経済研究
Vol. 44, No. 1, Jan. 1993

株式投資収益率の条件付分散について

——パラメトリックモデルの有効性の検討——*

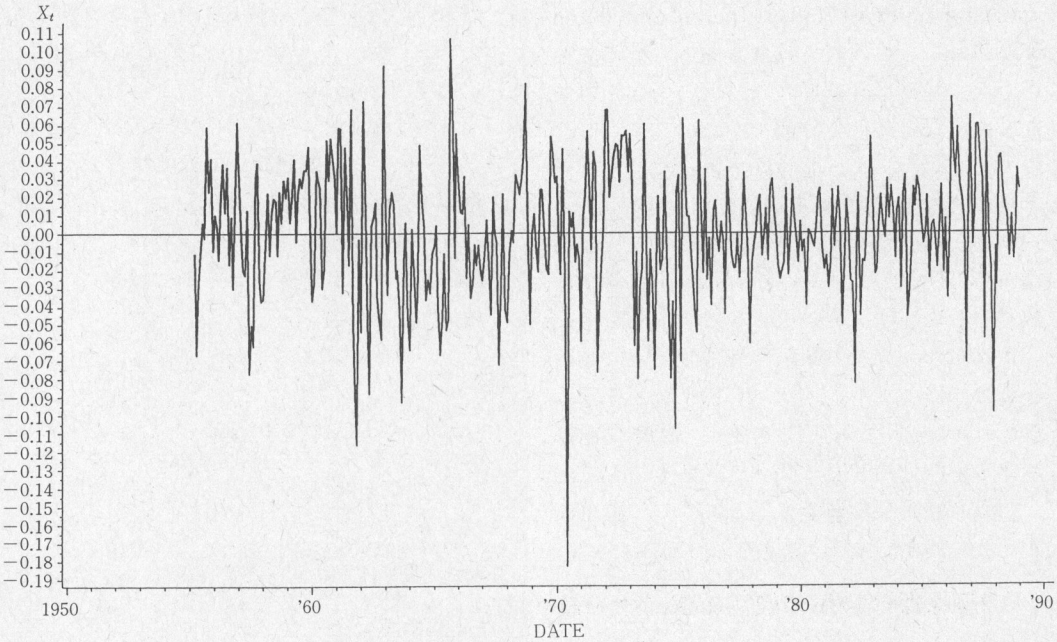
竹内惠行・小暮厚之

1. はじめに

ファイナンス理論によると，株価や投資収益率など金融市場の諸変量の決定について，その分散は重要な役割を担っている．これらの分散は経時的には一定であるとしても，条件付の下で考えると変化しているものと考えられる．例えば図1は1955年1月から1988年12月までの日経225種平均株価指数の月次収益率をプロットしたものであるが，これを見ると大きく乱高下する時期(1961-63, 1970-76, 1986-89の各年)と比較的安定した変動を示す時期がそれぞれかたまって観測されている．このような条件付分散の変動を扱うモデルとして，Engle (1982)が提唱したARCH(Autoregressive conditional heteroscedasticity)モデルやTaylor(1986)の積モデルなどの条件付分散変動モデルが提案されている．

近年，金融市場の実証分析でこれらの条件付分散変動モデルを用いられることが多くなってきている．外国為替市場分析では，例えば

図1　株式投資収益率：月次データ　(55.1-88.12)



* 本稿の一部は財務論ワークショップ(1989年11月南山大学)ならびに日本統計学会(1990年7月北海道大学)で報告されたものである．刈屋武昭，佃良彦，三浦良造各教授を始め，学会参加者から有益なコメントを頂いたことに感謝する．なお本稿の基礎となる研究は文部省科学研究費補助金No. 02730011(竹内)，No. 02730010(小暮)の助成を受けた．

Diebold(1988)，刈屋・松江(1988)等，株式市場分析では，芹田(1989)，刈屋・佃・丸(1989)，Taylor(1986)といった先行研究がある．しかし，これらの分析ではモデルから推定された条件付分散の変動についての考察は行われているものの，適用している条件付分散変動モデルそのものの妥当性や評価という点からの吟味は，殆ど行われていない．これらのモデルは経済理論やファイナンス理論での裏付けがあまりなされていないという点では“アドホック”なモデルである．元々のモデルが現実を近似していなければ，いかに統計的に精緻であろうと，導出された結果は現実からかけ離れたものである危険性がある．

