経済研究
Vol. 58, No. 4, Oct. 2007

多変量因子確率的ボラティリティ変動モデル

大 森 裕 浩

本稿では危険資産の多変量時系列のモデルとして近年研究の進められている幾つかの多変量確率的ボラティリティ変動モデルについて取り上げ，拡張を行ったモデルについてマルコフ連鎖モンテカルロ法による推定方法を提案する．特に株式市場における多数の株式収益率のモデルでは，多変量確率的ボラティリティ変動モデルに共通因子が潜在変数として導入されているため，パラメータや潜在変数の個数が多くなり，最尤法による推定方法は困難である．また，この拡張されたモデルでは，株式市場で観察されるボラティリティの非対称性を未だ考慮していない．このため本稿ではベイズ・アプローチをとり，多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルを非対称性を含むモデルに拡張し，効率的なマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた推定方法を提案する．

1. はじめに

確率的ボラティリティ変動モデル(stochastic volatility model)は，危険資産の収益率のモデルとして広く使われており，GARCH(generalized autoregressive heteroschedasticity)モデル等のボラティリティの変動を記述するモデルと比較してあてはまりのよいことが知られている．これまでは1変量の時系列のための確率的ボラティリティ変動モデルの分析が研究の中心であったが，近年は多変量時系列のための確率的ボラティリティ変動モデルの研究が進んでいる．

1変量の確率的ボラティリティ変動モデルでは，y_t を t 時点 ($t=1, \ldots, n$) の収益率とするとき，

$$y_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$
$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n-1,$$
$$h_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right), \quad |\phi| < 1,$$
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$$

と定式化される．ここで h_t はボラティリティの変動を表す潜在変数であり，平均を μ とする定常な1階の自己回帰過程に従うと仮定される．また収益率 y_t とボラティリティ変数 h_{t+1} は相関を持つとし，その相関係数 ρ が負であるとき非対称性があるという．株式市場においては t 時点の収益率が低下した場合，$t+1$ 時点のボラティリティが上昇するという現象が広く観測されており，これを非対称性あるいはレバレッジ効果と呼んでいる．

確率的ボラティリティ変動モデルでは，最尤法を行うためには潜在変数 h_t に関してすべて積分して尤度を求める必要があるが，h_t の個数が n 個と多いために数値積分では正確な尤度を求めることは困難である．したがってモンテカルロ積分により尤度を求めて最尤法を行う方法やベイズ・アプローチに基づいてマルコフ連鎖モンテカルロ法による推定を行う方法がとられている．モンテカルロ積分を用いる方法では重点サンプリング法による方法が Danielsson (1994) や Liesenfeld and Richard (2003) で紹介されている．

一方，マルコフ連鎖モンテカルロ法では，まず非対称性の無いモデル ($\rho=0$) について Jacquier, Polson and Rossi (1994) が，潜在変数 h_t を1つずつサンプリングするという single move sampler を提案した．しかしサンプリングの効率性が非常に悪かったため，複数の潜在変数 h_t をまとめてサンプリングする multi-move sampler あるいは block sampler という

方法がShephard and Pitt(1997)及びWatanabe and Omori(2004)により提案されている[1]．また，異なるアプローチとしてKim, Shephard and Chib(1998)は，y_t の観測方程式を二乗して両辺の対数をとり

$$\log y_t^2 = h_t + \log \varepsilon_t^2,$$

と観測方程式を線形化し，更に誤差項 $\log \varepsilon_t^2$ を混合正規分布で近似した．近似を伴うものの近似精度は高く，Kim, Shephard and Chib(1998)は変換された線形ガウス状態空間を用いることで非常に効率的な推定方法を実現しており，mixture samplerと呼ばれている．これに対して非対称性がある場合 ($\rho \neq 0$) には，Jacquier, Polson and Rossi(2004)がsingle move samplerを[2]，Omori and Watanabe(2007)はblock samplerを拡張している．また，Omori, Chib, Shephard and Nakajima(2007)はmixture samplerを拡張し，single move samplerに比較してその効率性の高さを実証している．

これらの1変量確率的ボラティリティ変動モデルは次のように p 変量時系列 $\boldsymbol{y}_t = (y_{1t}, \ldots, y_{pt})'$ に拡張することができる．

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t,$$
$$\boldsymbol{V}_t^{1/2} = \mathrm{diag}(\exp(h_{1t}/2), \ldots, \exp(h_{pt}/2)),$$
$$\boldsymbol{h}_{t+1} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t,$$
$$\boldsymbol{h}_1 \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0),$$
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{2p}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} & \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} & \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta} \end{pmatrix},$$

ただし，ボラティリティの変動を表す潜在変数は p 変量ベクトル $\boldsymbol{h}_t$ で平均は $\boldsymbol{\mu}$ である．$\boldsymbol{\Phi}$ は $p \times p$ 係数行列，$(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\eta}_t')'$ は $2p$ 変量正規分布に従い，$\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} = \boldsymbol{I}$ である．基本的なモデルでは

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta} = \mathrm{diag}(\sigma_{1,\eta\eta}, \ldots, \sigma_{p,\eta\eta}), \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} = \boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_p)$$

と仮定される．基本的な多変量確率的ボラティリティ変動モデルは最初にHarvey, Ruiz and Shephard(1994)によって提案され，パラメータの推定には擬似最尤法が用いられた．その後，Danielsson(1998), Smith and Pitts(2006), Chan, Kohn and Kirby(2006)等により，重点サンプリングを用いたモンテカルロ積分に基づく最尤法や，マルコフ連鎖モンテカルロ法による推定方法が提案されている．またAsai and McAleer(2006)は非対称性を考慮して $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} = \mathrm{diag}(\rho_1\sigma_{1,\eta\eta}, \ldots, \rho_p\sigma_{p,\eta\eta})$ と仮定してHarvey, Ruiz and Shephard(1994)と同様な擬似最尤法による推定を行っている[3]．

この基本的な多変量確率的ボラティリティ変動モデルは，以下のように $q \times 1$ 共通因子ベクトル $\boldsymbol{f}_t (q < p)$ を取り入れた拡張が行われ，多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルと呼ばれている．

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

ただし $\boldsymbol{B}$ は $p \times q$ 係数行列である．Pitt and Shephard(1999)は因子ベクトル $\boldsymbol{f}_t$ に多変量確率的ボラティリティ変動モデルを仮定して

$$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{D}_t^{1/2}\boldsymbol{\gamma}_t,$$
$$\boldsymbol{D}_t^{1/2} = \mathrm{diag}\exp((h_{p+1,t}/2), \ldots, \exp(h_{p+q,t}/2)), \boldsymbol{\gamma}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}),$$

とし，更に $\boldsymbol{h}_t = (h_{1t}, \ldots, h_{pt}, h_{p+1,t}, \ldots, h_{p+q,t})'$ は1階の自己回帰過程に従うとしてマルコフ連鎖モンテカルロ法による推定方法を提案している．このモデルはChib, Nardari and Shephard(2006)によって $\boldsymbol{y}_t$ の誤差項に t 分布，平均にジャンプ項を加えて一般化され，株式市場におけるポートフォリオのリスク評価に用いられている．

この他にも多変量時系列のボラティリティ変動を説明するモデルには，共分散行列を直接モデル化するウィッシャート過程のモデル(Philipov and Glickman(2006a), Philipov and Glickman(200b), Gourieroux, Jasiak and Sufana(2004))や多変量GARCHモデル等がある[4]．また通常多変量時系列のボラティリティ変動モデルでは相関行列は一定とされるが，相関行列が変動するダイナミック相関モデルもある(Engle(2002), Yu and Meyer(2006), Tsay(2005), Kawakatsu(2006), Asai, McAleer and Yu(2006))．

本稿では多変量時系列のボラティリティ変動モデルの中で，多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルを取り上げ，非対称性を考慮したモデルに拡張してパラメータをマルコフ連鎖モンテカルロ法により効率的に推定する方法につ

いて提案する．以下第2節では，まず多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルのサーベイを行う．次に最も一般的なモデルであるChib, Nardari and Shephard(2006)における，パラメータの事後分布からのサンプリング方法について紹介し，その方法の問題点について触れる．第3節では非対称性を含んだモデルへの拡張を行い，マルコフ連鎖モンテカルロ法による効率的な推定方法を提案する．

2. 多変量因子確率的ボラティリティ変動モデル

基本的な多変量確率的ボラティリティ変動モデルでは，各時系列の分散は変動するが相関行列は一定であることを仮定している．このため最近では相関行列がダイナミックに変動するモデルが提案されており，相関係数や共分散行列の確率過程が直接モデル化されている．しかし，簡単な共通因子ベクトルを平均に取り入れることによっても相関係数のダイナミックな変動を表現することができる．本稿では多変量確率的ボラティリティ変動モデルに因子を導入することで，相関係数の変動についても考慮することとする．以下では因子を含む多変量確率的ボラティリティ変動モデルについて，まずボラティリティに因子を含むモデルを，次に平均に因子を含むモデルについて取り上げる．

2.1 ボラティリティの因子モデル

最も単純なモデルはひとつの共通因子がボラティリティを表現するものである．Quintana and West(1987)やJungbacker and Koopman(2006)はh_tを一次元の潜在変数とし，ボラティリティの共通因子を表すとし，

$$\boldsymbol{y}_t = \exp\left(\frac{h_t}{2}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_t,\ \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}),$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,\quad \eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2),$$

というモデルを提案した(ただし，$\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$の(1,1)要素は識別のために1とされている)．このモデルでは分散に関してパラメータが節約されており，推定を比較的簡単に行うことができる反面，相関係数が一定であり複雑な分散変動を単純化しすぎるという欠点がある．

Jungbacker and Koopman(2006)は重点サンプリングを用いたモンテカルロ積分による推定方法を提案し，イギリス・ポンド，ドイツ・マルク，日本円の米ドルに対する外国為替レートの収益率に適用している．このモデルではϕの推定値は通常より低くなっており，多変量ボラティリティの共変動を説明するのには不適切である可能性が高い．

これに対してHarvey, Ruiz and Shephard(1994)はモデルを線形化することで，更に一般化された因子モデルを提案している．まずy_{it}の対数をとって$w_{it}=\log y_{it}$とし，ベクトル$\boldsymbol{w}_t=(w_{1t}, \ldots, w_{pt})'$について

$$\boldsymbol{w}_t = (-1.27)\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{h}_t + \bar{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{\xi}_t, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{h}_{t+1} = \boldsymbol{h}_t + \boldsymbol{\eta}_t,\ \boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}), \tag{2}$$

とした．ただし，$\boldsymbol{\xi}_t=(\xi_{1t}, \ldots, \xi_{pt})'$及び$\boldsymbol{h}_t=(h_{1t}, \ldots, h_{qt})'(q \leq p)$である．因子負荷行列$\boldsymbol{\Theta}$には

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \theta_{q1} & \cdots & \theta_{q,q-1} & \theta_{qq} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \theta_{p,1} & \cdots & \theta_{p,q-1} & \theta_{p,q} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{h}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \bar{h}_{q+1} \\ \vdots \\ \bar{h}_p \end{pmatrix}.$$

と仮定をおき，ボラティリティの潜在変数$\boldsymbol{h}_t$は酔歩過程にしたがうとした．Harvey, Ruiz, and Shephard(1994)は疑似最尤法による推定方法を提案し，さらに因子負荷行列の解釈をしやすくするために，$\boldsymbol{\Theta}^*=\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{R}'$及び$\boldsymbol{h}_t^*=\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}_t$(ただし$\boldsymbol{R}$は直交行列)となるように因子の回転を行うことを薦めている．

