

マルコフ・スイッチング GARCH モデルによる ボラティリティの予測

—Realized Volatility を用いたモデル比較—*

里 吉 清 隆

本稿では、GARCH モデルを拡張したマルコフ・スイッチング GARCH (MSGARCH) モデルを用いたボラティリティの予測を提案し、従来の GARCH モデルとの予測力の比較を行った。MSGARCH モデルはこれまでに代表的なものとして 3 種類のモデルが考案されているが、それぞれのモデルの定式化の違いを述べ、パラメータの推定法とボラティリティの予測法を解説した。モデル比較の際には、真のボラティリティの代理変数として、日中の収益率から計算される Realized Volatility を使用している。TOPIX を用いた実証分析の結果、GARCH モデルの代わりに MSGARCH モデルを用いても、全体的にはボラティリティの予測力は高まらないことが明らかになった。しかしながら、ボラティリティが極端に低い時期においては GARCH モデルではボラティリティの変動を捉えることができず、MSGARCH モデルの方が優れていることが示された。

1. はじめに

ボラティリティは金融資産の投資リスクを表す指標であり、その時系列的変動の特性を明らかにすることはリスク管理を行う上で非常に重要である。Engle(1982)はその変動を明示的に捉えるために、各時点のボラティリティを過去の予期しないショックの 2 乗の線型関数として定式化する ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルを提案した。また、Bollerslev(1986)はボラティリティの説明変数に過去のボラティリティの値を加えて、GARCH (Generalized ARCH) モデルと呼ばれるより一般的なモデルに拡張している。

ところで、ARCH モデルを始めとしたボラティリティ変動モデルの研究では、一般に、ボラティリティに対するショックの持続性が非常に高いことが知られている。しかし、Diebold (1986) と Lamoureux and Lastrapes (1990) が指摘したように、ボラティリティには高い時期と低い時期があり、そのようなスイッチングによってモデルの持続性を表すパラメータの値が高くなっている可能性がある。そこで、Hamilton and Susmel(1994)は、ARCH モデルの定式化にマルコフ過程に従う状態変数を含

めたマルコフ・スイッチング ARCH (markov-switching ARCH; MSARCH) モデルを提案した。ニューヨーク証券取引所の加重平均ポートフォリオ週次収益率で分析を行なったところ、ショックの持続性の多くはマルコフ・スイッチングの持続性で説明できることが明らかとなった。また、Cai(1994)は同様のアイデアを財務省短期証券(TB)のボラティリティに適用して、スイッチングを導入することにより ARCH モデルの持続性は大幅に減少するという結果を得ている。

MSARCH モデルの拡張として、GARCH モデルにマルコフ・スイッチングを導入したマルコフ・スイッチング GARCH (markov-switching GARCH; MSGARCH) モデルがある。ところが、このモデルは単純に状態変数を GARCH モデルに含めた形では、最尤法によって推定できないことが知られている。なぜなら、次節で述べるように、ある時点の尤度は過去の全ての状態変数に依存しているので、尤度関数を書くことが事実上不可能になってしまうからである。そこで、Gray(1996)は最尤法で推定を行うために、過去の状態変数に依存しないボラティリティの定式化を提案した。MSGARCH モデルはその後、Klaassen(2002)、Haas

et al.(2004)によって改良が加えられた。

里吉(2004a)は、Gray(1996)のMSGARCHモデルを用いてTOPIXの実証分析を行い、TOPIX変化率はスイッチングを起こしていること、また、ボラティリティの予測では、日次収益率の2乗を真のボラティリティの代理変数としてモデルの比較をした結果、従来のGARCHモデルよりも予測力が高いことを示した。しかしながら、Andersen and Bollerslev(1998)が指摘しているように、収益率の2乗はボラティリティ以外の変動を含んでいるため、真のボラティリティの代理変数としては不適当である。そのため最近では、真のボラティリティの精度の高い推定量として知られているRealized Volatility(RV)を代理変数とすることが多くなった¹⁾。そこで、本稿では日次収益率の2乗ではなく、日中の収益率から計算されるRVを用いてモデルの比較を行い、MSGARCHモデルは従来のGARCHモデルよりもボラティリティの予測力において優れているのか、また、MSGARCHモデルのなかではどのモデルが最も良いのか等を検証することにした。

本稿の実証分析にはTOPIXを使用した。1996年から2006年の日次収益率について調べた結果、GARCHモデルの代わりにMSGARCHモデルを用いても、全体的にはボラティリティの予測力は高まらないことが明らかになった。しかしながら、ボラティリティが非常に低い1996年と2005年においては、GARCHモデルではボラティリティの変動を捉えることができず、MSGARCHモデルの方が優れているという結果になった。

本稿の構成は次の通りである。2節では、GARCHモデルと3種類のMSGARCHモデルについて述べ、パラメータの推定法とボラティリティの予測法を解説する。3節は実証結果であり、各モデルの推定結果とボラティリティの予測力の結果をまとめた。4節は結論と今後の課題である。

2. モデル

2.1 GARCHモデル

t 時点の資産価格の収益率を R_t とすると、GARCHモデルは以下のように表される。

$$R_t = \mu + \sqrt{V[R_t|I_{t-1}]}z_t, \quad (2.1)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1, \quad (2.2)$$

$$V[R_t|I_{t-1}] = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta V[R_{t-1}|I_{t-2}], \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{t-1} = R_{t-1} - \mu. \quad (2.4)$$

$V[R_t|I_{t-1}]$ はボラティリティであり、 $t-1$ 時点までの情報集合 $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ を条件とした R_t の条件付き分散となっている。(2.2)式の*i.i.d.*は、過去と独立で同一な分布に従う(independent and identically distributed)ことを表す。

ボラティリティ変動モデルを推定する場合、誤差項の z_t の分布には標準正規分布を仮定することが多い。資産価格の収益率の分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが以前から知られているが、誤差項が正規分布に従っていても、ボラティリティが変動するなら収益率の尖度は3を上回る²⁾。しかし、収益率の尖度の高さがボラティリティの変動だけで説明できるとは限らず、実際、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、誤差項の分布には正規分布と t 分布の両方を考える。誤差項が標準正規分布に従う場合、(2.2)式の z_t は、

$$z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (2.5)$$

となる。 t 分布に従う場合には、

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (2.6)$$

となる。ただし、 ν は自由度であり、 z_t の分散は1に基準化されている。以下では、誤差項が正規分布に従うGARCHモデルをGARCH-nモデル、誤差項が t 分布のモデルをGARCH-tモデルと呼ぶことにする。

