経済成長の三部門モデル

内島敏之

異質の資本財が複数個存在する成長モデルを展開した Hahn [2] の重要な結果の一つは、均衡成長径路が鞍点的特性をもつということである。(1) 従来の Solow [6], Uzawa [8], [9] 等により示された単一の資本財で特長づけられる新古典派の成長モデルでは、均衡成長径路は安定的な特性をもっている。

Burmeister, Dobell and Kuga [1] は、旧資本財の再販売は行われないモデルに、特定の貯蓄・投資行動仮説を採用し、Hahn により示された均衡成長径路の不安定な特性が除去されうることを示した。我々のモデルは、彼らのモデルを簡単化したものであるが、全ての部門の生産関数がコブ・ダグラス型であるとは仮定しない。(2) 従来の二部門成長モデルの資本財部門を二つに細分化し、二つの異質の資本財を導入する。モデルは二つの資本財部門と一つの消費財部門から成るが、このような経済の均衡成長径路の一義性や安定性の問題を検討するのが本稿の目的である。

1　モデル

二つの異った資本財を第一、第二資本財とそれぞれ呼び、おのおののストック量をKとMで示す。第一資本財は第一資本財部門で、第二資本財は第二資本財部門で生産されるとする。第一資本財は、二つの資本財部門で生産要素として使用され、第二資本財は消費財部門でのみ使用されるとしよう。さらに労働は同質であり、各部門間を移動可能であるとする。各部門での生産活動において、労働と資本は不可欠な生産要素であるとしよう。

我々のモデルは次の連立方程式システムで示される。

$$Y_1=F_1(K_1, L_1)$$
$$Y_2=F_2(K_2, L_2)$$
$$Y_3=G(M, L_3)$$
$$K=K_1+K_2$$
$$L=L_1+L_2+L_3$$

Y_i、K_i $(i=1,2)$ は、第i資本財部門の産出量、資本を示す。Y_3は消費財部門の産出量である。L_i $(i=1,2,3)$ は各部門に配分される労働量、Lは総労働量を示す。F_1、F_2とGは、各部門の生産関数である。最初の三つの式は、各部門の生産の状況を示し、終りの二つの式は、資本と労働との完全稼働の条件を述べる。

資本と労働との配分が、完全競争的になされるならば、次の六個の式を得る。

$$r_1=p_1\frac{\partial F_1}{\partial K_1}$$

$$=p_2\frac{\partial F_2}{\partial K_2}$$

$$r_2=\frac{\partial G}{\partial M}$$

$$w=p_1\frac{\partial F_1}{\partial L_1}$$

$$=p_2\frac{\partial F_2}{\partial L_2}$$

$$=\frac{\partial G}{\partial L_3}$$

r_i $(i=1,2)$ は第 i 資本財のレンタル、w は賃金率を示す。p_i $(i=1,2)$ は、第 i 資本財部門での生産される新資本財の価格を表す。我々は消費財をニューメレールにとる。したがって消費財の価格はつねに1である。

投資・貯蓄行動仮説として、各々の資本のレンタル所得は全額、各々の資本に再投資される、という仮説を採用する。[3] そのとき、

$$p_1Y_1=r_1K$$

$$p_2Y_2=r_2M$$

が成り立つ。

資本蓄積プロセスは

$$Y_1=\dot{K}$$

$$Y_2=\dot{M}$$

の二式により示される。単純化のため減価償却は無視する。

労働は一定の正の率 n で増加すると仮定すると、

$$\dot{L}=nL$$

を得る。

以上に示したごとく、我々のモデルは、16の変数と16の式により構成される。

2 短期均衡の決定

資本ストック K と M が、更に労働量 L がある一時点において所与であるとき、均衡数量、あるいは均衡価格がいかにして決定されるかをみよう。

次の新しい変数を定義しよう。

$$y_i=Y_i/L(i=1,2,3),\quad l_i=L_i/L(i=1,2,3),$$

$$k_i=K_i/L(i=1,2),\quad m=M/L,\quad m_1=M/L_3,$$

$$k=K/L.$$

前節の短期均衡システムは、これらの新しい変数を使えば、以下のごとくとなる。[4]

$$y_1=l_1f_1(k_1),\quad f_1(k_1)=F_1(k_1,1) \tag{1}$$

$$y_2=l_2f_2(k_2),\quad f_2(k_2)=F_2(k_2,1) \tag{2}$$

$$y_3=l_3g(m_1),\quad g(m_1)=G(m_1,1) \tag{3}$$

$$k=l_1k_1+l_2k_2 \tag{4}$$

$$1=l_1+l_2+l_3 \tag{5}$$

$$r_1=p_1f_1'(k_1) \tag{6}$$

$$=p_2f_2'(k_2) \tag{7}$$

$$r_2=g'(m_1) \tag{8}$$

$$w=p_1\{f_1(k_1)-k_1f_1'(k_1)\} \tag{9}$$
$$=p_2\{f_2(k_2)-k_2f_2'(k_2)\} \tag{10}$$
$$=g(m_1)-m_1g'(m_1) \tag{11}$$
$$p_1y_1=r_1k \tag{12}$$
$$p_2y_2=r_2m \tag{13}$$
$$m=m_1l_3 \tag{14}$$

つまりkとmとが所与である短期均衡システムは、上述の14の式と、14の変数とより成る。変数は、y_1、y_2、y_3、l_1、l_2、l_3、k_1、k_2、m_1、p_1、p_2、r_1、r_2、wの14個である。