Tims and Mahieu(2006)も同様なモデルを単純化して考えており，4通貨の外国為替レートの分析において日次レンジの対数値に応用している．w_{ij}を第i通貨の第j通貨に対する外国為替レートのレンジするとき，ベクトル$\boldsymbol{w}=$

$(w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{23}, w_{24}, w_{34})'$ について次のように単純な線形状態空間モデルを考えている．

$$\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{h}_t + \boldsymbol{\xi}_t,\ \boldsymbol{\xi}_t \sim \mathcal{N}_6(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}),$$
$$\boldsymbol{h}_{t+1} = \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_q)\boldsymbol{h}_t + \boldsymbol{\eta}_t,$$
$$\boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}),$$

ここで $\boldsymbol{c}$ は 6×1 ベクトルで平均を，$\boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}$ は対角行列で共分散行列を表す．また $\boldsymbol{h}_t = (h_{1t}, \ldots, h_{4t})'$ であり，その要素 h_{jt} は第 j 通貨の t 時点における潜在因子である．$\boldsymbol{Z}$ は通貨間の関係を表す行列で

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とされる．Tims and Mahieu(2006)では誤差項に正規分布を仮定することで，線形ガウス状態空間モデルとし，パラメータの推定をカルマン・フィルタを用いて行っている．

一方，Ray and Tsay(2000)はボラティリティの因子が長期記憶性を持つと考えて $\boldsymbol{h}_t$ が実数和分過程に従う次のようなモデルを提案している．

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t,\ \boldsymbol{V}_t^{1/2} = \mathrm{diag}(\exp(\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{h}_t/2), \ldots, \exp(\boldsymbol{z}_q'\boldsymbol{h}_t/2)),$$
$$(1-L)^d\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{\eta}_t,\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}),$$
$$\boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}),$$

ただし，$\boldsymbol{z}_i (i=1,\ldots,q)$ は $q\times1$ ベクトル $(q<p)$ である．Ray and Tsay(2000)では，観測方程式を Harvey, Ruiz, and Shephard(1994)におけるように対数をとることで線形化して長期記憶性の仮説検定を行っている．この他，ボラティリティに因子を導入するモデルには，やや上述のモデルとは異なるアプローチであるが，Calvet, Fisher, and Thompson(2006)による多変量マルコフ・スイッチング・因子マルチフラクタル・モデルがある．

2.2 平均の因子モデル

多変量確率的ボラティリティ変動モデルの平均に共通因子を導入することにより，相関行列にダイナミックな変動を持たせることができる．例えば次のような共通因子を持つ2変量モデルを考える．

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{b}f_t + \boldsymbol{D}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t,$$
$$\boldsymbol{D}_t = \mathrm{diag}(\exp(h_{1t}/2), \exp(h_{2t}/2)),\ \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, I),$$
$$f_t = \exp(h_{3t}/2)\gamma_t,\ \ \gamma_t \sim \mathcal{N}(0,1),$$
$$\boldsymbol{h}_{t+1} = \boldsymbol{\mu} + \Phi(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t,\ \ \boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{0}, I),$$

ただし $\boldsymbol{b} = (1, b_{21})'$ である．このとき $\boldsymbol{y}_t$ の共分散行列は

$$Var(\boldsymbol{y}_t) = \exp(h_{3t})\begin{pmatrix} 1 & b_{21} \\ b_{21} & b_{21}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(h_{1t}) & 0 \\ 0 & \exp(h_{2t}) \end{pmatrix},$$

であるから，相関係数は

$$Corr(y_{1t}, y_{2t}) = \frac{b_{21}}{\sqrt{\{1-\exp(h_{1t}-h_{3t})\}\{b_{21}^2+\exp(h_{2t}-h_{3t})\}}}$$

となり，時間と共に変動している．以下では多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルについての幾つかの先行研究について取り上げる．

Pitt and Shephard(1999)は多変量収益率の時系列 $\boldsymbol{y}_t$ に共通因子 $\boldsymbol{f}_t$ を次のように導入し，$\boldsymbol{y}_t$ の誤差項と，$\boldsymbol{f}_t$ の要素が独立に確率的ボラティリティ変動モデルに従うとした．

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t,\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}), \tag{3}$$
$$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{D}_t^{1/2}\boldsymbol{\gamma}_t,\ \ \boldsymbol{\gamma}_t \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}), \tag{4}$$
$$\boldsymbol{h}_{t+1} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t,\ \boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}_{p+q}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}) \tag{5}$$

ただし

$$\boldsymbol{V}_t = \mathrm{diag}(\exp(h_{1t}), \ldots, \exp(h_{pt})), \tag{6}$$
$$\boldsymbol{D}_t = \mathrm{diag}(\exp(h_{p+1,t}), \ldots, \exp(h_{p+q,t})), \tag{7}$$
$$\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_{p+q}) \tag{8}$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta} = \mathrm{diag}(\sigma_{1,\eta\eta}, \ldots, \sigma_{p+q,\eta\eta}) \tag{9}$$

及び $\boldsymbol{h}_t = (h_{1t}, \ldots, h_{pt}, h_{p+1,t}, \ldots, h_{p+q,t})'$ である．また識別性のために $p\times q$ 因子負荷行列 $\boldsymbol{B}$ の要素は $b_{ij}=0 (i<j, i\leq q)$，$b_{ii}=1 (i\leq q)$ としている．$\boldsymbol{B}$ 及び $\boldsymbol{f}_t$ が与えられたときには，他のパラメータの推定は1変量の確率的ボラティリティ変動モデルと同様になる．

同様なモデルは Jacquier, Polson, and Rossi (1999)や Liesenfeld and Richard(2003)も考え

ているが，$\boldsymbol{V}_t=\boldsymbol{V}$ と誤差項の分散は一定という制約がある．Jacquier, Polson, and Rossi (1999)はマルコフ連鎖モンテカルロ法による推定を行ったが，h_{it} をサンプリングする際に single move sampler という方法で行っている．この方法は，得られる標本の確率分布が事後分布に収束する速度が遅いことが知られているので，Pitt and Shephard(1999)では，効率性の高いことで知られている Kim, Shephard, and Chib(1998)の混合正規分布による近似に基づくサンプリング方法や，Shephard and Pitt (1997)による block sampler による方法を用いている．一方，Liesenfeld and Richard (2003)は，彼らの提案する効率的重点サンプリング法により，最尤推定量が得られるとしている．

Chib, Nardari, and Shephard(2006)は，Pitt and Shephard(1999)のモデルを更に拡張してジャンプ項を導入し，また誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ に裾の厚い分布である t 分布を考慮している．このモデルは次元の非常に高い多変量確率的ボラティリティ変動モデルを想定した最初の一般的なモデルであり，その詳細については次節で説明することとする．

これに対して Lopes and Carvalho(2006)は Pitt and Shephard(1999)や Aguilar and West (2000)のモデルの拡張を，因子負荷行列 $\boldsymbol{B}$ が時間を通じて変動する場合と，So, Lam, and Li(1998)におけるように共通因子 $\boldsymbol{f}_t$ のボラティリティの水準がマルコフ過程に従ってスイッチする場合について行い，次のようなモデルを考えている．基本的なモデルの式(4)-(7)に加えて

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{B}_t\boldsymbol{f}_t+\boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t,\ \boldsymbol{\varepsilon}_t\sim\mathcal{N}_p(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}),\\
\boldsymbol{h}_{t+1}^f &= \boldsymbol{\mu}_{S_t}^f+\boldsymbol{\Phi}^f\boldsymbol{h}_t^f+\boldsymbol{\eta}_t^f,\ \boldsymbol{\eta}_t^f\sim\mathcal{N}_q(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^f),\\
\boldsymbol{h}_t^f &= (h_{p+1,t},\ \ldots,\ h_{p+q,t})',\\
\boldsymbol{\mu}_{S_t}^f &= (\mu_{S_t,p+1},\ \ldots,\ \mu_{S_t,p+q})',\\
\boldsymbol{\Phi}^f &= \mathrm{diag}(\phi_{p+1},\ \ldots,\ \phi_{p+q}),
\end{aligned}$$

とし，$\boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^f$ は非対角要素が必ずしも 0 ではない共分散行列とする．また因子負荷行列 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{B}_t)$ の要素の中で制約のない b_{ij} を並べた $pq-q(q+1)/2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_t=(b_{21,t},\ b_{31,t},\ \ldots,\ b_{pq,t})'$ に対しては1階の自己回帰過程を考えている．Lopes and Carvalho(2006)は，このモデルを米ドルに対する6つの通貨(ドイツ・マルク，イギリス・ポンド，日本円，フランス・フラン，カナダ・ドル，スペイン・ペソ)のスポットレートの日次終値の収益率(因子の個数は3)や，ラテンアメリカの4つの株価指数の日次終値の収益率(因子の個数は2)に対して適用している．

Han(2006)も Pitt and Shephard(1999)と Chib, Nardari, and Shephard(2006)のモデルを拡張して，因子 $\boldsymbol{f}_t$ が次のように1階の自己回帰過程に従うと仮定した．

$$\boldsymbol{f}_t=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{t-1}+\boldsymbol{D}_t^{1/2}\boldsymbol{\gamma}_t,\ \boldsymbol{\gamma}_t\sim\mathcal{N}_q(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}). \quad (10)$$

推定方法は Chib, Nardari, and Shephard (2006)に基づいており，さまざまなポートフォリオのリスク評価を行うために36銘柄の株価の収益率のデータに応用をしている．

2.3 Chib, Nardari and Shephard(2006)のモデルのベイズ分析

本節では，現在提案されている最も一般的な多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルである Chib, Nardari, and Shephard(2006)のモデルとその推定方法について説明するとと共に，推定方法の問題点について考察する．まず収益率 $\boldsymbol{y}_t$ のモデルは

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_t+\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t+\boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\Lambda}_t^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t,\\
&\boldsymbol{\varepsilon}_t\sim\mathcal{N}_p(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}), \qquad (11)\\
&\boldsymbol{\Lambda}_t = \mathrm{diag}(\lambda_{1t},\ \ldots,\ \lambda_{pt})
\end{aligned}$$

であり，$\boldsymbol{V}_t$ は式(6)で与えられる．また $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ と $\boldsymbol{f}_t$ は条件付に独立な正規分布に従うとし

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{f}_t\end{pmatrix}\Big|\,\boldsymbol{V}_t,\boldsymbol{D}_t,\boldsymbol{K}_t,\boldsymbol{q}_t\sim\mathcal{N}_{p+q}\left\{\boldsymbol{0},\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_t & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_t\end{pmatrix}\right\}$$

とする．ただし $\boldsymbol{D}_t$ は式(7)で与えられる．

因子負荷行列 $\boldsymbol{B}$ にはすでに述べた識別性のための制約を置いて，$\boldsymbol{\beta}$ を $\boldsymbol{B}$ のなかの制約のないパラメータとする．$\boldsymbol{\beta}$ の事前分布は

$$\boldsymbol{\beta}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0,\ \boldsymbol{\Gamma}_0)$$

とする．$\boldsymbol{q}_t$ は p 個の独立なベルヌーイ分布に従う確率変数からなるベクトルで，各要素 q_{jt} の確率変数は，χ_j をパラメータとするベルヌーイ分布に従い ($q_{jt}\sim\mathcal{BER}(\chi_j)$)，確率関数

$Pr(q_{jt}=1)=\varkappa_j, Pr(q_{jt}=0)=1-\varkappa_j,$

を持ち，各収益率におけるジャンプの有無を表している．そのジャンプのサイズについては $\boldsymbol{K}_t=\mathrm{diag}(k_{1t}, \ldots, k_{pt})$ によって与えられ，$\zeta_{jt}=\log(1+k_{jt})$ と変換して

$$\zeta_{jt}=\log(1+k_{jt}) \sim \mathcal{N}(-0.5\delta_j^2, \delta_j^2), j \leq p$$