2.2 MSGARCH モデル

MSGARCH モデルとは、GARCH モデルにマルコフ過程に従う状態変数を含めたモデルのことであり、以下のように表される。

$$R_t = \mu_{S_t} + \sqrt{V[R_t | \tilde{S}_t, I_{t-1}]} z_t, \quad (2.7)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1, \quad (2.8)$$

$$\mu_{S_t} = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t, \quad (2.9)$$

$$V[R_t | \tilde{S}_t, I_{t-1}] = \omega_{S_t} + \alpha_{S_t} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{S_t} V[R_{t-1} | \tilde{S}_{t-1}, I_{t-2}], \quad (2.10)$$

$$\omega_{S_t} = \omega_0(1 - S_t) + \omega_1 S_t, \quad (2.11)$$

$$\alpha_{S_t} = \alpha_0(1 - S_t) + \alpha_1 S_t, \quad (2.12)$$

$$\beta_{S_t} = \beta_0(1 - S_t) + \beta_1 S_t. \quad (2.13)$$

(2.10) 式の ε_{t-1} は本稿で取り上げる 3 つの MSGARCH モデルによって異なるので、後ほど定義する。 S_t はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率は

$$\begin{aligned} \Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] &= p, \\ \Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 0] &= q \end{aligned} \quad (2.14)$$

であるとする。ただし、 $\Pr[S_t = j | S_{t-1} = i]$ は、状態 i から状態 j に推移する確率である。(2.7)、(2.10) 式の \tilde{S}_t は、 t 時点までの全ての状態変数の集合 $\tilde{S}_t = \{S_t, S_{t-1}, \dots\}$ のことである。このモデルでのボラティリティは $V[R_t | \tilde{S}_t, I_{t-1}]$ と定義される。つまり、 I_{t-1} と \tilde{S}_t を条件とした R_t の条件付き分散となっている。(2.8) 式の z_t であるが、モデルの推定を行ったところ z_t が標準正規分布に従うモデルではパラメータの推定値が収束しなかった。したがって、本稿では t 分布のケースのみを考え、(2.6) 式のように平均 0、分散 1、自由度 ν の t 分布に従うと仮定する。

ところで、このモデルはこのままの定式化では最尤法で推定できないことが知られている。なぜなら、 $V[R_t | \tilde{S}_t, I_{t-1}]$ は t 時点までの全ての状態変数 \tilde{S}_t に依存しているので、 t 時点において 2^t 通りの状態変数の組み合わせを考えなければならず、そのため、コンピュータで計算する際のプログラミングが非常に複雑になってしまうからである³⁾。この問題を回避して最尤推定を行うために、これまでに代表的なも

のとして 3 つのモデルが考案された。最尤推定可能な MSGARCH モデルを最初に提案したのは Gray(1996) であり、その後、Klaassen(2002)、Haas *et al.*(2004) によって改良が加えられた。以下では、それぞれのモデルを MSG-G モデル、MSG-K モデル、MSG-H モデルと呼ぶことにする。

まず、MSG-G モデルでは、収益率とボラティリティの式は以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} R_t &= \mu_{S_t} + \sqrt{V[R_t | S_t, I_{t-1}]} z_t, \\ V[R_t | S_t, I_{t-1}] &= \omega_{S_t} + \alpha_{S_t} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{S_t} V[R_{t-1} | I_{t-2}]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし、(2.15) 式の右辺の ε_{t-1} と $V[R_{t-1} | I_{t-2}]$ は、それぞれ次のように計算される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t-1} &= R_{t-1} - E[R_{t-1} | I_{t-2}] \\ &= R_{t-1} - (\mu_0 \Pr[S_{t-1} = 0 | I_{t-2}] \\ &\quad + \mu_1 \Pr[S_{t-1} = 1 | I_{t-2}]), \\ V[R_{t-1} | I_{t-2}] &= \Pr[S_{t-1} = 0 | I_{t-2}] \\ &\quad \times (\mu_0^2 + V[R_{t-1} | S_{t-1} = 0, I_{t-2}]) \\ &\quad + \Pr[S_{t-1} = 1 | I_{t-2}] \\ &\quad \times (\mu_1^2 + V[R_{t-1} | S_{t-1} = 1, I_{t-2}]) \\ &\quad - (\mu_0 \Pr[S_{t-1} = 0 | I_{t-2}] \\ &\quad + \mu_1 \Pr[S_{t-1} = 1 | I_{t-2}])^2. \end{aligned}$$

この定式化によって、 $V[R_t | S_t, I_{t-1}]$ は t 時点の S_t のみに依存することになり、最尤推定が可能になる。 $\Pr[S_{t-1} | I_{t-2}]$ は Hamilton(1989) のフィルタリング手法(ハミルトン・フィルタ)で求める。

次に、MSG-K モデルにおいては、ボラティリティの式は

$$\begin{aligned} V[R_t | S_t, I_{t-1}] &= \omega_{S_t} + \alpha_{S_t} \varepsilon_{t-1}^2 \\ &\quad + \beta_{S_t} V[R_{t-1} | S_t, I_{t-1}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。MSG-G モデルでの右辺のボラティリティの条件は I_{t-2} であったが、このモデルでは S_t と I_{t-1} を条件としている点異なる。まず、 I_{t-2} ではなく I_{t-1} にすることによって、ボラティリティを計算するときに使われる情報量が増えることになる。また、 t 時点の状態変数 S_t を追加しているため、 S_t の状態が 0 をとるか 1

をとるかによって、1期前のボラティリティの値が違ふ値をとることが可能なモデルになっている。もし、状態変数の持続性が高いのであれば、1期前のボラティリティの値が t 時点の状態にかかわらず1つの値になるMSG-Gモデルよりも、 S_t を条件に入れて1期前のボラティリティが異なる値になることを可能にしたMSG-Kモデルの方が、実際のボラティリティの変動を正確に捉えることができると考えられる。

(2.16)式の ε_{t-1} と $V[R_{t-1}|S_t, I_{t-1}]$ は、それぞれ次のように計算される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t-1} &= R_{t-1} - E[R_{t-1}|S_t, I_{t-1}] \\ &= R_{t-1} - (\mu_0 \Pr[S_{t-1}=0|S_t, I_{t-1}] \\ &\quad + \mu_1 \Pr[S_{t-1}=1|S_t, I_{t-1}]), \quad (2.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V[R_{t-1}|S_t, I_{t-1}] &= \Pr[S_{t-1}=0|S_t, I_{t-1}] \\ &\quad \times (\mu_0^2 + V[R_{t-1}|S_{t-1}=0, I_{t-2}]) \\ &\quad + \Pr[S_{t-1}=1|S_t, I_{t-1}] \\ &\quad \times (\mu_1^2 + V[R_{t-1}|S_{t-1}=1, I_{t-2}]) \\ &\quad - (\mu_0 \Pr[S_{t-1}=0|S_t, I_{t-1}] \\ &\quad + \mu_1 \Pr[S_{t-1}=1|S_t, I_{t-1}])^2. \quad (2.18)\end{aligned}$$