本稿の目的は，特定のモデルに依存しない条件付分散のノンパラメトリックな推定法を用いてARCHモデル等のパラメトリックモデルの妥当性を考察することである．様々なノンパラメトリック法が考えられるが，本稿では，Pagan and Schwert(1990)，Pagan and Ullah(1988)等によって検討されたカーネル推定法を採用した．我々は，前期の収益率の大きさを条件とした今期の条件付分散を中心にして，これらのモデルがデータと整合的であるかどうかを考える．まず次節で特定のモデルを用いず，“ありのまま”の条件付分散の動きをみる．3節ではARCHとテイラーモデルにおいて条件付分散がどのようにモデル化されているかを概観し，これらのモデルでは条件付分散は常に対称になるようにモデル化されてしまうことを見る．4節ではカーネル法を用いて日本の投資収益率における条件付分散をノンパラメトリックに推定し，その性質を考察することにする．最後に5節では，結論と将来の課題を述べる．

2. わが国株式市場の投資収益率の条件付分散

収益率に関する最も簡単でしかも最も興味深い条件付分散は，前期の収益率 X_{t-1} の水準 x が与えられているときの今期の収益率 X_t の条件付分散

$$(2.1)\quad \sigma^2(x) \equiv E(X_t^2 | X_{t-1}=x) - \{E(X_t | X_{t-1}=x)\}^2$$

であろう．本節では，特定のモデルを前提とせずに，日本の株式市場におけるこの条件付分散の“ありのまま”の動きをナイーブな形で見る(より精緻な方法による条件付分散の推定は4節で述べる)．我々が用いたデータは図1に示した日経225種平均株価の月次収益率で，期間は1955年1月から1988年12月に至る408カ月である．また，ダミー変数を用いて，有り得る「月次効果」の影響を取り除いたデータを用いる．すなわち，X_t は

$$(2.2)\quad R_t = \sum_{i=1}^{12} z_{it}\beta_i + X_t, \quad t=1,\cdots,T$$

によって定義される．但し $R_t \equiv \log P_t - \log P_{t-1}$ であり，P_t は t 期の株価を示す．また z_{it} は月次効果を除去するためのダミー変数であり，t 期が i 月ならば1，さもなければ0をとる．β_i は「月次効果」を示す未知のパラメータである．

いま $\sigma^2(x)$ の性質を見るために，データをその値によって次のようにグルーピングすることを考えよう．まずデータの動く範囲を幅が d (>0) である区間

$$C_k \equiv [kd, (k+1)d) \qquad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

に分ける．ここで連続して観測されたデータのペア (x_t, x_{t-1}) を x_{t-1} に関して上記の区間でグルーピングする．そして，グループ内で x_t の標本分散 S_k^2 を計算する．すなわち，

$$S_k^2 = 1/T_k \sum_{t=2}^{T} (X_t - m_k)^2 I\{X_{t-1} \in C_k\}$$

但し，

$$T_k = \sum_{t=2}^{T} I\{X_{t-1} \in C_k\},$$

$$m_k = 1/T_k \sum_{t=2}^{T} X_t I\{X_{t-1} \in C_k\},$$

また $I\{\cdot\}$ は指示関数である．

S_k^2 は x_{t-1} が $[kd, (k+1)d)$ にあることを条件とした時の条件付分散

$$E(X_t^2 | kd \leqq X_{t-1} < (k+1)d) - \{E(X_t | kd \leqq X_{t-1} < (k+1)d)\}^2$$

の推定量であり，d が十分小さければ $\sigma^2(x)$ の大まかな動きを示すであろう．d を0.05とした時の結果を表1に示した．これより次の事実が明かであろう．

表1　条件付標本分散(S_k^2)　$d=0.05$ の場合

x_{t-1} の区間	$[-0.1, -0.05)$	$[-0.05, 0)$	$[0, 0.05)$	$[0.05, 0.1)$
x_tの標本分散	$(0.045)^2$	$(0.038)^2$	$(0.030)^2$	$(0.027)^2$

(1)前期の収益率の大きさによって条件付分散は変動する．

(2)変動には明白な傾向が見られる．それは，前期の収益率が大きいほど，今期の収益率の条件付分散は小さくなるという傾向である．

(収益率は株価の変化率であるから，これは株式市場の上昇期には次期の収益率のリスク(条件付分散)が小さくなり，逆に下降期にはリスクが大きくなるという「経験的真理」に符号する．)

少なくとも，以上の事実のひとつの結論として，条件付分散は今期の収益率の絶対水準に依存するだけでなく，その符号にも依存するという「条件付分散の非対称性」

(2.3)　$\sigma^2(x) \neq \sigma^2(-x)$

は主張できるであろう．そこで，この条件付分散の非対称性という投資収益率の特徴が，ARCH 及びテイラーモデルと整合的であるか否かの検討を次節以下で行うことにしよう．