と仮定し，δ_j^2 の事前確率密度関数を $\pi(\delta_j^2)$ $(j=1,\ldots, p)$ とおく．

最後に誤差項 $\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\Lambda}_t^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ の各要素は $\boldsymbol{V}_t$ が与えられたときに，

$$u_{jt}=\lambda_{jt}^{-1/2}\exp(h_{jt}/2)\varepsilon_{jt}, \quad \lambda_{jt} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{G}\left(\frac{\nu_j}{2}, \frac{\nu_j}{2}\right), \quad t=1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

であるとし，従って誤差項が自由度 ν_j の t 分布に従うモデルを考える(1次のモーメントを持つように $\nu_j>2$ とする)．

このモデルにおけるパラメータ数は以下のように非常に多い．まず $\boldsymbol{\beta}$ の要素数は $pq-(q^2+q)/2$ であり，確率的ボラティリティ変動モデルに対応するパラメータ $\boldsymbol{\theta}_j=(\phi_j, \mu_j, \sigma_j)$ $(1\leq j\leq p+q)$ が $3(p+q)$，更に $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1, \ldots, \nu_p)$ が p 個，$\boldsymbol{\varkappa}=(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p)$ が p 個，$\boldsymbol{\delta}=(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ が p 個である．すべてのパラメータを $\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_p, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varkappa})$ で表記すると $p=50, q=8$ のとき $\boldsymbol{\psi}$ の次元は688となる．またこのモデルには潜在変数も多い．例えば誤差項と因子のボラティリティの潜在変数 h_{jt} は $n(p+q)$ 個あり，ジャンプの有無 $\{\boldsymbol{q}_t\}$ とサイズ $\{\boldsymbol{k}_t\}$ に関連する潜在変数は $2np$ 個，裾の厚い分布を表すための潜在変数 $\{\boldsymbol{\lambda}_t\}$ は np 個ある．

このように潜在変数及びパラメータ数が非常に多いため，尤度の計算を繰り返し行う最尤法による推定は非常に困難であり，Chib, Nardari, and Shephard(2006)ではマルコフ連鎖モンテカルロ法により推定を行っている．以下では同時事後確率密度関数を

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}|\boldsymbol{y}), \tag{13}$$

とする．ただし $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$, $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{p+q})$, $\boldsymbol{\theta}_j=(\mu_j, \phi_j, \sigma_{j,\eta\eta})'(j=1, \ldots, p+q)$, $\boldsymbol{h}=(\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n)$, $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1, \ldots, \nu_p)$, $\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n)$, $\boldsymbol{\lambda}_t=(\lambda_{1t}, \ldots, \lambda_{pt})'$, $(t=1, \ldots, n)$, $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1, \ldots, \delta_p)$, $\boldsymbol{\varkappa}=(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p)$, $\boldsymbol{\zeta}=(\boldsymbol{\zeta}_1, \ldots, \boldsymbol{\zeta}_n)$, $\boldsymbol{\zeta}_t=(\zeta_{1t}, \ldots, \zeta_{pt})'$, $(t=1, \ldots, n)$, $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$, $\boldsymbol{q}_t=(q_{1t}, \ldots, q_{pt})'(t=1, \ldots, n)$，である．同時事後分布からマルコフ連鎖モンテカルロ法によりサンプリングするために以下の8ステップでサンプリングする．

Step 1. $\boldsymbol{\beta}\sim\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$ を発生させる．

Step 2. $\boldsymbol{f}_t\sim\pi(\boldsymbol{f}_t|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{\lambda}_t, \boldsymbol{\zeta}_t, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{y}_t)$ を発生させる $(t=1, \ldots, n)$．

Step 3. $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h})\sim\pi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$ を mixture sampler を用いて発生させる．

Step 4. $\nu_j\sim\pi(\nu_j|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$ を発生させる $(j=1, \ldots, p)$．

Step 5. $\lambda_{jt}\sim\pi(\lambda_{jt}|\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f}, h_{jt}, \nu_j, \zeta_{jt}, q_{jt}, y_{jt})$ を発生させる $(j=1, \ldots, p, t=1, \ldots, n)$．

Step 6. $(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\zeta})\sim\pi(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\zeta}|\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y})$ を発生させる．

Step 7. $\varkappa_j\sim\pi(\varkappa_j|q_j, \boldsymbol{y})$ を発生させる $(j=1, \ldots, p)$．

Step 8. $q_{jt}\sim\pi(q_{jt}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, h_{jt}, \nu_j, \zeta_{jt}, \varkappa_j, y_{jt})$ を発生させる $(j=1, \ldots, p, t=1, \ldots, n)$．

Step 1. $\boldsymbol{\beta}$ のサンプリング．

同時事後確率密度関数から $\boldsymbol{f}_t$ を積分すると，$\boldsymbol{\beta}$ の条件付事後確率密度関数は

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y})\propto\pi(\boldsymbol{\beta})\prod_{t=1}^{n}f_N(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{\Omega}_t),$$

となる．ただし $\pi(\boldsymbol{\beta})$ は事前確率密度関数で，$f_N(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ は平均 $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の正規分布の確率密度関数を表し

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \boldsymbol{V}_t^*+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{B}',$$
$$\boldsymbol{V}_t^* = \boldsymbol{V}_t\odot\mathrm{diag}(\lambda_{1t}^{-1}, \ldots, \lambda_{pt}^{-1}).$$

である．ただし $\odot$ は要素ごとの積を表す．Chib, Nardari, and Shephard(2006)は，$\boldsymbol{\beta}$ のサンプリングを独立連鎖のメトロポリスーヘイスティングス(M-H)アルゴリズムにより次のように行う．提案分布は自由度 $v=15$ の多変量 t 分布 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\beta}|\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma}, v)$ とし，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は対数事後確率密度

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{n}\log f_N(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{\Omega}_t)$$

$$= \text{const} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\log|\boldsymbol{\Omega}_t|$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t)'$$
$$\boldsymbol{\Omega}_t^{-1}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t)$$

の近似モード，$\boldsymbol{\Sigma}$ は

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\left\{\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\right\}_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}}\Bigg\}^{-1}$$

である[5]．したがって，現在の点を $\boldsymbol{\beta}$ とするとき，候補 $\boldsymbol{\beta}^* \sim \mathcal{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma}, v)$ を発生し，確率

$$\alpha(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*|\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y})$$
$$= \min\left\{1, \frac{\pi(\boldsymbol{\beta}^*)\prod_{t=1}^{n} f_N(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{V}_t^* + \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{B}^{*\prime}) f_T(\boldsymbol{\beta}|\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma}, v)}{\pi(\boldsymbol{\beta})\prod_{t=1}^{n} f_N((\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{V}_t^* + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{B}') f_T(\boldsymbol{\beta}^*|\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma}, v)}\right\},$$

で採択すればよい．ただし $f_T(\boldsymbol{\beta}|\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma}, v)$ は $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma})$ をパラメータとする自由度 ν の t 分布の確率密度関数である．

Step 2. $\{\boldsymbol{f}_t\}$ のサンプリング．

$\{\boldsymbol{f}_t\}$ の条件付事後分布は正規分布であり，

$$\boldsymbol{f}_t|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{\lambda}_t, \boldsymbol{\zeta}_t, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{y}_t \sim \mathcal{N}_q(\hat{\boldsymbol{f}}_t, \boldsymbol{F}_t),$$
$$\hat{\boldsymbol{f}}_t = \boldsymbol{F}_t\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{V}_t^*)^{-1}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t),$$
$$\boldsymbol{F}_t = \{\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{V}_t^*)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}_t^{-1}\}^{-1}$$

と発生すればよい $(t=1, \ldots, n)$．

Step 3. $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{h}$ のサンプリング．

まず y_{jt}^* を

$$y_{jt}^* = \begin{cases} \lambda_{jt}[y_{jt} - a_{jt} - \{\exp(\zeta_{jt}) - 1\}q_{jt}], & j = 1, \ldots, p, \\ f_{j-q,t}, & j = p+1, \ldots, q, \end{cases}$$

と定義する．ただし a_{jt} は $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_t$ の第 j 要素である．$\{\boldsymbol{f}_t\}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{y}_t$ の誤差項は条件付独立となり，y_{jt}^* を観測値とする $p+q$ 個の確率的ボラティリティ変動モデル

$$y_{jt}^* = \varepsilon_{jt}\exp(h_{jt}/2), \varepsilon_{jt} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$
$$h_{j,t+1} = \mu_j + \phi_j(h_{j,t} - \mu_j) + \eta_{jt}, \eta_{jt} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

を得る．このとき Kim, Shephard, and Chib (1998) に基づいて，観測方程式の両辺の対数値をとり $z_{jt} = \log y_{jt}^{*2}$ とすると[6]

$$z_{jt} = h_{jt} + \log\varepsilon_{jt}^2,$$

となるので，$\log\varepsilon_{jt}^2$ を 7 つの混合正規分布で近似することを考える．混合正規分布の成分を表す潜在変数を s_{jt} とすれば，s_{jt} が与えられたとき

$$z_{jt} = h_{jt} + m_{s_{jt}} + \varepsilon_{jt}^*, \quad \varepsilon_{jt}^* \sim \mathcal{N}(0, v_{s_{jt}}^2),$$
$$h_{j,t+1} - \mu_j = \phi_j(h_{j,t} - \mu_j) + \eta_{jt},$$
$$\eta_{jt} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\eta\eta,j}^2), j = 1, \ldots, p+q,$$

と線形ガウス状態空間モデルを得る．ここで s_{jt} は確率関数 $\Pr(s_{jt} = i) = p_i (i=1, \ldots, 7)$ をもつ離散確率変数で，$(p_i, m_{s_{jt}}, v_{s_{jt}}^2)$ は Chib, Nardari, and Shephard (2002) で与えられている[7]．$\boldsymbol{s} = (s_{11}, \ldots, s_{p+q,n})$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{h}$ の事後確率密度関数は

$$\pi(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}|\boldsymbol{z}) = \prod_{j=1}^{p+q}\pi(\boldsymbol{s}_{j\cdot}, \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{h}_{j\cdot}|\boldsymbol{z}_{j\cdot}),$$

ただし $\boldsymbol{s}_{j\cdot} = (s_{j1}, \ldots, s_{jn})'$, $\boldsymbol{h}_{j\cdot} = (h_{j1}, \ldots, h_{jn})'$, $\boldsymbol{z}_{j\cdot} = (z_{j1}, \ldots, z_{jn})'$，と書くことができるので，各 j ごとに 1 変量の確率的ボラティリティ変動モデルを考えて以下のように $(\boldsymbol{s}_{j\cdot}, \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{h}_{j\cdot})$ をサンプリングすればよい $(j=1, \ldots, p+q)$．

(1) $\boldsymbol{s}_{j\cdot}$ は条件付事後確率関数

$$p(s_{jt}|z_{jt}, h_{jt}) \propto \pi(s_{jt}) f_N(z_{jt}|h_{jt} + m_{s_{jt}}, v_{s_{jt}}^2),$$

を用いて離散確率分布からの乱数発生を行えばよい $(t=1, \ldots, n)$．

(2) $\boldsymbol{\theta}_j$ は $\boldsymbol{h}_{j\cdot}$ に関して積分した事後確率密度関数

$$\pi(\boldsymbol{\theta}_j|\boldsymbol{z}_{j\cdot}, \boldsymbol{s}_{j\cdot}) \propto \pi(\boldsymbol{\theta}_j)p(\boldsymbol{z}_{j\cdot}|\boldsymbol{s}_{j\cdot}, \boldsymbol{\theta}_j),$$

を用いて独立連鎖の M-H アルゴリズムを行う．ただし $\pi(\boldsymbol{\theta}_j)$ は $\boldsymbol{\theta}_j$ の事前確率密度関数であり，$p(\boldsymbol{z}_{j\cdot}|\boldsymbol{s}_{j\cdot}, \boldsymbol{\theta}_j)$ は線形ガウス状態空間モデルのためのカルマン・フィルタにより計算することができる．

(3) $\boldsymbol{h}_{j\cdot}$ は de Jong and Shephard (1995) や Durbin and Koopman (2002) による線形ガウス状態空間モデルのためのシミュレーション・スムーザによって発生する．

Step 4. $\boldsymbol{\nu}$ のサンプリング．

t 分布の自由度 ν_j の条件付確率密度関数は，事後確率密度関数を $\boldsymbol{\lambda}_t$ に関して積分すると

$$\pi(\nu_j|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}) \propto \pi(\nu_j)\prod_{t=1}^{n} f_T(y_{jt}|a_{jt} + \{\exp(\zeta_{jt}) - 1\}q_{jt}, \exp(h_{jt}), \nu_j), \tag{14}$$

であり，$\boldsymbol{\beta}$ のサンプリングと同様な M-H アルゴリズムを行えばよい $(j=1, \ldots, p)$．

Step 5. $\boldsymbol{\lambda}$ のサンプリング.