ただし、(2.17)、(2.18)式に含まれる $\Pr[S_{t-1}|S_t, I_{t-1}]$ は次のようにして書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\Pr[S_{t-1}|S_t, I_{t-1}] &= \frac{\Pr[S_{t-1}, S_t|I_{t-1}]}{\Pr[S_t|I_{t-1}]} \\ &= \frac{\Pr[S_{t-1}|I_{t-1}]\Pr[S_t|S_{t-1}, I_{t-1}]}{\Pr[S_t|I_{t-1}]}.\end{aligned}$$

ここで、 $\Pr[S_t|S_{t-1}, I_{t-1}] = \Pr[S_t|S_{t-1}]$ となるので、結局、

$$\Pr[S_{t-1}|S_t, I_{t-1}] = \frac{\Pr[S_{t-1}|I_{t-1}]\Pr[S_t|S_{t-1}]}{\Pr[S_t|I_{t-1}]} \quad (2.19)$$

となる。上式の $\Pr[S_t|S_{t-1}]$ は推移確率であり、(2.14)式で与えられる。また、 $\Pr[S_{t-1}|I_{t-1}]$ と $\Pr[S_t|I_{t-1}]$ はハミルトン・フィルタで求める。

最後に、MSG-Hモデルは次の通りである。

$$R_t = \mu_k + \sqrt{V[R_t|S_t=k, I_{t-1}]} z_t,$$

$$\begin{aligned}V[R_t|S_t=k, I_{t-1}] &= \omega_k + \alpha_k \varepsilon_{k,t-1}^2 \\ &\quad + \beta_k V[R_{t-1}|S_{t-1}=k, I_{t-2}], \quad k=0, 1. \quad (2.20)\end{aligned}$$

ただし、 $\varepsilon_{k,t-1} = R_{t-1} - \mu_k$ である。この定式化によって、 t 時点の状態変数 S_t のとり値と、 $t-1$ 時点までの $\tilde{S}_{t-1} = \{S_{t-1}, S_{t-2}, \dots\}$ の値は同じになる。上式を書き換えると、

$$\begin{aligned}V[R_t|S_t=k, I_{t-1}] &= \omega_k \sum_{i=1}^t \beta_k^{i-1} + \alpha_k \sum_{i=1}^t \beta_k^{i-1} \varepsilon_{k,t-i}^2 + \beta_k^t V[R_0]\end{aligned}$$

となる。この式から明らかのように、結局、 $V[R_t|S_t, I_{t-1}]$ は t 時点の S_t のみに依存することになり、最尤推定が可能になる。

2.3 推定法

この節では、最尤法によるMSGARCHモデルの推定法を解説する。モデルのパラメータをまとめて $\theta = (\mu_0, \mu_1, \omega_0, \omega_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, b, q, \nu)$ とする。このとき、尤度関数 $L(\theta)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}L(\theta) &= f(R_1, R_2, \dots, R_T|\theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(R_t|I_{t-1}; \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{S_t=0}^1 f(R_t, S_t|I_{t-1}; \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{S_t=0}^1 f(R_t|S_t, I_{t-1}; \theta) f(S_t|I_{t-1}; \theta).\end{aligned}$$

状態変数 S_t は観測できないため、 R_t の周辺密度 $f(R_t|I_{t-1}; \theta)$ は R_t と S_t の同時分布 $f(R_t, S_t|I_{t-1}; \theta)$ を S_t について足し合わせて求めることになる。対数尤度関数は

$$\begin{aligned}\ln L(\theta) &= \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{S_t=0}^1 f(R_t|S_t, I_{t-1}; \theta) f(S_t|I_{t-1}; \theta) \right\} \quad (2.21)\end{aligned}$$

となる。(2.21)式の中括弧 $\{\cdot\}$ の中は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\sum_{S_t=0}^1 f(R_t|S_t, I_{t-1}; \theta) f(S_t|I_{t-1}; \theta) \\ &= \frac{\Gamma((\nu_0+1)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu_0/2)} \left(1 + \frac{(R_t - \mu_0)^2}{\sigma_0^2 (\nu_0 - 2)} \right)^{-\frac{\nu_0+1}{2}} \\ &\quad \times (\sigma_0^2)^{-1/2} (\nu_0 - 2)^{-1/2} \times \Pr[S_t=0|I_{t-1}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Gamma((\nu_1+1)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu_1/2)} \left(1 + \frac{(R_t - \mu_1)^2}{\sigma_{1t}^2 (\nu_1 - 2)} \right)^{-\frac{\nu_1+1}{2}} \\
 & \times (\sigma_{1t}^2)^{-\frac{1}{2}} (\nu_1 - 2)^{-\frac{1}{2}} \times \Pr[S_t = 1 | I_{t-1}]. \quad (2.22)
 \end{aligned}
 = \frac{f(R_t | S_t = j, I_{t-1}) \Pr[S_t = j | I_{t-1}]}{\sum_{j=0}^1 f(R_t | S_t = j, I_{t-1}) \Pr[S_t = j | I_{t-1}]} \quad (2.24)$$

ただし、右辺の σ_{0t}^2 , σ_{1t}^2 はそれぞれ $\sigma_{0t}^2 = V[R_t | S_t = 0, I_{t-1}]$, $\sigma_{1t}^2 = V[R_t | S_t = 1, I_{t-1}]$ であり, $\Pr[S_t = 0 | I_{t-1}]$ と $\Pr[S_t = 1 | I_{t-1}]$ は, $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられたもとで $S_t = j$ ($j=0, 1$) となる確率である.