3.　条件付分散変動モデルの対称性

本節では ARCH 及びテイラーモデルにおいて条件付分散がどのようにモデル化されているか概観し，これらのモデルでは条件付分散は常に対称になるようにモデル化されてしまうことを見る．

t 期の投資収益率 X_t の条件付分散 V_t^2 が変動する最も簡単なモデルでは，X_t を

$$X_t - \mu = V_t U_t$$

という積の形に書くことができる．但し

(仮定1)　各 t に対して $V_t > 0$

(仮定2)　$\{U_t\}$ は規準化正規定常プロセス

(仮定3)　各 t に対して U_t と V_t とは独立

(仮定4)　$\mu = E(X_t)$　(以下簡単化のために $\mu=0$ と仮定する)

である．このモデルは ARCH 及びテイラーの両モデルを含む基本型である．V_t が v であるときの X_t の条件付分散は

$$E(X_t^2 | V_t = v) - \{E(X_t | V_t = v)\}^2$$
$$= E((V_t U_t)^2 | V_t = v) - \{E(V_t U_t | V_t = v)\}^2$$
$$= v^2$$

となる．ARCH モデルとテイラーモデルのモデルの相違は，どのような状況を想定して条件付分散 V_t^2 をモデル化するかの差異から生ずる．Engle(1982)の ARCH モデルは X_t の条件付分散は過去の収益率に依存して決定されると考える．具体的には V_t^2 について，過去の収益率の2乗の線形結合で表されるパラメトリックな構造：

(仮定5A)　$V_t^2 = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + a_2 X_{t-2}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2$

を仮定する．しかしこの構造は自己回帰的な行動を仮定したものであり，経済理論から導出されたものでない，いわゆる“アドホック”なモデルである．このように条件付分散を特定化することのひとつの帰結として持つ ARCH モデルの大きな制約は，条件付分散が過去の収益率ベクトル$(X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-p})$について(正負)対称であるという性質である．これは前節で見た，日本の株式市場における条件付分散の非対称性という経験的事実と非整合的であり，ARCH モデルに基づく実証分析の妥当性に一定の疑問を投げかけるものである．

ARCH モデルとは対照的に，条件付分散の変動は過去の収益率に依存しないと考えるのがテイラーモデルである．このモデルでは V_t は今期における市場の様々な情報によって X_t と同時に決定されると考えられる．これを保証する仮定として，次の仮定をおく．

(仮定5T)　すべての t 及び t' に対して V_t と $U_{t'}$ とは独立である[1]．

しかしながら以下の命題より，このテイラーモデルによっても非対称性を説明することは不可能である．

命題　テイラーモデルでは常に式(2.3)が成立しない．

即ち，全ての x に対して $\sigma^2(x) \neq \sigma^2(-x)$ である．

(証明)　命題を証明するためには，

(3.1) $E(X_t^2|X_{t-1}=x)$
$= E(X_t^2|X_{t-1}=-x)$

(3.2) $(E(X_t|X_{t-1}=x))^2$
$= (E(X_t|X_{t-1}=-x))^2$

を示せばよい．まず(3.1)を示す．(X_t^2, X_{t-1})と$(X_t^2, -X_{t-1})$の同時分布が同一であることを導けば十分である．a, bを任意の実数とするとき，(X_t^2, X_{t-1})の同時分布は

$$\begin{aligned}
&P(X_t^2 \leqq a, X_{t-1} \leqq b)\\
&= P(V_t^2U_t^2 \leqq a, V_{t-1}U_{t-1} \leqq b)\\
&= \int P(U_t^2 \leqq a/v_t^2, U_{t-1} \leqq b/v_{t-1})\\
&\qquad g(v_t^2, v_{t-1})\,dv_t^2dv_{t-1}\\
&\quad (\{U_t\}\text{は}\{V_t\}\text{と独立であるから})\\
&= \int P(U_t^2 \leqq a/v_t^2, -U_{t-1} \leqq b/V_{t-1})\\
&\qquad g(v_t^2, v_{t-1})\,dv_t^2dv_{t-1}\\
&\quad ((U_t^2, U_{t-1})\text{と}(U_t^2, -U_{t-1})\text{とは}\\
&\qquad \text{同一分布だから})\\
&= P(X_t^2 \leqq a, -X_{t-1} \leqq b)
\end{aligned}$$

と変形され，$(X_t^2, -X_{t-1})$の同時分布と同一である．但し，gはv_t^2とv_{t-1}の同時密度である．

続いて(3.2)を示す．(X_t, X_{t-1})と$(-X_t, -X_{t-1})$とは同一の同時分布を持つから

$$\begin{aligned}
E(X_t|X_{t-1}=x) &= E(-X_t|-X_{t-1}=x)\\
&= -E(X_t|X_{t-1}=-x)
\end{aligned}$$