λ_{jt} の条件付事後分布はガンマ分布であり

$$\lambda_{jt}|\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f}, h_{jt}, \nu_j, \zeta_{jt}, q_{jt}, y_{jt}, \sim \mathcal{G}\left(\frac{\nu_j+1}{2}, \frac{\nu_j+(y_{jt}-a_{jt}-(\exp(\zeta_{jt})-1)q_{jt}))^2}{2\exp(h_{jt})}\right)$$

と発生すればよい ($j=1, \ldots, p$, $t=1, \ldots, n$).

Step 6. $(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\zeta})$ のサンプリング.

δ_j^2 と $\zeta_{j\cdot}=(\zeta_{j1}, \ldots, \zeta_{jn})$ の同時事後確率密度関数は

$$\pi(\delta_j^2, \boldsymbol{\zeta}_{j\cdot}|\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y}) \propto \pi(\delta_j^2)\prod_{t=1}^{n} f_N(y_{jt}|a_{jt}+(\exp(\zeta_{jt})-1)q_{jt}, \exp(h_{jt})\lambda_{jt}^{-1}) f_N(\zeta_{jt}|-0.5\delta_j^2, \delta_j^2)$$

である. Chib, Nardari, and Shephard(2006)は, 金融時系列でジャンプのサイズ k_{jt} の値は小数で観測される小さな値なので $k_{jt}=\exp(\zeta_{jt})-1\approx\zeta_{jt}$ と近似できるして, 同時事後確率密度関数を

$$\pi(\delta_j^2, \boldsymbol{\zeta}_{j\cdot}|\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}) \approx \mathrm{const}\times\pi(\delta_j^2)\prod_{t=1}^{n} f_N(y_{jt}|a_{jt}+\zeta_{jt}q_{jt}, \exp(h_{jt})\lambda_{jt}^{-1}) f_N(\zeta_{jt}|-0.5\delta_j^2, \delta_j^2)$$

とし, さらにこれを ζ_{jt} に関して積分した δ_j^2 の周辺事後確率密度関数を求めて

$$\pi(\delta_j^2|\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}) \approx \mathrm{const}\times\pi(\delta_j^2)\prod_{t=1}^{n} f_N(a_{jt}-0.5\delta_j^2 q_{jt}, \delta_j^2 q_{jt}^2+\exp(h_{jt})\lambda_{jt}^{-1})$$

を $\boldsymbol{\beta}$ のサンプリングのようにM-Hアルゴリズムを用いて近似分布からのサンプリングを行なう. 次に ζ_{jt} を, δ_j^2 を所与としてサンプリングする.

(i) $q_{jt}=0$ のときには ζ_{jt} の事後分布は事前分布と同じになるので

$$q_{jt}|\delta_j^2 \sim \mathcal{N}(-0.5\delta_j^2, \delta_j^2)$$

と発生する.

(ii) $q_{jt}=1$ のときには

$$q_{jt}|\delta_j^2, h_{jt}, \lambda_{jt}, y_{jt} \sim \mathcal{N}(\Psi_{jt}(-0.5+\exp(-h_{jt})\lambda_{jt}y_{jt}), \Psi_{jt}),$$

$$\Psi_{jt} = (\delta_j^{-2}+\exp(-h_{jt})\lambda_{jt})^{-1}$$

と発生すればよい.

Step 7. $\boldsymbol{\kappa}$ のサンプリング.

κ_j の条件付事後分布はベータ分布であり.

$$\kappa_j|q_{j\cdot} \sim \mathcal{B}(u_{0j}+n_{1j}, u_{1j}+n_{0j})$$

と発生すればよい ($j=1, \ldots, p$). ただし n_{0j} は $q_{jt}=0$ となる個数で $n_{1j}=n-n_{0j}$ は $q_{jt}=1$ となる個数である.

Step 8. $\boldsymbol{q}$ のサンプリング.

q_{jt} の事後確率関数は

$$\pi(q_{jt}=1|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, h_{jt}, \nu_j, \zeta_{jt}, \kappa_j, y_{jt}) \propto \kappa_j f_T(y_{it}|a_{jt}+\{\exp(\zeta_{jt})-1\}, \exp(h_{jt}), \nu_j),$$

$$\pi(q_{jt}=0|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, h_{jt}, \nu_j, \zeta_{jt}, \kappa_j, y_{jt}) \propto (1-\kappa_j) f_T(y_{jt}|a_{jt}, \exp(h_{jt}), \nu_j),$$

であるから, これを用いて離散確率分布からの乱数を発生させればよい ($j=1, \ldots, p$, $t=1, \ldots, n$).

2.4 Chib, Nardari and Shephard(2006)における問題点

Chib, Nardar, and Shephard (2006)のモデルでは, いくつかのパラメータのサンプリングにおいて事後確率密度関数に関する近似を行っている. 一つはStep 3における$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h})$のサンプリングであり, 誤差項の分布である対数カイ二乗分布の混合正規分布による近似である. もう一つはStep 7における ζ_{jt} の事後確率密度関数の一部線形近似である. Chib, Nardari, and Shephard(2006)は, これらの近似により非常の効率的なサンプリング方法を実現しているが, 本来近似分布を用いてサンプリングする場合には, M-Hアルゴリズムにおいて真の分布に対する補正をしなければならない. しかし, ここでは補正をしていないので, 現実には非常に近似がよいとはいうものの, やはり補正を行う必要があるといえる.

3. 非対称性のある多変量因子確率的ボラティリティ変動モデル

3.1 モデル

本節ではChib, Nardari, and Shephard (2006)の多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルにおいて, 共通因子と誤差項の双方に非

対称性のあるモデルを考え，マルコフ連鎖モンテカルロ法による推定方法を提案する．ただし誤差項の多変量 t 分布については Yu and Meyer(2006)の実証分析では，Chib, Nardari, and Shephard(2006)で用いられた，$\boldsymbol{y}_t$ の要素ごとに潜在変数を用いる分布よりも $\boldsymbol{y}_t$ に潜在変数を一つ用いる分布のあてはまりがよいという結果に基づいて，以下のように後者を仮定する．

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t + \lambda_t^{-1/2}\boldsymbol{V}_{1t}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_{1t}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{V}_{2t}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_{2t}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_t\\ \boldsymbol{\eta}_t\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{2(p+q)}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} & \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} & \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}\end{pmatrix},$$

$$t = 1, \ldots, n,$$

$$\alpha_{j1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}/(1-\phi_j^2)), \quad j = 1, \ldots, p+q, \tag{18}$$

$$\lambda_t \sim \mathcal{G}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \tag{19}$$

$$q_{jt} \sim \mathcal{BER}(\chi_j), \ \zeta_{jt} \equiv \log(1+k_{jt}) \sim \mathcal{N}(-0.5\delta_j^2, \delta_j^2), \quad j = 1, \ldots, p, \tag{20}$$

ただし $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1t}', \boldsymbol{\varepsilon}_{2t}')'$ 及び

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_t &= \mathrm{diag}(\boldsymbol{V}_{1t}, \boldsymbol{V}_{2t})\\ &= \mathrm{diag}(\exp(\alpha_{1t}), \ldots, \exp(\alpha_{p+q,t})),\end{aligned} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_{p+q}) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathrm{diag}(\sigma_{1,\varepsilon\varepsilon}, \ldots, \sigma_{p+q,\varepsilon\varepsilon}) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta} = \mathrm{diag}(\sigma_{1,\eta\eta}, \ldots, \sigma_{p+q,\eta\eta}) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} = \mathrm{diag}(\rho_1\sigma_{1,\varepsilon\varepsilon}^{1/2}\sigma_{1,\eta\eta}^{1/2}, \ldots, \rho_{p+q}\sigma_{p+q,\varepsilon\varepsilon}^{1/2}\sigma_{p+q,\eta\eta}^{1/2}), \tag{25}$$

である．係数行列 $\boldsymbol{B}$ については Chib, Nardari, and Shephard(2006)におけるように識別性のために

$$b_{ij} = 0, \quad i < j, i \le q$$
$$b_{ii} = 1, \quad i \le q.$$

という仮定をおく．$\boldsymbol{\beta}$ を $\boldsymbol{B}$ における制約の無いパラメータのベクトルとすると，モデルのパラメータは $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_p)$, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$, ν, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_{p+q})$ 及び

$$\boldsymbol{\Sigma}_j = \begin{pmatrix}\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon} & \rho_j\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}^{1/2}\sigma_{j,\eta\eta}^{1/2}\\ \rho_j\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}^{1/2}\sigma_{j,\eta\eta}^{1/2} & \sigma_{j,\eta\eta}\end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, p+q$$

となる．パラメータの事前分布を

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Gamma}_0), \quad \nu \sim \mathcal{G}(m_0^\nu, S_0^\nu),$$

$$\kappa_j \sim \mathcal{B}(a_{0j}^\kappa, b_{0j}^\kappa), \quad \delta_j^2 \sim \mathcal{G}(m_{0j}^\delta, S_{0j}^\delta), \quad j = 1, \ldots, p,$$

$$\frac{\phi_j+1}{2} \sim \mathcal{B}(a_{0j}^\phi, b_{0j}^\phi),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_j \sim \mathcal{IW}(n_{0j}, \boldsymbol{\Sigma}_{0j}), \quad j = 1, \ldots, p+q,$$

とおくと，同時事後確率密度関数は

$$\begin{aligned}&\pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, |\boldsymbol{y})\\ &\propto \left\{\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right\}^n |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \times \prod_{t=1}^n \lambda_t^{p+\frac{\nu}{2}-1}\\ &\times \exp -\frac{1}{2}\\ &\left\{\sum_{t=1}^n \nu\lambda_t + \left(\sum_{j=1}^{p+q}\alpha_{jt}\right) + \boldsymbol{w}_t'(\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_t')^{-1}\boldsymbol{w}_t,\right\}\\ &\times \pi(\boldsymbol{\beta})\pi(\nu)\prod_{j=1}^p \pi(\kappa_j)\pi(\delta_j^2) \times \prod_{j=1}^{p+q}\pi(\phi_j)\pi(\boldsymbol{\Sigma}_j)\end{aligned} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{w}_t = \begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_t\\ \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t\\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_t\end{pmatrix}, \ t = 1, \ldots, n-1,$$

$$\boldsymbol{w}_n = \begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_n\\ \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{K}_n\boldsymbol{q}_n\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_t = \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{V}_{2t}^{1/2} & \boldsymbol{O}\\ \lambda_t^{-1/2}\boldsymbol{V}_{1t}^{1/2} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_{2t}^{1/2} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}, \ t = 1, \ldots, n-1,$$

$$\boldsymbol{P}_n = \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{V}_{2n}^{1/2} & \boldsymbol{O}\\ \lambda_n^{-1/2}\boldsymbol{V}_{1n}^{1/2} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_{2n}^{1/2} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

となる．ただし，$\pi(\boldsymbol{\beta})$, $\pi(\nu)$, $\pi(\kappa_j)$, $\pi(\delta_j^2)$, $\pi(\phi_j)$, $\pi(\boldsymbol{\Sigma}_j)$ はそれぞれのパラメータのの事前確率密度関数を表すとし，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ する．

3.2 マルコフ連鎖モンテカルロ法による事後分布からのサンプリング

同時事後分布からマルコフ連鎖モンテカルロ法によりサンプリングするために以下の 9 ステップでサンプリングする．

Step 1. $\boldsymbol{\beta} \sim \pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$ を発生させる．

Step 2. $\boldsymbol{f}_t \sim \pi(\boldsymbol{f}_t|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$ を発生させる $(t=1, \ldots, n)$.