(2.22)式の $\Pr[S_t = 0 | I_{t-1}]$ と $\Pr[S_t = 1 | I_{t-1}]$ は, ハミルトン・フィルタによって求める. 以下では, $i=0, 1, j=0, 1$ は, それぞれ $t-1$ 時点, t 時点の状態を表すことにする. t 時点までの情報 I_t が与えられたときに $S_t = j$ となる確率, つまり, $\Pr[S_t = j | I_t]$ を求めるには, まず, $\Pr[S_{t-1} = i | I_{t-1}]$ が与えられたとして, 次式より $\Pr[S_t = j | I_{t-1}]$ を計算する.

$$\begin{aligned}
 \Pr[S_t = j | I_{t-1}] &= \sum_{i=0}^1 \Pr[S_t = j, S_{t-1} = i | I_{t-1}] \\
 &= \sum_{i=0}^1 \Pr[S_t = j | S_{t-1} = i] \Pr[S_{t-1} = i | I_{t-1}]. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

ただし, $\Pr[S_t = j | S_{t-1} = i]$ は (2.14) 式で与えられる推移確率である.

次に, t 時点のデータ R_t を追加すると,

$$\begin{aligned}
 \Pr[S_t = j | I_t] &= \Pr[S_t = j | I_{t-1}, R_t] \\
 &= \frac{f(S_t = j, R_t | I_{t-1})}{f(R_t | I_{t-1})}
 \end{aligned}$$

となり, この式から $\Pr[S_t = j | I_t]$ を求める. ただし, $I_t = (I_{t-1}, R_t)$ である. 以上の2つの式, (2.23)式と(2.24)式を繰り返すことによって, $t=1, 2, \dots, T$ について $\Pr[S_t = j | I_{t-1}]$ を計算し, (2.22)式に代入する. $t=1$ 時点の計算に必要な $\Pr[S_0 = i | I_0]$ には, 一般に定常確率

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \Pr[S_0 = 0 | I_0] = \frac{1-p}{2-p-q}, \\
 \pi_1 &= \Pr[S_0 = 1 | I_0] = \frac{1-q}{2-p-q}
 \end{aligned}$$

を用いる.

2.4 ボラティリティの予測

本稿では, 1期先のボラティリティの予測を行い, 各モデルの比較をする. MSGARCH モデルでは, 現時点を T としたとき, $T+1$ 時点のボラティリティは次のように表される.

$$\begin{aligned}
 V[R_{T+1} | I_T] &= \Pr[S_{T+1} = 0 | I_T] \\
 & \times (\mu_0^2 + V[R_{T+1} | S_{T+1} = 0, I_T]) \\
 & + \Pr[S_{T+1} = 1 | I_T] \\
 & \times (\mu_1^2 + V[R_{T+1} | S_{T+1} = 1, I_T]) \\
 & - (\mu_0 \Pr[S_{T+1} = 0 | I_T] \\
 & + \mu_1 \Pr[S_{T+1} = 1 | I_T])^2.
 \end{aligned}$$

T 時点までのデータを使ってモデルのパラメ

図1. ボラティリティのみがスイッチングする場合

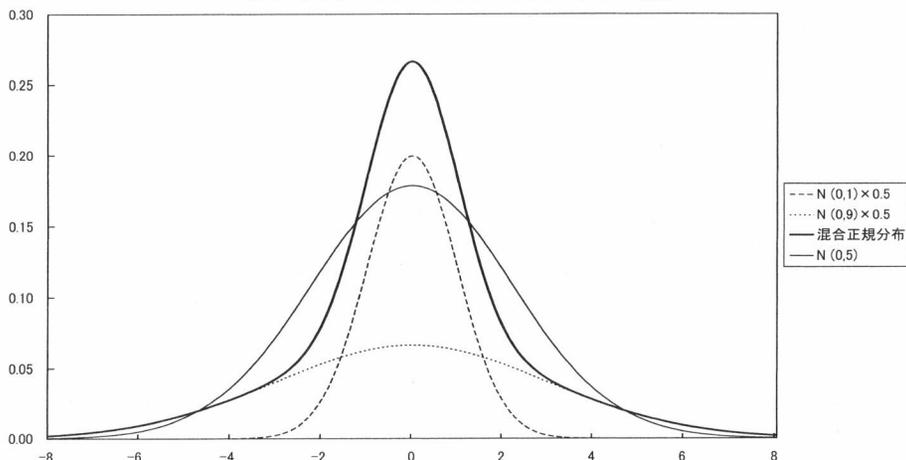
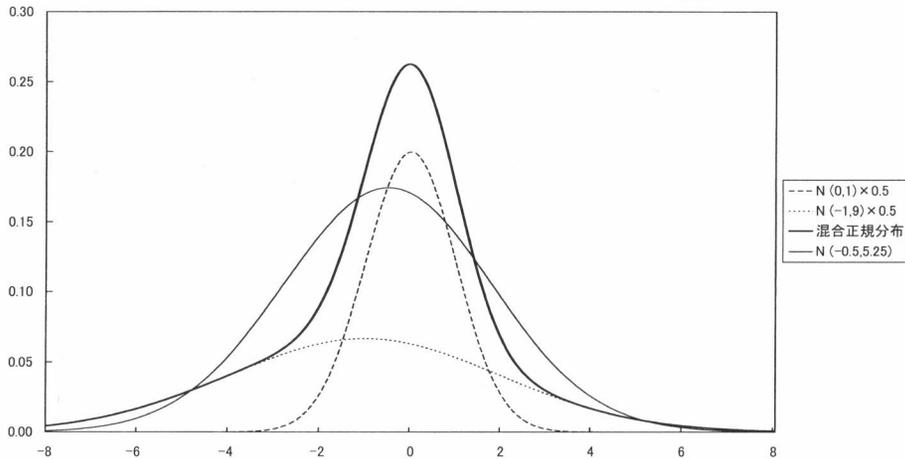


図2. 期待収益率とボラティリティがスイッチングする場合



ータを推定し、この式から1期先のボラティリティを計算することになる。

ところで、MSGARCH モデルにおける R_{T+1} の分布は、 I_T を条件としたとき、期待収益率とボラティリティが異なる2つの分布から構成される混合分布となっている。つまり、 $S_{T+1}=0$ のとき、期待収益率とボラティリティはそれぞれ μ_0 , $V[R_{T+1}|S_{T+1}=0, I_T]$ であり、 $S_{T+1}=1$ のときは μ_1 , $V[R_{T+1}|S_{T+1}=1, I_T]$ となる。図1には、期待収益率は同じ値でボラティリティのみがスイッチングを起こす混合正規分布、図2にはボラティリティだけでなく、期待収益率も値が異なる混合正規分布をそれぞれ図示した⁴⁾。図1の太線は、2つの正規分布 $N(0, 1)$, $N(0, 9)$ からなる混合正規分布(加重値は同じで0.5)のグラフである。この混合正規分布の平均は $E[X]=0$ 、分散は $V[X]=5$ であり、そのような平均と分散を持つ正規分布 $N(0, 5)$ も同時に細線で描いてある。この図から明らかのように、混合正規分布は正規分布よりも裾の厚い分布になる。図2は、2つの正規分布 $N(0, 1)$, $N(-1, 9)$ からなる混合正規分布(加重値は同じで0.5)と、混合正規分布と同じ平均と分散を持つ正規分布 $N(-0.5, 5.25)$ のグラフである。図1のケースとは違い、平均を異なる値にすることによって、混合正規分布は分布の裾の厚さだけでなく、分布の歪みも捉えることができる。したがって、収益率の分布の裾が厚く、かつ左右対称でない