となる．両辺を2乗して(3.2)を得る．■

以上のようにARCHモデルでもTaylorモデルでも日本の株式市場のもつ非対称性の現象を記述することはできない[2]．もちろん非対称性を説明できるようにこれらのパラメトリックモデルを修正することは可能であり，その1つとしてEGARCHモデル(Nelson, 1991)が提案されている．しかしながら，モデルが複雑になるだけでなく，モデルの定式化の誤り(specification error)からも逃れることはできない．そこで次節で特定のモデルに依存しないノンパラメトリック法による条件付分散の推定問題を扱うことにしよう．

4. ノンパラメトリック法による条件付分散の推定

本節ではカーネル密度推定法による条件付分散の推定問題について考察するとともに，株式投資収益率のデータにこの手法を適用する際の理論的な問題点について概観する．

4.1 カーネル法：理論的準備

条件付分散を推定するための手法として，モデルに依存しないノンパラメトリック密度推定法を用いるが，その前に以下でこの手法が我々のケースにどう適用できるかを簡単に見ることにしよう．

(2.1)で定義したように条件付分散$\sigma^2(x)$は条件付期待値に他ならない．したがって，確率変数のペア(Y, Z)を考えると，一方の確率変数Z(この場合ZはX_{t-1})を所与とした時の他方の確率変数Y(この場合$Y=X_t^2$あるいは$Y=X_t$)の条件付期待値$E(Y|Z)$を求めればよい．(Y, Z)の同時密度関数を$f(y, z)$とすると，

(4.1) $E(Y|Z=z)$
$= (\int yf(y, z)\,dy)/(\int f(y, z)\,dy)$

であるから，結局同時密度$f(\cdot)$を推定できれば条件付期待値が求まることになる．モデル(分布)を仮定しないで，データのみから同時密度$f(\cdot)$を推定する方法として，Rosenblatt (1956)に始まる一連のノンパラメトリック密度関数推定法を用いる．この手法の利点は，データの生成モデルが非常に複雑な非線型構造を持っている場合にも適用できるだけでなく，比較的“良い”推定量を得られる点にある．従って，非線型構造の存在が想定される金融市場の分析方法として有望であり，Diebold and Nason (1990)，Meese and Rose(1990)等，外国為替市場分析を中心にいくつかの研究が行われている．

ノンパラメトリック密度関数推定法には，ヒストグラム法，カーネル法，級数展開法，nearest neighborhood法など幾つかのタイプがある[3]．最も基本的なものはヒストグラムであるが，他の推定法の方がより高い推定効率を持っていることは良く知られている．本論文では，もっとも広範に用いられているカーネル法によって(X_t^2, X_{t-1})と(X_t, X_{t-1})の2つの同時密度関数をノンパラメトリックに推定する．このカーネル推定量を(4.1)に代入することによって，

アドホックなモデルを前提とせずに $\sigma^2(x)$ を推定する．$X_{t-1}=x$，$X_t{}^2=y$ における X_{t-1} と $X_t{}^2$ の同時密度関数のカーネル推定量は

(4.2)　$$f_T(y,x) = \frac{1}{T-1}\sum_{j=2}^{T}\{K((y-X_j{}^2)/h)h\}\{K((x-X_{j-1})/h)/h\}$$

である．ここで $K(\cdot)$ は各観測値を“平滑する”関数であり，カーネルと呼ばれる．また h はカーネルによる平滑化の程度を調節する“band width”である．実際のデータ解析では，K 及び h はデータ解析者によって指定されなければならない[4]．(2.1)の右辺第1項は

$$\int yf_T(y,x)\,dy/(\int f_T(y,x)\,dy) = \frac{(1/(T-1))\sum_{j=2}^{T}X_j{}^2K((x-X_{j-1})/h)/h}{(1/(T-1))\sum_{j=2}^{T}K((x-X_{j-1})/h)/h} = \frac{\sum_{j=2}^{T}X_j{}^2K((x-X_{j-1})/h)}{\sum_{j=2}^{T}K((x-X_{j-1})/h)}$$

によって推定される．同様にして右辺の第2項を推定すると，カーネル法による $\sigma^2(x)$ の推定量

$$\hat{\sigma}^2(x) = \frac{\sum_{j=2}^{T}X_j{}^2K((x-X_{j-1})/h)}{\sum_{j=2}^{T}K((x-X_{j-1})/h)} - \left[\frac{\sum_{j=2}^{T}X_jK((x-X_{j-1})/h)}{\sum_{j=2}^{T}K((x-X_{j-1})/h)}\right]^2$$