Step 3. $(\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}) \sim \pi(\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$ を発生させる．

Step 4. $\nu \sim \pi(\nu|\boldsymbol{\lambda})$ を発生させる．

Step 5. $\lambda_t \sim \pi(\lambda_t|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^p, \boldsymbol{\alpha}_t, \nu, \boldsymbol{\zeta}_t, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{y}_t)$ を発生させる $(t=1, \ldots, n)$.

Step 6. $\zeta_{jt} \sim \pi(\zeta_{jt}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p}, \boldsymbol{\alpha}_t, \nu, \lambda_t, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{y}_t)$ を発生させる ($j=1, \ldots, p, t=1, \ldots, n$).

Step 7. $\delta_j^2 \sim \pi(\delta_j^2|\boldsymbol{\zeta})$ を発生させる ($j=1, \ldots, p$).

Step 8. $\varkappa_j \sim \pi(\varkappa_j|q_j, \boldsymbol{y})$ を発生させる ($j=1, \ldots, p$).

Step 9. $q_{jt} \sim \pi(q_{jt}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \phi_j, \boldsymbol{\Sigma}_j, \alpha_{jt}, \lambda_t, \varkappa_j, \zeta_{jt}, y_{jt})$ を発生させる ($j=1, \ldots, p, t=1, \ldots, n$).

以下では各ステップについて詳細に見ていく.

Step 1. $\boldsymbol{\beta}$ のサンプリング.

$\boldsymbol{f}_t$ に関して積分した $\boldsymbol{\beta}$ の事後分布からサンプリングをし，続けて $\boldsymbol{f}_t$ をサンプリングする. $\boldsymbol{\beta}$ の周辺事後確率密度関数は，次のように与えられる. $\boldsymbol{P}_t$ を

$$\boldsymbol{P}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{1t} \\ \boldsymbol{P}_{2t} \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{P}_{1t} = (\boldsymbol{O}, \boldsymbol{V}_{2t}^{1/2}, \boldsymbol{O}),$$
$$\boldsymbol{P}_{2t} = \begin{pmatrix} \lambda_t^{-1/2}\boldsymbol{V}_{1t}^{1/2} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_{2t}^{1/2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$
$$t = 1, \ldots, n-1,$$
$$\boldsymbol{P}_{1n} = (\boldsymbol{O}, \boldsymbol{V}_{2t}^{1/2}, \boldsymbol{O}),$$
$$\boldsymbol{P}_{2n} = (\lambda_n^{-1/2}\boldsymbol{V}_{1n}^{1/2}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_{2n}^{1/2}, \boldsymbol{O}),$$

と定義し,

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_t \end{pmatrix}, \quad t = 1, \ldots, n-1,$$
$$\tilde{\boldsymbol{w}}_n = \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{K}_n\boldsymbol{q}_n$$

とおくと

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$$
$$\propto \pi(\boldsymbol{\beta}) \prod_{t=1}^{n} |\boldsymbol{P}_{2t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{2t}'|^{-1/2}$$
$$\times \exp -\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{w}}_t'(\boldsymbol{P}_{2t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{2t}')^{-1}\tilde{\boldsymbol{w}}_t,\right\} \quad (27)$$

を得る. もし $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} = \boldsymbol{O}$ ならば

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$$
$$\propto \pi(\boldsymbol{\beta}) \prod_{t=1}^{n} |\lambda_t^{-1}\boldsymbol{V}_{1t}\boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\varepsilon} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_{2t}\boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{B}'|^{-1/2}$$
$$\times \exp -\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=1}^{n} (\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t)'(\lambda_t^{-1}\boldsymbol{V}_{1t}\boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\varepsilon}\right.$$
$$\left. + \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_{2t}\boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{B}')^{-1}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t)\right\}$$

となる. 従って M-H アルゴリズムにより $\boldsymbol{\beta}$ のサンプリングを行えばよい. $\boldsymbol{\beta}$ の次元があまり高くない場合には次のような独立連鎖を用いる. まず対数条件付事後密度関数を最大化するモード $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求めて，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の周りで正規分布による近似を行い，これを提案分布とする. $\pi(\boldsymbol{\beta}|\cdot)$ を式(27)の条件付事後確率密度関数とすると，候補点 β_c を提案分布により

$$\boldsymbol{\beta}_c \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*)$$

ただし

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \left\{-\frac{\partial^2 \log \pi(\boldsymbol{\beta}|\cdot)}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\bigg|_{\beta=\hat{\beta}}\right\}^{-1},$$
$$\boldsymbol{\mu}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Sigma}^*\frac{\partial \log \pi(\boldsymbol{\beta}|\cdot)}{\partial\boldsymbol{\beta}}\bigg|_{\beta=\hat{\beta}}$$

と発生して M-H アルゴリズムを行えばよい.

もし $\boldsymbol{\beta}$ の次元が高い場合にはモード $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求める時間がかかるために，モードを求めずに次のような酔歩連鎖を行うと良い. 例えば，現在の点を $\boldsymbol{\beta}_o$ とするとき，候補点 $\boldsymbol{\beta}_c$ を

$$\boldsymbol{\beta}_c \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_o, c\boldsymbol{\Sigma}^*), \boldsymbol{\Sigma}^* = -\left\{\frac{\partial^2 \log \pi(\boldsymbol{\beta}|\cdot)}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\bigg|_{\beta=\beta_o}\right\}^{-1}$$

と発生させればよい. c はチューニングパラメータで，得られる MCMC 標本の非効率因子の値が低くなるように調整すればよい.

Step 2. $\boldsymbol{f}$ のサンプリング.

同時事後確率密度関数(26)から，他のパラメータが与えられた時の $\boldsymbol{f}_t$ の条件付事後分布は正規分布になる. したがって以下のように $\boldsymbol{f}_t$ をサンプリングすればよい ($t=1, \ldots, n$).

$$\boldsymbol{f}_t \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{\mu}_f, \boldsymbol{\Sigma}_f),$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_f = \boldsymbol{P}_{1t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{1t}' - \boldsymbol{P}_{1t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{2t}'(\boldsymbol{P}_{2t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{2t}')^{-1}\boldsymbol{P}_{2t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{1t}',$$
$$\boldsymbol{\mu}_f = \boldsymbol{P}_{1t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{2t}'(\boldsymbol{P}_{2t}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_{2t}')^{-1}\tilde{\boldsymbol{w}}_t,$$

Step 3. $\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+q}, \boldsymbol{\alpha}$ のサンプリング.

$\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+q}, \boldsymbol{\alpha}$ 以外のパラメータが与えられたときに，$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_t - \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{q}_t$ とすると条件付事後確率密度関数は

$$\pi(\boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^{p+1}, \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})$$
$$\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \times \exp -\frac{1}{2}\left\{\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p+q}\alpha_{jt}\right) + \sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{w}_t^{*\prime}\right.$$
$$\left.(\boldsymbol{P}_t^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}_t^{*\prime})^{-1}\boldsymbol{w}_t^*,\right\} \times \prod_{j=1}^{p+q}\pi(\phi_j)\pi(\boldsymbol{\Sigma}_j) \quad (28)$$

$$\boldsymbol{w}_t^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_t \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_t \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_t \end{pmatrix}, \quad t = 1, \ldots, n-1,$$

$$\boldsymbol{w}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_n \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_t^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{V}_{2t}^{1/2} & \boldsymbol{O} \\ \lambda_t^{-1/2}\boldsymbol{V}_{1t}^{1/2} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}, t = 1, \ldots, n-1,$$

$$\boldsymbol{P}_n^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{V}_{2n}^{1/2} \\ \lambda_n^{-1/2}\boldsymbol{V}_{1n}^{1/2} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

と書くことができる．y_{jt}^* を

$$y_{jt}^* = \begin{cases} \lambda_t^{1/2}\{y_{jt} - a_{jt} - q_{jt}(\exp(\zeta_{jt}) - 1)\}, & j = 1, \ldots, p, \\ f_{j-p,t}, & j = p+1, \ldots, p+q \end{cases}$$

と定義すれば，以下のように条件付で独立な非対称性のある確率的ボラティリティ変動モデルの事後確率密度関数となる．

$$y_{jt}^* = \exp(\alpha_{jt}/2)E_{jt},$$
$$\alpha_{j,t+1} = \phi_j\alpha_{jt} + \eta_{jt}$$

$$\boldsymbol{u}_{jt} = \begin{pmatrix} E_{jt} \\ \eta_{jt} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_j), \quad j = 1, \ldots, p+q,$$

である．したがってOmori and Watanabe (2007)を用いて非対称性のある確率的ボラティリティ変動モデルのためのblock samplerにより，$(\phi_j, \boldsymbol{\Sigma}_j, \boldsymbol{\alpha}_{j\cdot})$ $(\boldsymbol{\alpha}_{j\cdot} = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn})')$ $(j=1, \ldots, p+q)$ をサンプリングすればよい(詳細は補論を参照)．

Step 4. ν のサンプリング．

ν の条件付事後確率密度関数は

$$\pi(\nu|\boldsymbol{\lambda}) \propto \pi(\nu)\prod_{t=1}^{n}\pi(\lambda_t|\nu),$$

$$\propto \pi(\nu)\left\{\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right\}^n \left(\prod_{t=1}^{n}\lambda_t\right)^{\frac{\nu}{2}} \times \exp - \frac{\sum_{t=1}^{n}\lambda_t}{2}\nu$$

で，ただし ν_j の事前分布は $\mathcal{G}(m_0^\nu, S_0^\nu)$．このとき ν は次のように独立連鎖のM-Hアルゴリズムを用いてWatanabe(2001)に従ってサンプリングすればよい．候補点を切断正規分布の提案分布 $\nu_j \sim \mathcal{TN}_{(0,\infty)}(\mu_\nu, \sigma_\nu^2)$ により発生させて，M-Hアルゴリズムを行う．ただし

$$\sigma_\nu^2 = \left\{-\frac{\partial^2 \log \pi(\nu|\boldsymbol{\lambda})}{\partial^2\nu}\bigg|_{\nu=\hat{\nu}}\right\}^{-1},$$

$$\mu_\nu = \hat{\nu} + \sigma_\nu^2 \frac{\partial \log \pi(\nu|\boldsymbol{\lambda})}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=\hat{\nu}},$$