ときには、本稿のモデルのようにボラティリティだけでなく期待収益率もスイッチングさせた方が良いと考えられる。

3. 実証結果

3.1 データ

本稿の実証分析には、東証株価指数(TOPIX)の日次変化率(%)を用いた。変化率はTOPIX終値の自然対数値の階差に100を掛けて求めている。ボラティリティの予測期間は、1996年3月11日から2006年9月29日までの2601日間である。各時点のボラティリティの推定には、求める時点から4000日前までのデータを使用した。

また、RVはTOPIXの5分毎の値を用いて計算した。このような分刻みのデータは、NEEDS-TICKデータから抽出した。東京証券取引所の取引時間は、前場は9:00から11:00まで、後場は12:30から15:00までであるが、NEEDS-TICKデータの記録は、前場は9:01から11:00(もしくは11:00過ぎ)まで、後場は12:31から15:00(もしくは15:00過ぎ)までとなっている。したがって本研究では、前場については9:01, 9:05, 9:10, …, 10:55の値と前場の終値を、後場については12:31, 12:35, 12:40, …, 14:55の値と後場の終値を用いた。RVは、これらのデータの自然対数値の階差に100を掛けることによって変化率(%)を求め、それ

表 1. TOPIX の日次変化率(%)の基本統計量

標本数	平均	標準偏差	歪度	尖度
2601	0.002	1.251	-0.132	4.896

ぞれ 2 乗したものを足し合わせることによって計算した⁵⁾。

TOPIX の日次変化率の基本統計量は表 1 に示した。これらの値は、ボラティリティの予測期間のデータから計算した。歪度は -0.132 であり、負の値になっている。このことは、TOPIX の変化率は左に歪んだ分布に従っていることを示している。尖度の値は 4.896 であり、正規分布よりも裾が厚くなっている。このような裾の厚さは、ボラティリティの変動によって生じている可能性がある。また、図 3 の TOPIX のグラフを見ると、1996 年と 2005 年あたりの変動はそれ以外の期間に比べて極端に低くなっている。これらの結果から、もし期待収益率とボラティリティの変動にスイッチングが起きているならば、従来の GARCH モデルよりも MSGARCH モデルの方が、現実のデータに対する当てはまりが良くなると考えられる。

3.2 モデルの推定結果

GARCH-n モデルのパラメータ推定で得られた 2601 個の推定値の平均値、最小値、最大値は、表 2 に示した。α+β の平均値は 0.993 で

表 2. GARCH-n モデルの推定結果

	μ	ω	α	β	α+β	対数尤度
平均値	0.053	0.039	0.192	0.801	0.993	-5768.361
最小値	0.018	0.028	0.112	0.754	0.975	-6306.143
最大値	0.079	0.056	0.246	0.868	1.000	-4931.485

表 3. GARCH-t モデルの推定結果

	μ	ω	α	β	ν	α+β	対数尤度
平均値	0.030	0.025	0.125	0.864	5.964	0.989	-5621.303
最小値	-0.002	0.019	0.089	0.830	5.371	0.982	-6226.345
最大値	0.059	0.036	0.156	0.896	7.231	0.995	-4748.929

表 4. MSG-G モデルの推定結果

	p	q	μ ₀	μ ₁	ω ₀	ω ₁	α ₀	α ₁
平均値	0.994	0.991	-0.070	0.059	0.334	0.085	0.120	0.096
最小値	0.986	0.975	-0.158	0.028	0.181	0.051	0.079	0.025
最大値	0.998	0.997	-0.004	0.084	0.604	0.113	0.162	0.168

	β ₀	β ₁	ν	α ₀ +β ₀	α ₁ +β ₁	対数尤度
平均値	0.789	0.642	6.488	0.909	0.738	-5590.584
最小値	0.745	0.533	5.805	0.865	0.679	-6201.443
最大値	0.822	0.803	7.876	0.941	0.852	-4718.239

あり、ボラティリティに対するショックの持続性が高いことが分かる。このことは、表 3 の誤差項に t 分布を仮定した GARCH-t モデルでも同じ結果になっている (α+β=0.989)。

MSGARCH モデルの推定結果は、表 4-6 に示した。これらのモデルの推定の際には、標本期間が変わっても常に状態 0 のときの方が期待収益率が低くなるように、パラメータに対して

図 3. TOPIX の日次変化率(%)

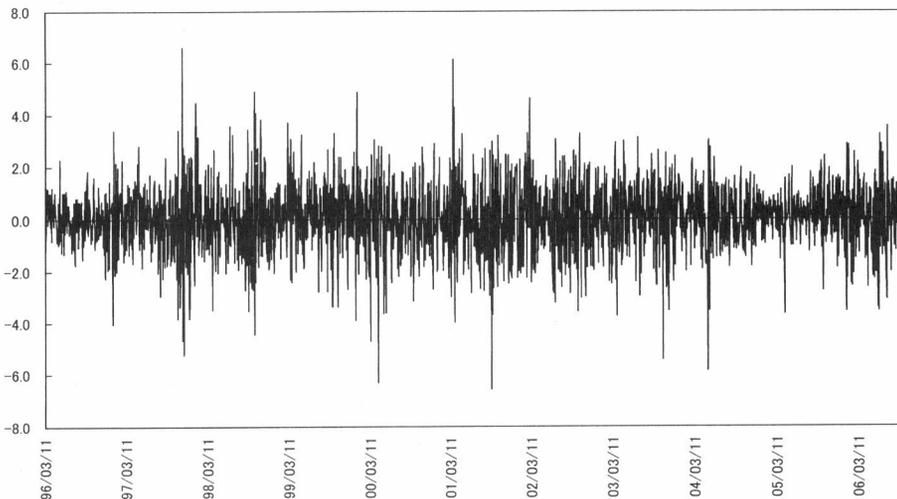


表 5. MSG-K モデルの推定結果

	p	q	μ_0	μ_1	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.786	0.750	-0.265	0.229	0.000	0.001	0.192	0.036
最小値	0.735	0.524	-0.410	0.103	0.000	0.000	0.125	0.000
最大値	0.833	0.790	-0.179	0.300	0.000	0.008	0.313	0.094