を得る．

4.2　株式投資収益率における分布上の仮定

カーネル法推定のために我々は株式投資収益率 $\{X_j\}$ に関して以下の仮定をおく．

(A1)　$\{X_j\}$ は強定常である．

(A2)　$\{X_j\}$ は strong-mixing である．

仮定 A1 を課すことは標本分散の変動をもって非定常であると主張している人々から異論があるかも知れない．だが，そのような分散の動きは条件付分散の変動として捉え，無条件分散の変動と見るべきではない，というのが我々の立場である．次に仮定 A2 は2つの時点における投資収益率が，観測される期間が離れれば離れるほど互いの影響力が小さくなり，独立性を増していくという標準的な mixing condition である．この仮定 A2 は normal, double-exponential, Cauchy の各分布に従う AR(1) プロセス(Gastwirth and Rubun, 1975)や，より一般的な線形プロセスの中で一定の条件を満たすもの(Withers, 1981)において満たされていることが知られている．仮定 A1 および A2 の下で，本来 i. i. d.(独立同一分布)プロセスのために開発されたカーネル推定量が有効であることは Robinson(1983)，Bierens(1983)によって示されている．

実際問題として，投資収益率がこの2つの仮定から大きく逸脱してしまうことはあまりないものと考えられる．というのも，対数株価がランダムウォークに近い動きを示すことが観測されているためで，その1回階差たる投資収益率は当然定常性を満たしている筈であるからであ

図2　カーネル推定量：月次データ　(55.1-88.12)

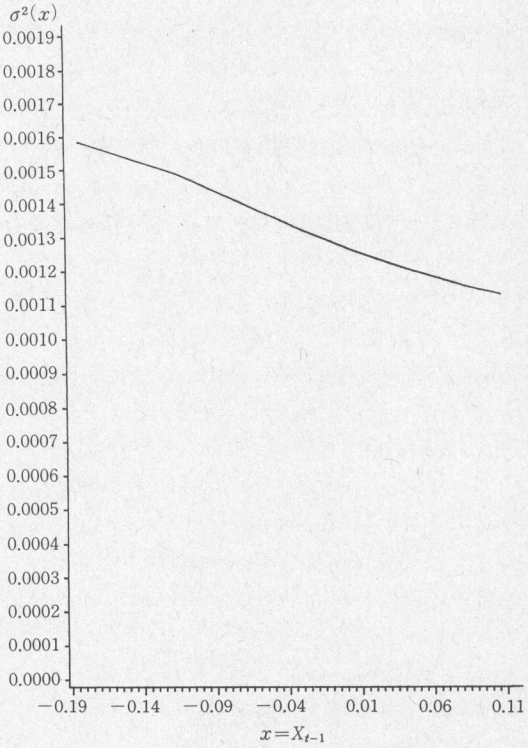
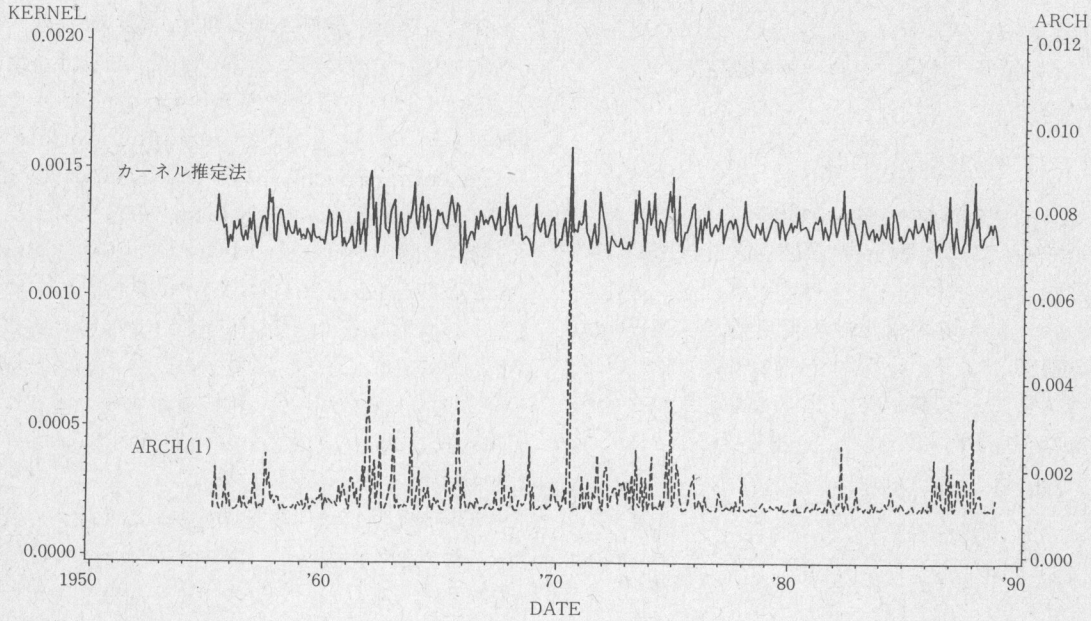