で，$\hat{\nu}$ は条件付事後確率密度関数 $\pi(\nu|\boldsymbol{\lambda})$ のモードである．

Step 5. $\boldsymbol{\lambda}$ のサンプリング．

λ_t の条件付事後確率密度関数は

$$\pi(\lambda_t|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^p, \boldsymbol{\alpha}_t, \nu, \boldsymbol{\zeta}_t, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{y}_t)$$

$$\propto \begin{cases} \lambda_t^{\frac{\nu+p}{2}-1}\exp - \frac{1}{2}\left[\nu + \sum_{j=1}^p \frac{\{\tilde{y}_{jt} - c_{jt}\}^2}{\sigma_{jt,\varepsilon\varepsilon}(1-\rho_j^2)\exp(\alpha_{jt})}\right]\lambda_t, \\ \qquad\qquad t = 1, \ldots, n-1, \\ \lambda_n^{\frac{\nu+p}{2}-1}\exp - \frac{1}{2}\left[\nu + \sum_{j=1}^p \frac{\tilde{y}_{jn}^2}{\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}\exp(\alpha_{jn})}\right]\lambda_n, \\ \qquad\qquad t = n, \end{cases}$$

$$c_{jt} = \rho_j\sqrt{\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}/(\sigma_{j,\eta\eta}\lambda_t)}\,(\alpha_{j,t+1} - \phi_j\alpha_{jt}) \times \exp(\alpha_{jt}/2),$$

したがって $t=1, \ldots, n-1$ の時には提案分布を

$$\mathcal{G}\left(\frac{\nu+p}{2}, \frac{1}{2}\left[\nu + \sum_{j=1}^p \frac{\tilde{y}_{jt}^2}{\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}(1-\rho_j^2)\exp(\alpha_{jt})}\right]\right).$$

$(t<n)$ としてM-Hアルゴリズムを行い[8]，$t=n$ のときには

$$\lambda_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{\nu+p}{2}, \frac{1}{2}\left[\nu + \sum_{j=1}^p \frac{\tilde{y}_{jn}^2}{\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}\exp(\alpha_{jn})}\right]\right).$$

とすればよい．

Step 6. $\boldsymbol{\zeta}$ のサンプリング．

ζ_{jt} の事後確率密度関数は

$$\pi(\zeta_{jt}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{\phi}, \{\boldsymbol{\Sigma}_j\}_{j=1}^p, \boldsymbol{\alpha}_t, \nu, \lambda_t, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{y}_t)$$

$$\propto \exp\left[-\frac{\{y_{jt} - a_{jt} - (\exp(\zeta_{jt}) - 1)q_{jt} - c_{jt}\}^2\lambda_t}{2\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}(1-\rho_j^2)\exp(\alpha_{jt})} - \frac{(\zeta_{jt} + 0.5\delta_j^2)^2}{2\delta_j^2}\right]$$

ζ_{jt} は q_{jt} の値によって以下のようにサンプリングする $(j=1, \ldots, p, t=1, \ldots, n)$．

(i) $q_{jt}=0$ のとき．$\zeta_{jt} \sim \mathcal{N}(-0.5\delta_j^2, \delta_j^2)$．

(ii) $q_{jt}=1$ のとき．$t<n$ のときには提案分布を

$$\zeta_{jt} \sim \mathcal{N}\left(\psi_{jt}\left\{-0.5 + \frac{(\tilde{y}_{jt} - c_{jt})\lambda_t}{\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}(1-\rho_j^2)\exp(\alpha_{jt})}\right\}, \psi_{jt}\right),$$

$$\psi_{jt} = \{\delta_j^{-2} + \sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}^{-1}(1-\rho_j^2)^{-1}\exp(-\alpha_{jt})\lambda_t\}^{-1},$$

としてM-Hアルゴリズムを行う．また $t=n$ のときには提案分布を

$$\zeta_{jn} \sim \mathcal{N}\left(\psi_{jn}\left\{-0.5+\frac{\tilde{y}_{jn}\lambda_n}{\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}\exp(\alpha_{jn})}\right\}, \psi_{jn}\right),$$

$$\psi_{jn} = \{\delta_j^{-2}+\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}^{-1}\exp(-\alpha_{jn})\lambda_n\}^{-1},$$

として M-H アルゴリズムを行う．

Step 7. δ のサンプリング．

$\{\delta_j^2\}$ の条件付事後確率密度関数は

$$\pi(\delta_j^2|\boldsymbol{\zeta}_{j\cdot}) \propto \pi(\delta_j^2)\prod_{t=1}^{n} f_N(\zeta_{jt}|-0.5\delta_j^2, \delta_j^2),$$

$$j = 1, \ldots, p,$$

であり，ただし $\pi(\delta_j^2)$ は δ_j^2 の事前確率密度関数である．ν のサンプリングと同様に，条件付事後確率密度関数のモード $\hat{\delta}_j^2$ を求めて切断正規分布 $\mathcal{TN}_{(0,\infty)}(\mu_{\delta,j}, \sigma_{\delta,j}^2)$ を用いて M-H アルゴリズムを行えばよい．

$$\sigma_{\delta,j}^2 = \left(-\frac{\partial^2 \log \pi(\delta_j^2|\boldsymbol{\zeta}_{j\cdot})}{\partial^2 \delta_j^2}\bigg|_{\delta_j^2=\hat{\delta}_j^2}\right)^{-1},$$

$$\mu_{\delta,j} = \hat{\delta}_j^2 + \sigma_{\delta,j}^2\left(\frac{\partial \log \pi(\delta_j^2|\boldsymbol{\zeta}_{j\cdot})}{\partial \delta_j^2}\bigg|_{\delta_j^2=\hat{\delta}_j^2}\right)$$

Step 8. $\boldsymbol{\kappa}$ のサンプリング．

κ_j の事後分布はベータ分布であり，

$$\kappa_j|\boldsymbol{q}_{j\cdot} \sim \mathcal{B}(a_{0j}^{\kappa}+n_{1j}, b_{0j}^{\kappa}+n_{0j}), j = 1, \ldots, p,$$

と発生すればよい $(j=1, \ldots, p)$．ただし n_{0j} は $\{q_{jt}=0\}$ となる個数，$n_{1j}=n-n_{0j}$ は $\{q_{jt}=1\}$ となる個数である．

Step 9. $\boldsymbol{q}$ のサンプリング．

$\{q_{jt}\}$ の事後確率関数は次のように与えられる $(j=1, \ldots, p, t=1, \ldots, n-1)$．

$$\pi(q_{jt} = 1|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \phi_j, \boldsymbol{\Sigma}_j, \alpha_{jt}, \lambda_t, \kappa_j, \zeta_{jt}, y_{it})$$
$$\propto \kappa_j f_N(y_{jt}|a_{jt}+c_{jt}+\{\exp(\zeta_{jt})-1\},$$
$$\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}(1-\rho_j^2)\exp(\alpha_{jt})\lambda_t^{-1}),$$

$$\pi(q_{jt} = 0|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_t, \phi_j, \boldsymbol{\Sigma}_j, \alpha_{jt}, \lambda_t, \kappa_j, y_{it})$$
$$\propto (1-\kappa_j) f_N(y_{jt}|a_{jt}+c_{jt}, \sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}(1-\rho_j^2)$$
$$\exp(\alpha_{jt})\lambda_t^{-1}).$$

また $t=n$ の時には

$$\pi(q_{jn} = 1|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_n, \phi_j, \sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}, \alpha_{jn}, \lambda_n, \kappa_j, \zeta_{in}, y_{jn})$$
$$\propto \kappa_j f_N(y_{in}|a_{jn}+\{\exp(\zeta_{jn})-1\},$$
$$\sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}\exp(\alpha_{it})\lambda_n^{-1}),$$

$$\pi(q_{jn} = 0|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}_n, \phi_j, \sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}, \alpha_{jn}, \lambda_n, \kappa_j, y_{jn})$$
$$\propto (1-\kappa_j) f_N(y_{jn}|a_{jn}, \sigma_{j,\varepsilon\varepsilon}\exp(\alpha_{jn})\lambda_n^{-1})$$

となる．

4. おわりに

本稿では多変量確率的ボラティリティ変動モデルに共通因子を導入し，収益率と共通因子の双方に非対称性のある確率的ボラティリティ変動モデルを取り上げ，マルコフ連鎖モンテカルロ法による推定方法を提案した．効率的なサンプリング方法は block sampler に基づいており，真の事後分布からの厳密なサンプリングを行った．しかし，1変量モデルでは，混合正規分布による近似に基づく mixture sampler のサンプリング方法が最も効率的であることが知られており，mixture sampler を応用しかつ厳密に真の事後分布からのサンプリングを行う方法についても検討する必要がある．また収益率の分布では t 分布に従う誤差項を考えたが，さまざまな分布の裾の厚みや歪みを表現することのできる Generalized Hyperbolic 分布 (Barndorff-Neilsen and Shephard (2001), Aas and Haff (2006)) が金融時系列の分析において近年注目を集めている．この Generalized Hyperbolic 分布を取り入れたモデルへの拡張を行い，相関行列が時間とともに変動するモデルの推定を行うこともまた今後の課題である．

補論：非対称性のある1変量確率的ボラティリティ変動モデルのための block sampler

この補論では非対称性のある1変量確率的ボラティリティ変動モデルのための block sampler について説明を行う．まず，block sampler でのサンプリングを容易にするために，パラメータを $\sigma_\varepsilon = \exp(\mu/2)$ としたモデルを考える．

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t\sigma_\varepsilon\exp(\alpha_t/2), t = 1, \ldots, n, \\ \alpha_{t+1} &= \phi\alpha_t+\eta_t\sigma_\eta, t = 1, \ldots, n-1, \\ \alpha_1 &= \eta_0\sigma_\eta/\sqrt{1-\phi^2} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2/(1-\phi^2)), \end{aligned} \tag{29}$$

ただし $|\phi|<1$ であり

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_t \\ \eta_t\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & \rho \\ \rho & 1\end{pmatrix}\right).$$

とする．潜在変数 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 及びパラメータ $(\phi, \boldsymbol{\Sigma})$ のサンプリングは以下の3ステップで行われる．ただし

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2 & \rho\sigma_\varepsilon\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\varepsilon\sigma_\eta & \sigma_\eta^2\end{pmatrix}.$$

とおく．

Step 1. $\phi|\{\alpha_t\}_{t=1}^n, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{y}$ を発生させる．

Step 2. $\boldsymbol{\Sigma}|\{\alpha_t\}_{t=1}^n, \phi, \boldsymbol{y}$ を発生させる．

Step 3. $\{\alpha_t\}_{t=1}^n|\phi, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{y}$ を発生する．

Step 3a. K 個の節(knot) $(k_1, \ldots, k_K)$ を確率的に

$k_i = \mathrm{int}[n\times(i+U_i)/(K+2)]$,

$i=1, \ldots, K$, $U_i \sim i.i.d.\ \mathcal{U}(0,1)$,

と発生させ($k_i - k_{i-1} \geq 2$ とする)，$k_0 = 0$, $k_{K+1} = n$ とおく．

Step 3b. $\{\alpha_t\}_{t=k_{i-1}+1}^{k_i}|\{\alpha_t|t \leq k_{i-1}, t > k_i\}$, $\phi, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{y}$ を block sampler によって発生させる $(i=1, \ldots, K+1)$．

具体的な手順は以下の通りである．

Step 1. ϕ のサンプリング．

$\pi(\phi)$ を ϕ の事前確率密度関数とすれば，対数事後確率密度関数は定数項を除いて

$$\log \pi(\phi) + \frac{1}{2}\log(1-\phi^2) - \frac{\alpha_1^2(1-\phi^2)}{2\sigma_\eta^2} - \frac{\sum_{t=1}^{n-1}\{\alpha_{t+1} - \phi\alpha_t - \rho\sigma_\eta\sigma_\varepsilon^{-1}\exp(-\alpha_t/2)y_t\}^2}{2(1-\rho^2)\sigma_\eta^2}$$