	β_0	β_1	ν	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.934	0.807	5.820	1.126	0.843	-5574.678
最小値	0.829	0.757	4.483	1.094	0.817	-6192.045
最大値	1.133	0.852	8.636	1.280	0.871	-4693.360

表 6. MSG-H モデルの推定結果

	p	q	μ_0	μ_1	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.828	0.648	-0.353	0.211	0.000	0.009	0.021	0.180
最小値	0.801	0.555	-0.540	0.158	0.000	0.004	0.010	0.123
最大値	0.870	0.700	-0.240	0.239	0.000	0.015	0.029	0.221

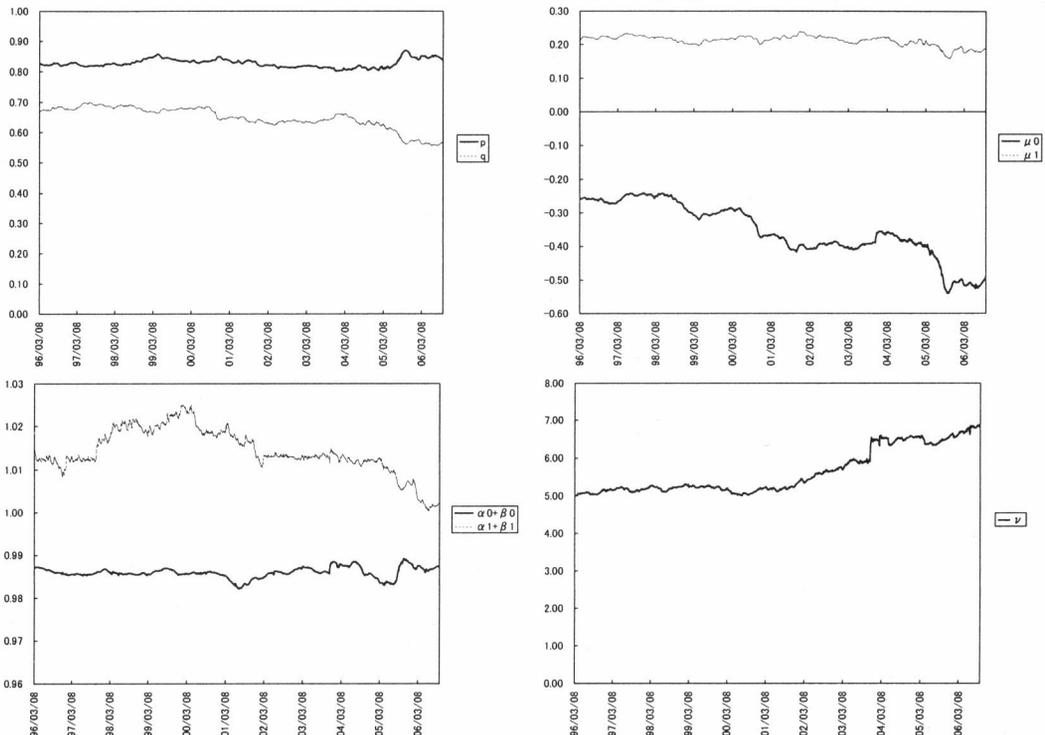
	β_0	β_1	ν	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.965	0.834	5.629	0.986	1.014	-5592.511
最小値	0.953	0.797	4.994	0.982	1.000	-6211.904
最大値	0.979	0.878	6.868	0.989	1.025	-4705.481

$\mu_0 < \mu_1$ という制約を置いた。また、ボラティリティが正の値を取るために、 $\omega_0 > 0, \omega_1 > 0, \alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ としている。

まず、表 4 の MSG-G モデルの結果を見てみると、推移確率の平均値はそれぞれ $p=0.994, q=0.991$ であり、非常に高くなっている。このことは、一度スイッチングを起こすとそのままの状態が長く継続することを表している。モデルの GARCH 部分のボラティリティの持続性は $\alpha_0 + \beta_0 = 0.909, \alpha_1 + \beta_1 = 0.738$ であり、どちらの状態においても GARCH モデルのときよりも低くなっている。これらの結果から、ボラティリティの高い持続性のうち、ある程度の部分は推移確率で説明できる可能性があると考えられる。また、期待収益率はそれぞれ $\mu_0 = -0.070, \mu_1 = 0.059$ 、ボラティリティの定数項は $\omega_0 = 0.334, \omega_1 = 0.085$ であることから、状態 0 のときに期待収益率は低く、ボラティリティが高いことが分かる。

次に、MSG-K モデルの推定結果は表 5 に示した。2.2 節で述べたように、このモデルと MSG-G モデルの違いは 1 期前のボラティリティの定式化にある。推移確率の値は $p=0.786, q=0.750$ となっていて、MSG-G モデルのとき

図 4. MSG-H モデルのパラメータの推定値



よりも低くなっている。期待収益率はそれぞれ $\mu_0 = -0.265$, $\mu_1 = 0.229$ であり、MSG-Gモデルのときよりも期待収益率の差が大きい。1期前のボラティリティの計算方法を変えただけでこのように推定値に大きな差が出ることは非常に興味深い。また、対数尤度の平均値は -5574.678 であり、MSG-Gモデルの -5590.584 よりも若干高くなっている。対数尤度の上昇は、1期前のボラティリティを計算するときに使われる情報量を増やしたことと、1期前のボラティリティが異なる値を取ることを可能にした結果であると考えられる。

最後に、表6のMSG-Hモデルを見てみると、推移確率や期待収益率などの推定値は、MSG-Kモデルの結果とあまり変わらないことが分かる。図4にはパラメータ $p, q, \mu_0, \mu_1, \alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \nu$ の推定値の推移を示した。標本期間を変えても比較的同じ値になっていることから、このモデルをTOPIXの収益率に当てはめても特に問題はないと考えられる。他のMSG-Gモデル、MSG-Kモデルの図は載せていないが、ほとんど同じような結果となっている。

3.3 ボラティリティの予測力の比較

ボラティリティの予測における各モデルの優劣を評価するために、本稿では次の4つの指標、RMSE(root mean squared error), RMSPE(root mean squared percentage error), MAE(mean absolute error), MAPE(mean abso-