図3 カーネル推定量対 ARCH(1)



る．図1の株式投資収益率系列について自己相関を計算してみたところ，1次の系列相関は0.28でかつ5%有意であったが，2次以上の系列相関は20次位までとっても殆ど認められなかった．

4.3 日本の投資収益率の条件付分散

さて上で示したノンパラメトリック法を用いて日本の投資収益率における条件付分散を推定し，その性質を考察することにしよう．我々が用いたデータは2節で示した日経225種平均株価の月次収益率で，期間は1955年1月から1988年12月に至る408カ月である．またカーネルはカーネル法推定でしばしば用いられるnormal kernel

$$K(w) = (1/\sqrt{2\pi})\exp(-w^2/2)$$

を採用し，band width h は

$$h = 1.06(\text{標本標準偏差})\,T^{-1/5}$$

と設定した．この h は，もしも観測値が正規分布に従うならば平均積分平方誤差

$$\text{MISE} = E\int(\hat{f}(x)-f(x))^2dx$$

を漸近的に最小化する値である．

図2は各観測値 $x=X_{t-1}$ における $\hat{\sigma}^2(x)$ の値をプロットしたグラフである．これより $\hat{\sigma}^2(x)$ は，ほぼ滑らかな右下がりの曲線によって表される関係にあることが窺える．これは，前期の収益率が負の程度が大きいほど条件付分散が大きくなり，正の程度が高いほど条件付分散が小さくなるということを意味する．このことは前期の収益率が高いほど今期の条件付分散が低くなるという表1の結果をより明白に示している．

標本範囲における $\hat{\sigma}^2(x)$ の動きを見ると X_{t-1} が最小である $-.1830$ のとき $\hat{\sigma}^2(x)$ は最大値$(.03981)^2$をとり，X_{t-1} が最大である.1069のとき最小値$(.03357)^2$をとる．条件付分散の単調減少の程度をみるために，条件付標準偏差のレインジ/中点比率[5]をとると，我々のカーネル法推定では17%の減少となっている．それに対して，表1で示した計算結果からは50%の減少が認められるから，この点は異なっていることが分かる．つまり，

(1) 前期の収益率に対する今期の収益率の条件付分散の単調減少性が明白にでた．

(2) 標準偏差の減少の程度は，実際より低めに推定された．

図4　カーネル推定量：月次データ　(55.1-73.12)

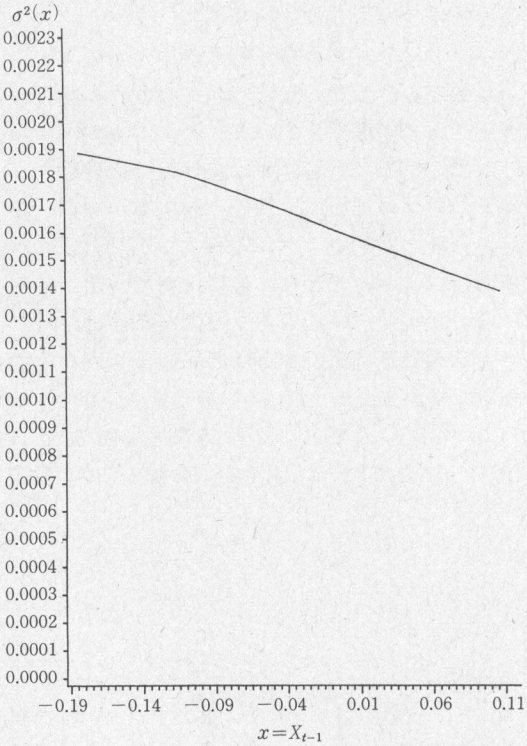
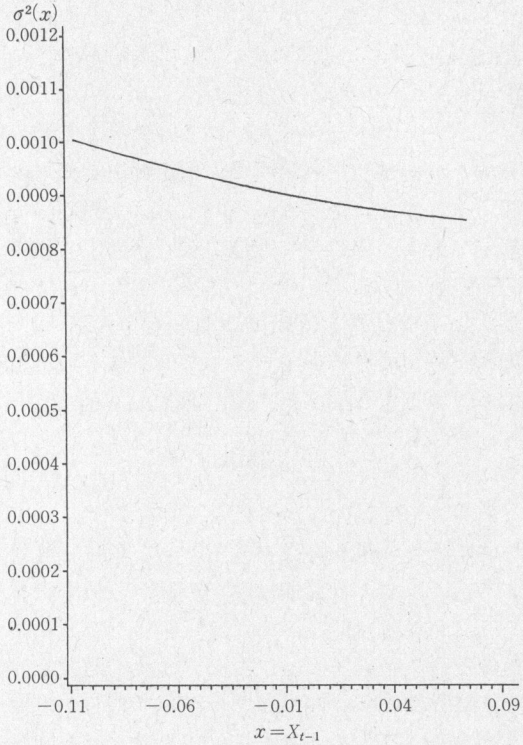