となるので，以下のような区間 $(-1, 1)$ 上で切断された，平均 μ_ϕ，分散 σ_ϕ^2 の正規分布 ($\phi \sim \mathcal{TN}_{(-1,1)}(\mu_\phi, \sigma_\phi^2)$) から候補 ϕ_y を発生する．

$$\mu_\phi = \frac{\sum_{t=1}^{n-1}\alpha_t(\alpha_{t+1} - \rho\sigma_\eta\sigma_\varepsilon^{-1}\exp^{-\alpha_t/2}y_t)}{\rho^2\alpha_1^2 + \sum_{t=2}^{n-1}\alpha_t^2},$$

$$\sigma_\phi^2 = \frac{(1-\rho^2)\sigma_\eta^2}{\rho^2\alpha_1^2 + \sum_{t=2}^{n-1}\alpha_t^2}.$$

現在の点を ϕ_x とすれば $\phi_y \sim \mathcal{TN}_{(-1,1)}(\mu_\phi, \sigma_\phi^2)$ を候補として発生させて，確率

$$\min\left\{\frac{\pi(\phi_y)\sqrt{1-\phi_y^2}}{\pi(\phi_x)\sqrt{1-\phi_x^2}}, 1\right\}.$$

で採択すればよい．

Step 2. $\boldsymbol{\Sigma}$ のサンプリング．

$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ が $(\nu_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ を母数とするウィッシャート分布 ($\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim \mathcal{W}(\nu_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$)．に従うとすれば $\boldsymbol{\Sigma}$ の対数事後確率密度関数は定数項を除いて

$$-\log\sigma_\eta - \frac{\alpha_1^2(1-\phi^2)}{2\sigma_\eta^2} - \frac{\nu_1+3}{2}\log|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}),$$

ただし

$$\nu_1 = \nu_0 + n - 1, \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} + \sum_{t=1}^{n-1}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t',$$

$$\boldsymbol{x}_t = (y_t\exp(-\alpha_t/2), \alpha_{t+1} - \phi\alpha_t).$$

となるので，$\boldsymbol{\Sigma}$ の候補として $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim \mathcal{W}(\nu_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$．を発生させ，M-H アルゴリズムを行えばよい．現在の点を $\boldsymbol{\Sigma}_x^{-1}$ とするとき，$\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \sim \mathcal{W}(\nu_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ を発生させ，確率

$$\min\left\{\frac{\sigma_{\eta,y}^{-1}\exp - \dfrac{\alpha_1^2(1-\phi^2)}{2\sigma_{\eta,y}^2}}{\sigma_{\eta,x}^{-1}\exp - \dfrac{\alpha_1^2(1-\phi^2)}{2\sigma_{\eta,x}^2}}, 1\right\}.$$

で採択すればよい．

Step 3. $(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ のサンプリング．

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を所与としたときに y_t の条件付分布は平均 μ_t，分散 σ_t^2 の正規分布で

$$\mu_t = \begin{cases} \rho\sigma_\varepsilon\sigma_\eta^{-1}(\alpha_{t+1} - \phi\alpha_t)\exp(\alpha_t/2), & t = 1, \ldots, n-1, \\ 0, & t = n, \end{cases} \tag{30}$$

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} (1-\rho^2)\sigma_\varepsilon^2\exp(\alpha_t), & t = 1, \ldots, n-1, \\ \sigma_\varepsilon^2\exp(\alpha_n), & t = n. \end{cases} \tag{31}$$

であるから，条件付対数尤度関数は(定数項を除いて)

$$l_t = -\frac{\alpha_t}{2} - \frac{(y_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}. \tag{32}$$

となる．今 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{s+m})'$ をサンプリングしたいとすると，対応する誤差項 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_{s+m-1})'$ の対数条件付事後確率密度関数は，定数項を除いて $-\sum_{t=s}^{s+m-1}\eta_t^2/2 + L$ である．ただし

$$L = \begin{cases} \sum_{t=s}^{s+m} l_s - \dfrac{(\alpha_{s+m+1} - \phi\alpha_{s+m})^2}{2\sigma_\eta^2}, & s+m < n, \\ \sum_{t=s}^{s+m} l_s & s+m = n. \end{cases}$$

である．まず d_t, A_t, B_t, Q_t を以下のように定義する．

$$d_t = \frac{\partial L}{\partial \alpha_t} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(y_t-\mu_t)^2}{2\sigma_t^2} + \dfrac{(y_t-\mu_t)}{\sigma_t^2}\dfrac{\partial\mu_t}{\partial\alpha_t} \\ \quad + \dfrac{(y_{t-1}-\mu_{t-1})}{\sigma_{t-1}^2}\dfrac{\partial\mu_{t-1}}{\partial\alpha_t}, \\ \quad t = s+1, \ldots, s+m-1, \text{or } t = s+m = n, \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(y_t-\mu_t)^2}{2\sigma_t^2} + \dfrac{(y_t-\mu_t)}{\sigma_t^2}\dfrac{\partial\mu_t}{\partial\alpha_t} \\ \quad + \dfrac{(y_{t-1}-\mu_{t-1})}{\sigma_{t-1}^2}\dfrac{\partial\mu_{t-1}}{\partial\alpha_t} + \dfrac{\phi(\alpha_{t+1}-\phi\alpha_t)}{\sigma_\eta^2}, \\ \quad t = s+m < n, \end{cases} \tag{33}$$

$$A_t = -E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_t^2}\right)$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{1}{2}+\sigma_t^{-2}\left(\dfrac{\partial\mu_t}{\partial\alpha_t}\right)^2+\sigma_{t-1}^{-2}\left(\dfrac{\partial\mu_{t-1}}{\partial\alpha_t}\right)^2, \\ \quad t=s+1,\ldots,s+m-1, \text{or } t=s+m=n, \\ \dfrac{1}{2}+\sigma_t^{-2}\left(\dfrac{\partial\mu_t}{\partial\alpha_t}\right)^2+\sigma_{t-1}^{-2}\left(\dfrac{\partial\mu_{t-1}}{\partial\alpha_t}\right)^2+\phi^2\sigma_\eta^{-2}, \\ \quad t=s+m<n, \end{cases} \tag{34}
$$

$$
B_t = -E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_t\partial\alpha_{t-1}}\right) = \sigma_{t-1}^{-2}\frac{\partial\mu_{t-1}}{\partial\alpha_{t-1}}\frac{\partial\mu_{t-1}}{\partial\alpha_t},
$$

$$
t=2,\ldots,n. \tag{35}
$$

$$
\boldsymbol{Q} = -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}'}\right]
$$

$$
= \begin{pmatrix} A_{s+1} & B_{s+2} & O & \cdots & O \\ B_{s+2} & A_{s+2} & B_{s+3} & \ddots & \vdots \\ O & B_{s+3} & A_{s+3} & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_{s+m} \\ O & \cdots & O & B_{s+m} & A_{s+m} \end{pmatrix}, \tag{36}
$$

ただし

$$
\frac{\partial\mu_t}{\partial\alpha_t} = \begin{cases} \dfrac{\rho\sigma_\varepsilon}{\sigma_\eta}\left\{-\phi+\dfrac{(\alpha_{t+1}-\phi\alpha_t)}{2}\right\}\exp\left(\dfrac{\alpha_t}{2}\right), \\ \qquad\qquad t=1,\ldots,n-1, \\ 0, \\ \qquad\qquad t=n, \end{cases} \tag{37}
$$

$$
\frac{\partial\mu_{t-1}}{\partial\alpha_t} = \begin{cases} 0, & t=1, \\ \dfrac{\rho\sigma_\varepsilon}{\sigma_\eta}\exp\left(\dfrac{\alpha_{t-1}}{2}\right), & t=2,\ldots,n. \end{cases} \tag{38}
$$

ここで期待値は $y_t|\boldsymbol{\alpha}_t$ に関してとられている．Q は情報行列であるが，解析的に求まらない場合には，数値的に計算しても良い(ただし正値定符号でなければならない)．このとき，条件付事後確率密度関数 $f(\boldsymbol{\eta}|\alpha_s, \alpha_{s+m+1}, y_s, \ldots, y_{s+m})$ は次のように近似することができる(Omori and Watanabe(2007))．

$$
\begin{aligned} &\log f(\boldsymbol{\eta}|\alpha_s, \alpha_{s+m+1}, y_s, \ldots, y_{s+m}) \\ &\quad = \text{const}-\frac{1}{2}\sum_{t=s}^{s+m-1}\eta_t^2+L \\ &\quad \approx \text{const}-\frac{1}{2}\sum_{t=s}^{s+m-1}\eta_t^2+\hat{L}+\hat{\boldsymbol{d}}'(\boldsymbol{\alpha}-\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \\ &\qquad -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\hat{\boldsymbol{\alpha}})'\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\alpha}-\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \\ &\quad \equiv \text{const}+\log f^*(\boldsymbol{\eta}|\alpha_s, \alpha_{s+m+1}, y_s, \ldots, y_{s+m}) \end{aligned} \tag{39}
$$

ただし $\hat{\boldsymbol{d}}, \hat{L}, \hat{\boldsymbol{Q}}$ は $\boldsymbol{d}, L, \boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}$(つまり $\boldsymbol{\eta}=\hat{\boldsymbol{\eta}}$)で評価したものである．また近似に用いる確率密度関数 $f^*(\boldsymbol{\eta}|\alpha_s, \alpha_{s+m+1}, y_s, \ldots, y_{s+m})$ は以下の(40)-(41)式に示すような線形ガウス状態空間モデルから得られる状態誤差項の事後確率密度関数である(Omori and Watanabe(2007))．始めに攪乱項 $\boldsymbol{\eta}$ の条件付事後確率密度関数のモードを以下の攪乱項スムーザにより求める．

攪乱項スムーザ(Omori and Watanabe(2007))

1. $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ の初期値を選び，$\boldsymbol{\eta}=\hat{\boldsymbol{\eta}}$ として(29)式から逐次的に $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ を計算する．
2. $\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ として(33)-(35)式から $\hat{d}_t, \hat{A}_t$, and $\hat{B}_t$ を計算する ($t=s+1,\ldots,s+m$)．
3. さらに D_t, J_t, b_t を次のように $t=s+2,\ldots,s+m$ として計算する．

$$
\begin{aligned} D_t &= \hat{A}_t-\hat{B}_t^2 D_{t-1}^{-1}, \quad D_{s+1}=\hat{A}_{s+1}, \\ J_t &= K_{t-1}^{-1}\hat{B}_t, \quad J_{s+1}=0, J_{s+m+1}=0, \\ b_t &= \hat{d}_t-J_t K_{t-1}^{-1}b_{t-1}, \quad b_{s+1}=\hat{d}_{s+1}, \end{aligned}
$$

ここで $K_t=\sqrt{D_t}$ である．

4. 補助変数を $\hat{y}_t=\hat{\gamma}_t+D_t^{-1}b_t$ where

$$
\hat{\gamma}_t = \hat{a}_t+K_t^{-1}J_{t+1}\hat{a}_{t+1}, \ t=s+1,\ldots,s+m,
$$

と定義する．

5. 近似モデルとして線形ガウス状態空間モデル

$$
\hat{y}_t = Z_t\alpha_t+\boldsymbol{G}_t\boldsymbol{\xi}_t, \ t=s+1,\ldots,s+m, \tag{40}
$$

$$
\alpha_{t+1} = \phi\alpha_t+\boldsymbol{H}_t\boldsymbol{\xi}_t, \ t=s,s+1,\ldots,s+m, \tag{41}
$$

$$
\boldsymbol{\xi}_t = (\varepsilon_t, \eta_t)' \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}),
$$

を考える．ただし

$$
Z_t = 1+K_t^{-1}J_{t+1}\phi, \ \boldsymbol{G}_t = K_t^{-1}(1, J_{t+1}R_t),
$$

$$
\boldsymbol{H}_t = (0, R_t).
$$

である．この線形ガウス状態空間モデル(40)(41)を用いて線形ガウス状態空間モデルのためのカルマン・フィルタと攪乱項スムーザ(Koopman(1993))を適用し，事後密度のモードを求めて $\hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}$ とする．