表7. RMSE

	GARCH-n	GARCH-t	MSG-G	MSG-K	MSG-H	標本数
1996年	0.526	0.398	0.470	0.437	0.375	202
1997年	0.851	1.961	1.730	2.349	1.909	245
1998年	0.793	1.755	1.587	2.034	1.746	247
1999年	0.728	1.122	1.057	1.132	1.107	245
2000年	0.884	1.619	1.520	1.690	1.653	248
2001年	0.814	1.703	1.467	1.738	1.738	246
2002年	0.633	1.133	1.231	1.167	1.143	246
2003年	0.677	1.058	1.006	0.996	1.037	245
2004年	0.597	0.992	0.853	0.995	1.015	246
2005年	0.560	0.536	0.539	0.480	0.496	245
2006年	0.757	1.070	1.104	1.012	1.069	186
全期間	0.722	1.319	1.220	1.420	1.316	2601

表8. RMSPE

	GARCH-n	GARCH-t	MSG-G	MSG-K	MSG-H	標本数
1996年	2.760	1.932	2.293	2.019	1.770	202
1997年	2.059	2.973	2.883	3.214	2.763	245
1998年	2.117	3.053	3.104	3.248	3.079	247
1999年	2.224	2.967	2.896	2.978	2.871	245
2000年	1.674	2.935	2.881	3.069	2.936	248
2001年	1.125	1.881	1.927	1.934	1.892	246
2002年	0.905	1.456	1.647	1.499	1.476	246
2003年	1.276	1.887	1.877	1.793	1.824	245
2004年	1.967	2.180	2.107	2.067	2.087	246
2005年	3.355	2.518	2.596	2.153	2.211	245
2006年	1.266	1.852	1.883	1.589	1.791	186
全期間	2.010	2.413	2.436	2.432	2.328	2601

表9. MAE

	GARCH-n	GARCH-t	MSG-G	MSG-K	MSG-H	標本数
1996年	0.489	0.340	0.411	0.363	0.310	202
1997年	0.684	1.220	1.209	1.422	1.173	245
1998年	0.696	1.320	1.280	1.456	1.327	247
1999年	0.636	0.888	0.884	0.876	0.866	245
2000年	0.692	1.231	1.242	1.274	1.236	248
2001年	0.594	1.270	1.191	1.314	1.288	246
2002年	0.507	0.957	1.082	0.994	0.969	246
2003年	0.565	0.852	0.826	0.789	0.826	245
2004年	0.524	0.689	0.641	0.662	0.682	246
2005年	0.515	0.445	0.417	0.379	0.397	245
2006年	0.591	0.862	0.890	0.790	0.858	186
全期間	0.592	0.927	0.925	0.952	0.915	2601

表10. MAPE

	GARCH-n	GARCH-t	MSG-G	MSG-K	MSG-H	標本数
1996年	2.235	1.495	1.795	1.557	1.357	202
1997年	1.508	2.045	2.171	2.236	1.941	245
1998年	1.542	2.325	2.421	2.486	2.383	247
1999年	1.613	2.070	2.108	2.041	2.013	245
2000年	1.186	1.973	2.074	2.028	1.968	248
2001年	0.776	1.401	1.459	1.462	1.425	246
2002年	0.642	1.119	1.282	1.150	1.139	246
2003年	0.916	1.344	1.308	1.211	1.290	245
2004年	1.410	1.565	1.525	1.479	1.513	246
2005年	2.492	1.871	1.762	1.548	1.623	245
2006年	0.890	1.315	1.331	1.127	1.281	186
全期間	1.379	1.696	1.758	1.681	1.643	2601

lute percentage error)を使うことにする。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (RV_t - V[R_t | I_{t-1}])^2},$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{RV_t - V[R_t | I_{t-1}]}{RV_t} \right)^2},$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |RV_t - V[R_t | I_{t-1}]|,$$

図5. GARCH-n モデルによるボラティリティの予測値と RV

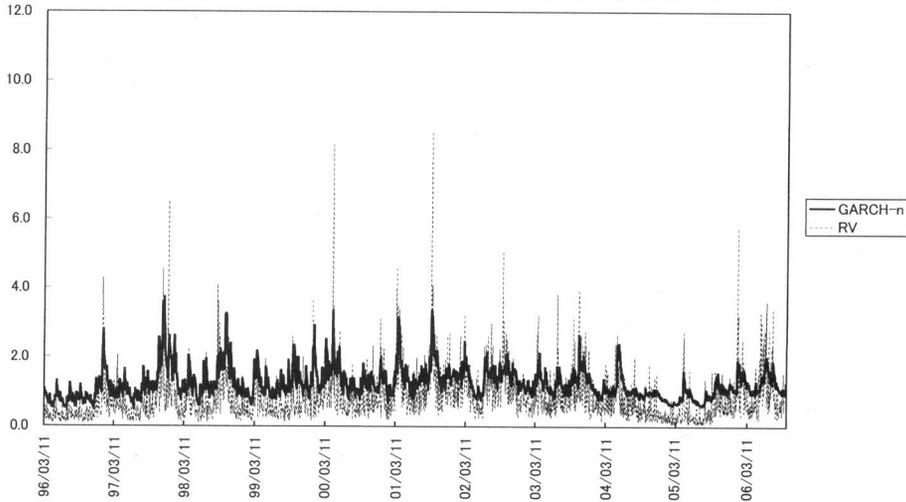
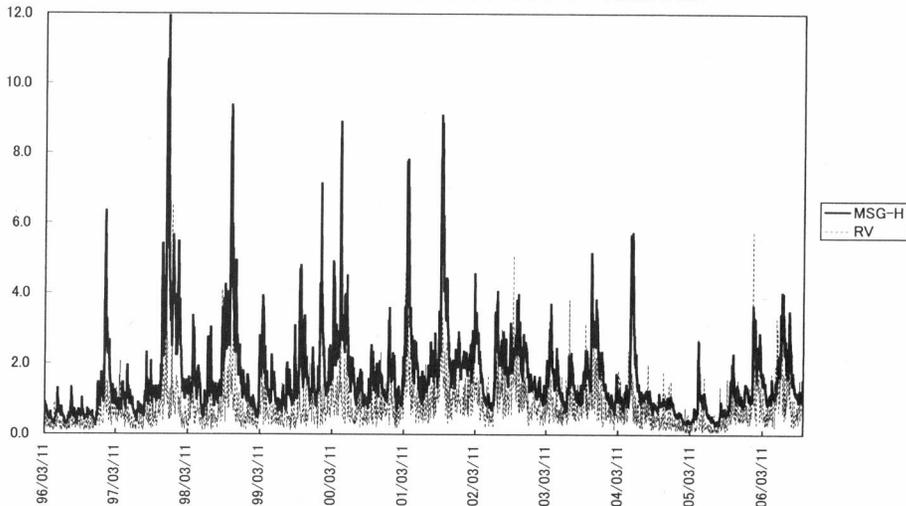