図5　カーネル推定量：月次データ　(74.1-88.12)



であることが確認出来よう．また標準偏差の絶対水準を比較すると，カーネル法推定では1～2割小さく推定されていることが分かる．

カーネル法推定との比較のために，(2.1)式のモデルに対応するARCH(1)モデルも推定した．推定値は以下のとおりである．

$$V_t^2 = .001 + .220 X_{t-1}^2$$

その結果，ARCHによる条件付分散は図3に示したように，カーネル法に比べて非常に振幅が激しいものの，振幅の小さいところでは，カーネル法に近い値をとっていることが分かる．このことはARCH(1)の条件付分散が，前期の収益率の2次関数としてモデル化されることから容易に説明できよう．だが，ARCHのこの性質は，前期の収益率が異常に大きな(小さな)値をとった時に条件付分散が非常に大きくなってしまい，欠点にもなりうる[6]．そこで推定したARCHモデルの妥当性をみるために，我々はARCHテストとして，Breusch-Paganタイプの検定を行った．帰無仮説を条件付分散が一定，対立仮説をARCHとしたこの検定において，我々は帰無仮説を1%の有意水準でも棄却することはできなかった．従って我々の扱った月次株式収益率のケースでは，その条件付分散としてARCH推定は過大であり，適当でないといえよう．

次に，石油ショックによる株式市場構造の変化を考慮している先行研究に従って1955年から1988年までの期間を分割して分析した．期間は第1次石油ショックの影響を考慮して

1955年1月～1973年12月(228カ月)

1974年1月～1988年12月(180カ月)

の2期間に分割した．推定した結果をそれぞれ図4, 5に示した．これらの図からは，全期間とほぼ同様な条件付分散の単調減少性が認められる．しかしその減少の程度は，石油ショック後やや小さくなっている．

以上の結果からテイラーモデルでもARCHモデルによっても説明できない条件付分散の特徴が再確認されたことになる．より厳密な論証

については統計的検定の枠組みを必要とするであろうが，少なくともテイラーモデルやARCHモデルが現実のデータと非整合的な面を持つ可能性は明かであろう．

しかしノンパラメトリック法の欠点として，データがあまりない箇所での推定効率が極端に低下することが指摘されている．図2の両端の部分が表1と乖離して近似が悪い原因は，まさにその典型であると考えられる．したがって，必要以上に結果を信頼することは，ARCHモデルの時と同様に現実をミスリードする可能性があることに注意する必要がある．

5. 結論

前節までの議論は統計的なものに終始したが，最後に我々の得た結果の経済学的な意味を検討することにしよう．通常の(無条件)分散の代わりに，条件付分散(条件付標準偏差)をリスクの指標として定義すると，我々の得た条件付分散の非対称性は1つに投資家の心理行動の非対称性をも表していると考えられる．我々は前期の収益率だけでなく，前期の収益率の変化と条件付分散の関係についても調べてみたが，図2同様に負の相関が認められた．このことは投資家の心理的リスクが収益の正負に対して対称でない可能性があることを示唆している．

我々の得た結果の別な解釈は，financial leverage効果の存在である．これは，Christie (1982)等が示したように，株式投資収益率の低下は株式の市場価値の低下を招き，さらには財務レベレッジ(負債比率)を上昇させる働きがあることに注目したものである．このようなメカニズムによって，株式投資収益率の低下が以前よりも不安定な企業財務構造を生じさせ，それが故に分散が増大するのである．この議論は我々の結果を完全には説明するものではないが，この流れを汲むモデル，例えばCox and Rubinstein(1985)のCEVモデル(分散弾力性一定モデル)の現実的な妥当性を支持する論拠とすることはできよう．

この論文で提示した経験的証拠は，条件付分散の非対称性を明白にした．条件付分散を説明するモデルとしてARCHやテイラーモデルを盲目的に使うことは危険である．ノンパラメトリック法はデータの持つ特徴がモデルによってねじ曲げられることはないので，我々の結果は現実をある程度捉えていると考えても問題はないと思われる．本論文では条件付分散変動モデルとの対比のために，前期の収益率が今期の条件付分散の変動をいかに説明するかを考えたが，前期の収益率の代わりに他の説明変数を用いることにとって，いろいろな要因が条件付分散に与える影響を特定のモデルを用いることなくできるであろう．