6. 2に戻る．

マルコフ連鎖モンテカルロ法においては，$\hat{\boldsymbol{\eta}}$ の初期値としては，現在の標本を用いればよく，上記のアルゴリズムを数回程度繰り返せば十分であることが多い．次に $\boldsymbol{\eta}$ の条件付事後分布から，提案密度として $q(\boldsymbol{\eta})\propto\min(f(\boldsymbol{\eta}_y), cf^*(\boldsymbol{\eta}_y))$ を用いて M-H アルゴリズムによりサンプリングする(例えば Tierney(1994), Chib and Greenberg(1995))．

シミュレーション・スムーザ(Omori and Watanabe(2007))

1. 現在の点を $\boldsymbol{\eta}_x$ として攪乱項スムーザ(Omori and Watanabe(2007))のステップ2-4を行い，線形ガウス状態空間モデル(40)-(41)を求める．
2. 候補 $\boldsymbol{\eta}_y$ を受容・棄却法により $q(\boldsymbol{\eta}_y) \propto \min(f(\boldsymbol{\eta}_y), cf^*(\boldsymbol{\eta}_y))$ からサンプリングする[9]．
   (i) 攪乱項 $\boldsymbol{\eta}_y \sim f^*$ を線形ガウス状態空間モデルのためのシミュレーション・スムーザ(de Jong and Shephard(1995), Durbin and Koopman(2002))を用いて線形ガウス状態空間モデル(40)-(41)からサンプリングする．
   (ii) $\boldsymbol{\eta}_y$ を確率
   $$\frac{\min(f(\boldsymbol{\eta}_y), cf^*(\boldsymbol{\eta}_y))}{cf^*(\boldsymbol{\eta}_y)}.$$
   で受容する．棄却された場合には(i)に戻る．
3. 候補 $\boldsymbol{\eta}_y$ を用いてM-Hアルゴリズムを行う．現在の点を $\boldsymbol{\eta}_x$ とし，候補の点 $\boldsymbol{\eta}_y$ を確率
   $$\min\left\{1, \frac{f(\boldsymbol{\eta}_y)\min(f(\boldsymbol{\eta}_x), cf^*(\boldsymbol{\eta}_x))}{f(\boldsymbol{\eta}_x)\min(f(\boldsymbol{\eta}_y), cf^*(\boldsymbol{\eta}_y))}\right\}.$$
   で受容する．もし棄却された場合には現在の点 $\boldsymbol{\eta}_x$ を標本とする．

(東京大学大学院経済学研究科・経済学部)

注

1) Shephard and Pitt(1997)のアルゴリズムには誤りがあり，Watanabe and Omori(2004)により修正が行われている．

2) Jacquier, Polson and Rossi(2004)では相関を考慮する時点がずれているため，非対称性を考慮しているとは厳密には言い難い．しかし，同様なアルゴリズムを適切な時点での相関を考慮したモデルについて適用することは容易である．

3) Chan, Kohn and Kirby(2006)も $\Sigma_{\varepsilon\eta} \neq O$ のモデルを扱っているが，パラメタライゼーションがやや特殊である．

4) Bauwens, Laurent and Rombouts(2006)は多変量GARCHモデルのサーベイを行っている．

5) Chib, Nardari and Shephard(2006)では1階の導関数を導出している．また
$\Omega_t^{-1} = (V_t^*)^{-1} - (V_t^*)^{-1}B\{D_t^{-1} + B'(V_t^*)^{-1}B\}^{-1}B(V_t^*)^{-1}$
である．

6) Chib, Nardari and Shephard(2002)では対数関数の定義域が必ず正となるように，正数 c を便宜的に加えて $z_{jt} = \log(y_{jt}^2 + c)$ としている．正数 c は事後分布からのシミュレーションに影響を与えないような非常に小さい値 $c = 10^{-6}$ にとられている．

7) Omori, Chib, Shephard and Nakajima(2007)は成分の個数を10としてさらに近似精度を改善した数値を与えている．

8) ν のサンプリングにおけるように条件付事後確率密度関数のモードを求めて，モードの周りで正規分布による近似を行い，これを提案分布とするM-Hアルゴリズムを行っても良い．

9) c の対数値は(39)における定数項と $\hat{L}$ から構成することができる．

参考文献

Aas, K. and I. H. Haff (2006) "The Generalized Hyperbolic Skew Student's t-Distribution," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 2, pp. 275-309.

Aguilar, O. and M. West (2000) "Bayesian Dynamic Factor Models and Portfolio Allocation," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 18, No. 3, pp. 338-357.

Asai, M. and M. McAleer (2006) "Asymmetric Multivariate Stochastic Volatility," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2-3, pp. 453-473.

Asai, M., M. McAleer and J. Yu (2006) "Multivariate Stochastic Volatility: A Review," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2-3, pp. 145-175.

Barndorff-Neilsen, O. E. and N. Shephard (2001) "Non-Gaussian Ornstein-Ulhlenbeck-based Models and Some of Their Uses in Financial Economics," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 63, No. 2, pp. 167-241.

Bauwens, L., S. Laurent and J. V. K. Rombouts (2006) "Multivariate GARCH: A Survey," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 21, No. 1, pp. 79-109.

Calvet, L. E., A. J. Fisher and Samuel, B. Thompson (2006) "Volatility Comovement: A Multifrequency Approach," *Journal of Econometrics*, Vol. 131, No. 1-2, pp. 179-215.

Chan, D., R. Kohn and C. Kirby (2006) "Multivariate Stochastic Volatility Models with Correlated Errors," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2&3, pp. 245-274.

Chib, S. and E. Greenberg (1995) "Hierarchical Analysis of SUR Models with Extensions to Correlated Serial Errors and Time Varying-parameter Mmodels," *Journal of Econometrics*, Vol. 68, No. 2, pp. 339-360.

Chib, S., F. Nardari and N. Shephard (2002) "Markov Chain Monte Carlo Methods for Generalized Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 108, No. 2, pp. 281-316.

Chib, S., F. Nardari and N. Shephard (2006) "Analysis of High Dimensional Multivariate Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 134, No. 2, pp. 341-371.

Danielsson, J. (1994) "Stochastic Volatility in Asset Prices: Estimation with Simulated Maximum

Likelihood," *Journal of Econometrics*, Vol. 64, No. 1-2, pp. 375-400.

Danielsson, J. (1998) "Multivariate Stochastic Volatility Models: Estimation and a Comparison with VGARCH Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 5, No. 2, pp. 155-173.

de Jong, P. and N. Shephard (1995) "The Simulation Smoother for Time Series Models," *Biometrika*, Vol. 82, No. 2, pp. 339-350.

Durbin, J. and S. J. Koopman (2002) "A Simple and Efficient Simulation Smoother for State Space Time Series Analysis," *Biometrika*, Vol. 89, No. 3, pp. 603-616.

Engle, R. F. (2002) "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20, No. 3, pp. 339-350.

Gourieroux, C., J. Jasiak and R. Sufana (2004) "The Wishart Autoregressive Process of Multivariate Stochastic Volatility," Discussion paper: University of Toronto.

Han, Y. (2006) "Asset Allocation with a High Dimensional Dynamic Latent Factor Multivariate Stochastic Volatility Model," *Review of Financial Studies*, Vol. 19, No. 1, pp. 237-271.

Harvey, A. C., E. Ruiz and N. Shephard (1994) "Multivariate Stochastic Variance Models," *Review of Economic Studies*, Vol. 61, No. 2, pp. 247-264.

Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi (1994) "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models (with Discussion)," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 12, No. 4, pp. 371-389.

Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi (1999) "Stochastic Volatility: Univariate and Multivariate Extensions," CIRANO Working Paper 99s-26, Montreal.

Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi (2004) "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility with Fat-Tails and Correlated Errors," *Journal of Econometrics*, Vol. 122, No. 1, pp. 185-212.

Jungbacker, B. and S. J. Koopman (2006) "Monte Carlo Likelihood Estimation for Three Multivariate Stochastic Volatility Models," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2-3, pp. 385-408.

Kawakatsu, H. (2006) "Matrix Exponential GARCH," *Journal of Econometrics*, Vol. 134, No. 1, pp. 95-128.

Kim, S., N. Shephard and S. Chib (1998) "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," *Review of Economic Studies*, Vol. 65, No. 3, pp. 361-393.

Koopman, S. J. (1993) "Disturbance Smoother for State Space Models," *Biometrika*, Vol. 80, No. 1, pp. 117-126.

Liesenfeld, R. and J.-F. Richard (2003) "Univariate and Multivariate Stochastic Volatility Models: Estimation and Diagnostics," *Journal of Emprical Finance*, Vol. 10, No. 4, pp. 505-531.

Lopes, H. F. and C. M. Carvalho (2006) "Factor Stochastic Volatility with Time Varying Loadings and Markov Switching Regimes," *Journal of Statistical Planning and Inference*, forthcoming.

Omori, Y., S. Chib, N. Shephard and J. Nakajima (2007) "Stochastic Volatility with Leverage: Fast Likelihood Inference," *Journal of Econometrics*, Vol. 140, pp. 425-449.

Omori, Y. and T. Watanabe (2007) "Block Sampler and Posterior Mode Estimation for Asymmetric Stochastic Volatility Models," *Computational Statistics and Data Analysis*, forthcoming.

Philipov, A. and M. E. Glickman (2006a) "Factor Multivariate Stochastic Volatility Via Wishart Processes," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2-3, pp. 311-334.

Philipov, A. and M. E. Glickman (2006b) "Multivariate Stochastic Volatility Via Wishart Processes," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 24, No. 3, pp. 313-328.

Pitt, M. K. and N. Shephard (1999) "Time Varying Covariances: A Factor Stochastic Volatility Approach," in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds.), *Bayesian Statistics*, Volume 6, pp. 547-570, Oxford University Press.

Quintana, J. M. and M. West (1987) "An Analysis of International Exchange Rates Using Multivariate DLMs," *The Statistician*, Vol. 36, No. 2-3, pp. 275-281.

Ray, B. K. and R. S. Tsay (2000) "Long-range Dependence in Daily Stock Volatilities," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 18, No. 2, pp. 254-262.

Shephard, N. and M. K. Pitt (1997) "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika*, Vol. 84, No. 3, pp. 653-667.

Smith, M. and A. Pitts (2006) "Foreign Exchange Intervention by the Bank of Japan: Bayesian Analysis Using a Bivariate Stochastic Volatility Model," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2, pp. 425-451.

So, M. K. P., K. Lam and W. K. Li (1998) "A Stochastic Volatility Model with Markov Switching," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 16, No. 2, pp. 244-253.

Tierney, L. (1994) "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions," *Annals of Statistics*, Vol. 22, No. 4, pp. 1701-1762.

Tims, B and R Mahieu (2006) "A Range-Based Multivariate Stochastic Volatility Model for Exchange Rates," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2-3, pp. 409-424.

Tsay, R. S. (2005) *Analysis of Financial Time Series : Financial Econometrics* (*2 ed.*), New York : Wiley.

Watanabe, T. (2001) "On Sampling the Degree-of-Freedom of Student's-t Disturbances," *Statistics and Probabiity Letters*, Vol. 52, No. 2, pp. 177-181.

Watanabe, T. and Y. Omori (2004) "A Multi-move Sampler for Estimating Non-Gaussian Times Series Models : Comments on Shephard and Pitt (1997)," *Biometrika*, Vol. 91, No. 1, pp. 246-248.

Yu, J. and R. Meyer (2006) "Multivariate Stochastic Volatility Models : Bayesian Estimation and Model Comparison," *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2-3, pp. 361-384.