図6. MSG-H モデルによるボラティリティの予測値と RV



$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|RV_t - V[R_t|I_{t-1}]|}{RV_t}$$

$V[R_t|I_{t-1}]$ は各モデルによって計算された t 時点のボラティリティの予測値であり、 RV_t は t 時点の RV である。本稿のボラティリティの予測期間は 2601 日間なので、ここでは $n=2601$ となる。これらの指標は、その値が小さければ小さいほど、ボラティリティの予測力が優れていることを示す。

各モデルの RMSE の計算結果は表 7 にまとめた。最後の行にある全期間のデータを使ったときの値を見てみると、最も小さいのは GARCH-n モデルの 0.722 であり、その次が

MSG-G の 1.220 となっている。各年では、1996 年に MSG-H モデルが 0.375、2005 年に MSG-K モデルが 0.480 と最小になっているが、それ以外の年では全て、GARCH-n モデルの値が最も小さい。したがって、GARCH モデルにマルコフ・スイッチングを含めたモデルを用いても、従来の GARCH モデルよりもボラティリティの予測力を向上させることはできないと考えられる。この結果は他の指標においても同様であり、表 8-10 に示しているように、MSGARCH モデルは 1996 年に MSG-H モデル、2005 年に MSG-K モデルが最小になっているだけで、基本的には GARCH-n モデルの予測力

が最も優れている。また、3つの MSGARCH モデルを比較すると、全ての指標でほぼ同じ値となっており、MSGARCH モデルの中ではどのモデルが特に優れているとは言えない。

図5には、GARCH-n モデルによるボラティリティの予測値(実線)と RV の値(点線)をプロットした。全体的には予測値の方が高くなっていることが分かる。図6には MSGARCH モデルのうち MSG-H モデルの値を示したが、GARCH-n モデルよりも予測値は更に高い。このことが MSGARCH モデルの予測力の低さの原因であると考えられる。しかし、1996年と2005年辺りでは RV の値が極端に低く、この期間では GARCH-n モデルよりも MSG-H モデルの方が RV の値に近くなっている。これは表7-10の結果と整合的である。

以上の結果から、MSGARCH モデルのボラティリティの予測力は GARCH モデルよりも全体的には劣っていることが明らかになった。しかしながら、ボラティリティが非常に低い期間においては、ボラティリティの変動は GARCH モデルでは捉えることができず、MSGARCH モデルの有効性が示された。

4. 結論と今後の課題

本稿では、MSGARCH モデルによるボラティリティの予測を提案し、RV を真のボラティリティの代理変数としてモデルの比較を行った。TOPIX を使った実証分析の結果、GARCH モデルの代わりに MSGARCH モデルを用いても、ボラティリティの予測力は高まらないことが明らかになった。しかしながら、極端にボラティリティが低い時期においては、MSGARCH モデルの方が優れていることが示された。

今後の課題としては、本稿ではボラティリティの予測において日次データしか使わなかったが、ボラティリティの説明変数に1期前の RV を追加することができる。このように定式化することによって、ボラティリティの予測力を高めることができるのかを調べる必要がある。また、TOPIX のボラティリティが低い時期では

MSGARCH モデルの方が GARCH モデルよりも優れていたことから、このモデルによるボラティリティの予測は他の金融資産では有効であるかもしれない。このことも今後の課題としたい。

(東洋大学経営学部)

注

* 本研究は、文部科学省特別研究促進費「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」より助成を受けている。また、一橋大学経済研究所で行われた「経済研究所定例研究会」の参加者ならびに渡部敏明教授(一橋大学経済研究所)からは、多くの貴重なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。

- 1) RV について詳しくは、渡部・佐々木(2006)、柴田(2007)を参照してほしい。
- 2) 証明は、渡部(2000)1.4節を参照のこと。
- 3) 詳しくは里吉(2004b)を参照のこと。
- 4) 本稿では誤差項に t 分布を仮定しているの、そのときの分布は混合 t 分布になる。
- 5) 夜間と昼休みの変化率は5分間のデータではないが、本研究では何ら調整はせずにそのまま2乗和に加えた。このことを考慮した RV の計算方法については、Hansen and Lunde(2005)を参照のこと。

参考文献

- 里吉清隆(2004a)「マルコフ・スイッチング GARCH モデルによる日本の株式市場のボラティリティの分析」『日本統計学会誌』第34巻第1号, pp. 1-19.
- 里吉清隆(2004b)「マルコフ・スイッチング GARCH モデルのベイズ推定法」『経営論集』62号, pp. 123-136.
- 柴田舞(2007)「高頻度データによるボラティリティの推定: Realized Volatility のサーベイと日本の株価指数および株価指数先物の実証分析」日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズ, 2007-J-14.
- 渡部敏明・佐々木浩二(2006)「ARCH型モデルと“Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュエーション・アット・リスク」『金融研究』第25巻別冊第2号, pp. 39-74.
- 渡部敏明(2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.
- Andersen, Torben G. and Tim Bollerslev (1998) “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts,” *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 885-905.
- Bollerslev, Tim (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327.
- Cai, Jun (1994) “A Markov Model of Switching-Regime ARCH,” *Journal of Business & Economic*

- Statistics*, Vol. 12, No. 3, pp. 309-316.
- Diebold, Francis X. (1986) "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment," *Econometric Reviews*, Vol. 5, No. 1, pp. 51-56.
- Engle, Robert F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1008.
- Gray, Stephen F. (1996) "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics*, Vol. 42, No. 1, pp. 27-62.
- Haas, Markus, Stefan Mittnik and Marc S. Paoletta (2004) "A New Approach to Markov-Switching GARCH Models," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 2, No. 4, pp. 493-530.
- Hamilton, James D. (1989) "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, pp. 357-384.
- Hamilton, James D. and Raul Susmel (1994) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime," *Journal of Econometrics*, Vol. 64, No. 1-2, pp. 307-333.
- Hansen, Peter Reinhard and Asger Lunde (2005) "A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-Frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 3, No. 4, pp. 525-554.
- Klaassen, Franc (2002) "Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH," *Empirical Economics*, Vol. 27, No. 2, pp. 363-394.
- Lamoureux, Christopher G. and William D. Lastrapes (1990) "Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 8, No. 2, pp. 225-234.