(論文受付日1991年1月16日・採用決定日1991年10月9日，大阪大学経済学部・千葉大学法経学部)

注

1) この条件によって V_t と $X_{t-p}(p=1, 2, \cdots)$ が無相関となる．しかし，それらは独立ではない．

2) ARCH以外の条件付分散不均一(conditional heteroscedasticity)モデルとしては，Bollerslev (1986)のGARCHが提案されている．しかしGARCHモデルはそのARCH表現が可能であるので，ARCHモデル同様に非対称性を説明できないことになる．

3) ノンパラメトリック密度関数推定法のサーベイについては，例えばSilverman(1986, Chap. 2)を参照のこと．

4) カーネル $K(x)$ は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)\,dx = 0$$

を満たす任意の関数である．実際には，Normal (Gaussian) kernelやEpanechnikov kernelなどがよく用いられる．

5) $(\max-\min)/\{(\min+\max)/2\}$ として計算．

6) この欠点を解決した手法として，Friedman and Laibson(1989)のMARCHモデルがある．

参考文献

Bierens, H. J., "Uniform Consistency of Kernel Estimators of a Regression Function under Generalized Conditions," *J.A.S.A.*, Vol. 77(1983), pp. 699-707.

Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol. 31(1986), pp. 307-328.

Cox, J. C. and M. Rubinstein, *Options Markets*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985.

Christie, A. A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances," *Journal of Financial*

Economics, Vol. 10(1982), pp. 407-432.

Diebold, F. X. *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 303), Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1988.

Diebold, F. X. and J. A. Nason, "Nonparametric Exchange Rate Prediction ?," *Journal of International Economics*, Vol. 28(1990), pp. 315-332.

Engle, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, Vol. 50 (1982), pp. 987-1007.

Engle, R. F. and T. Bollerslev, "Modelling the Presence of Conditional Variances," *Econometric Reviews*, Vol. 5(1986), pp. 1-50.

Friedman, B. M. and D. I. Laibson, "Economic Implications of Extraordinary Movements in Stock Prices," *Brookings Papers on Economic Activity*, 2 : 1989(1989), pp. 137-189.

Gastwirth, J. L. and Rubin, H. R., "The Asymptotic Distribution Theory of the Empirical CDF for Mixing Stochastic Processes," *Ann. Statist*., Vol. 3(1975), pp. 809-824.

Ibragimov, I. A. and Linnik, Y. V., *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.

刈屋武昭・松江由美子,「非線形分散変動モデルによる日次・週次為替レート変動分析」,『金融研究』, 第7巻第2号(1988年), pp. 101-146.

刈屋武昭・佃良彦・丸淳子,『日本の株価変動』, 東洋経済新報社, 1989年.

Meese, R. A. and A. K. Rose, "Nonlinear, Nonparametric, Nonessential Exchange Rate Estimation," *AEA papers and proceedings*, Vol. 80(1990), pp.192-202.

Nelson, D. B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach," *Econometrica*, Vol. 59(1991), pp. 347-370.

Pagan, A. and G. W. Schwert, "Alternative Models for Conditional Stock Volatility," *Journal of Econometrics*, Vol. 45(1990), pp. 267-290.

Pagan, A. and A. Ullah, "The Econometric Analysis of Models with Risk Terms," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 3(1988), pp. 87-105.

Revesz, R., "Density Estimation," in P. R. Krishnaiah and P. K. Sen(eds.), *Handbook of Statistics* Vol. 4, (Amsterdam : North-Holland, 1984), pp. 531-549.

Robinson, P. M., "Nonparametric Estimators for Time Series," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 4(1983), pp. 185-207.

——, "Nonparametric Methods in Specification," *Economic Journal*(*Supplement*), Vol. 96(1986), pp. 131-141.

Rosenblatt, M., "Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function," *Ann. Math. Statist*., Vol. 27(1956), pp. 832-837.

芹田敏夫,「株式収益率の条件付き分散とリスクプレミアム」,『証券経済』, No. 168(1989年), pp. 21-38.

Silverman, B. W., *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, London : Chapman and Hall, 1986.

Taylor, S., *Modelling Financial Time Series*, New York : John Wiley & Sons, 1986.

Withers, C. S., "Conditions for Linear Processes to Be Strong Mixing," *Z. Wahrscheinlichkeistheorie verw. Gebiete*, Vol. 57(1981), pp. 477-480.