

宮川公男・花枝英樹(2002)『株価指数入門』東洋経済新報社.

齊藤　誠・大西雅彦(2001)日経平均株価の銘柄入れ替えが個別銘柄の流動性に与えた影響について」,『現代ファイナンス』No. 9, pp. 67-82.

渡部敏明(1995)「日本の株式収益率のボラティリティーと系列相関」,『MTECジャーナル』, 第8号, pp. 24-43.

渡部敏明(1998)「ボラティリティ変動モデルの発展と株式収益率データへの応用」,『現代ファイナンス』, No. 3, pp. 15-41.

渡部敏明(1999)「日経225先物価格と現物指数の変動の構造変化」, 建設省道路局　財団法人財政経済協会『マクロ経済の構造変化に関する調査研究』.

渡部敏明(2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明(2003)「日経225オプションデータを使ったGARCHオプション価格付けモデルの検証」,『金融研究』第22巻別冊第2号, pp. 1-34.

Berkes, I., Holva'th, L.and Kokoszka, P. (2005) "Testing for Parameter Constancy in GARCH(p, q) Models," *to appear in Statistics and Probability Letters*.

Bollerslev, T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol. 31, Issue 3, pp. 307-327.

Bollerslev, T., Chou, R. Y.and Kroner, K.F. (1992) "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics*, Vol. 52, Issue 1-2, pp. 5-59.

Braun, J. V., Braun, R. K. and Muller, H.-G. (2000) "Multiple Changepoint Fitting via Quasilikelihood, with Application to DNA Sequence Segmentation," *Biometrika*, Vol. 87, No. 2, pp. 301-314.

Chen, J. and Gputa, A. K. (1997) "Testing and Locating Variance Changepoints with Application to Stock Prices," *Journal of the American Statisticcal Association*, Vol. 92, No. 438, pp. 738-746.

Chu, C. J. (1995) "Detecting Parameter Shift in GARCH Models," *Econometric Reviews*, Vol. 14, No. 2, pp. 241-266.

Diebold, F. X. (1986) "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment," *Econometric Reviews*, Vol. 5, No. 1, pp. 51-56.

Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993) "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, pp. 1779-1801.

Engle, R. F. and Bollerslev, T. (1986) "Modeling the Persistence of Conditional Variances," *Econometric Reviews*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-50, 81-87.

Ibragimov, I. A. and Has'minski, R. Z. (1981) *Statistical Estimation*, Springer, New York.

Inclan, C. and Tiao, G. C. (1994) "Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 89, No. 427, pp. 913-923.

Kim, A., Cho, S. and Lee, S. (2000) "On the Cusum Test for Parameter Changes in GARCH (1, 1) Models," *Communications in Statistics, Theory and Methods*, Vol. 29, No. 2, pp. 445-462.

Lamoureux, C.G. and Lastrapes W.D. (1990) "Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH Model," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 8, Issue 2, pp. 225-234.

Lee, C.-B. (1995) "Estimating the Number of Change Points in a Sequence of Independent Normal Random Variables," *Statistics & Probability Letters*, Vol. 25, Issue 3, pp. 241-248.

Lee, S., Tokutsu, Y. and Maekawa, K. (2004) "The Cusum Test for Parameter Changes in Regression Models with ARCH Errors," *Journal of the Japan Statistical Society*, Vol. 34, No. 2, pp. 173-188.

Lundbergh, S.and Terasvirta, T. (2002) "Evaluating GARCH Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 110, Issue 2, pp. 417-435.

Nelson, D. B. (1990) "Stationarity and Persistence in the GARCH (1, 1) Model," *Econometric Theory*, Vol. 6, Issue 3, pp. 318-334.

Nelson, D. B. (1991) "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, Vol. 59, Issue 2, pp. 347-370.

Ninomiya, Y. (2005) "Information Criterion for Gaussian Change-point Model," *Statistics & Probability Letters*, Vol. 72, Issue 3, pp. 237-247.

Pagan, A. R. and Schwert G. W. (1990) "Alternative Models for Conditional Stock Volatility," *Journal of Econometrics*, Vol. 45, No. 1-2, pp. 267-290.

Shiohama, T (2006) "Asymptotically Efficient Estimation of the Change Point for Semiparametric GARCH Models," Institute of Economic Research, Hitotsubashi University Discussion Paper Series, A-471.

Yao, Q. (1993) "Boundary-crossing Probabilities of Some Random Fields Related to Likelihood Ratio Tests for Epidemic Allternatives," *Journal of Applied Probability*, Vol. 30, No. 1, pp. 52-65.