(12)、(13)とワルラス法則より、(3)により

$$w=y_3=l_3g(m_1)$$

となり、(11)により

$$l_3=\frac{g(m_1)-m_1g'(m_1)}{g(m_1)}$$

を得る。これは、全体の労働のうち消費財部門に配分される労働の割合は、消費財部門の賃金配分率に等しくなることを示す。いま消費財部門の代替の弾力性をσ_3とすれば、(5)

$$\frac{dl_3}{dm_1}=-\frac{m_1g''(m_1)}{g(m_1)}(1-\sigma_3) \tag{15}$$

となる。

(14)より

$$\frac{dm}{dm_1}=l_3+m_1\frac{dl_3}{dm_1} \tag{16}$$

となり、(15)、(16)より、$\sigma_3\leqq1$ならば、

$$l_3'(m)\geqq0,\quad m_1'(m)>0$$

が成立する。等号はσ_3が1のときに成り立つ。このことからして、l_3とm_1とはkから独立にmにより一義的に決定される。

(4)、(5)の式より

$$l_1=\frac{(1-l_3)k_2-k}{k_2-k_1},\quad l_2=\frac{k-(1-l_3)k_1}{k_2-k_1}$$

となるが、この式と、(6)、(12)より

$$k=\frac{(1-l_3)k_2-k}{k_2-k_1}\frac{f_1(k_1)}{f_1'(k_1)} \tag{17}$$

を得る。

いま、$R=\dfrac{w}{r_1}$と定義するならば、(6)、(7)、(9)、(10)より

$$R=\frac{f_i(k_i)}{f_i'(k_i)}-k_i,\quad i=1,2 \tag{18}$$

となる。(17)、(18)より

$$k=\frac{k_2(k_1+R)(1-l_3)}{k_2+R} \tag{19}$$

を得る。両辺の対数をとり、kで偏微分すると、

$$\left[\frac{k_2-k_1}{(k_1+R)(k_2+R)}+\frac{Rk_2'(R)}{k_2(k_2+R)}+\frac{k_1'(R)}{k_1+R}\right]\frac{\partial R}{\partial k}=\frac{1}{k}$$

となり、mで偏微分すれば

$$-\left[\frac{k_2-k_1}{(k_1+R)(k_2+R)}+\frac{Rk_2'(R)}{k_2(k_2+R)}+\frac{k_1'(R)}{k_1+R}\right]\frac{\partial R}{\partial m}=-\frac{l_3'(m)}{1-l_3}$$

となる。

(18)によって、$k_i'(R)>0$であるので、もし第二資本財部門の

資本集約度が、第一資本財部門のそれより大であるならば、$\frac{\partial R}{\partial k}>0$ となる。いま第 i 資本財部門の代替の弾力性を σ_i とすれば、$\sigma_i=\frac{dk_i}{dR}\frac{R}{k_i}$ $(i=1,\ 2)$ となる。これを使って前の式の [＊] を書き改めると

$$[*]=\frac{Rk_1(\sigma_1+\sigma_2-1)+\sigma_2R^2+\sigma_1k_1k_2+Rk_2}{R(k_1+R)(k_2+R)}$$

となり、もし $\sigma_1+\sigma_2\geqq 1$ ならば

$$[*]>0$$

となる。故に、

$$k_2>k_1,\ \sigma_1+\sigma_2\geqq 1$$

の二つのうちいずれかが成立するなら $\frac{\partial R}{\partial k}>0$ となる。

同様にして、$\sigma_3\leqq 1$ であり、かつ、$k_2\geqq k_1$, $\sigma_1+\sigma_2\geqq 1$ のうちいずれか一つが成立すれば $\frac{\partial R}{\partial m}\geqq 0$ となることがわかる。等号は σ_3 が1のときである。

上に述べた特定の条件が成立するなら

$$R=R(k,\ m)$$

は、生産関数が well-behaved であるという仮定のもとでは、与えられた k と m とに対して唯一の解をもつ。このことから、短期均衡解に対応する R は一義的に決定され、他の諸変数の短期均衡解も一義的に決定されよう。

要約しよう。

$$\begin{cases}\text{(i)}\ \sigma_3\leqq 1,\ k_2>k_1\\ \text{(ii)}\ \sigma_3\leqq 1,\ \sigma_1+\sigma_2\geqq 1\end{cases}$$

の二つの条件のうち、いずれかが成り立つとするならば、我々のモデルでは与えられた正の k、m に対して、短期均衡は一義的に存在する。

3 長期均衡の決定

資本蓄積式 $Y_1=\dot{K}$ と、(6)、(12)より

$$\dot{k}=k\left(\frac{r_1}{p_1}-n\right) \tag{20}$$
$$=k(f_1'(k_1)-n)$$

となる。

もう一つの資本蓄積式 $Y_2=\dot{M}$ と、(8)、(10)、(11)、(13)とより

$$\dot{m}=m\left(\frac{r_2}{p_2}-n\right) \tag{21}$$
$$=m\left[\frac{g'(m_1)}{g(m_1)-m_1g'(m_1)}\{f_2(k_2)-k_2f_2'(k_2)\}-n\right]$$

となる。

(20)において、$\dot{k}=0$ とすれば

$$f_1'(k_1)=n$$

を得る。これより

$$\frac{dk}{dm}=-\frac{\partial k_1}{\partial m}\Big/\frac{\partial k_1}{\partial k}$$

と求まるが、

$$\frac{\partial k_i}{\partial m}=\frac{dk_i}{dR}\frac{\partial R}{\partial m},\quad \frac{\partial k_i}{\partial k}=\frac{dk_i}{dR}\frac{\partial R}{\partial k}$$

であることに注意するならば、前節の条件(i)、(ii)のうちいずれかが成り立てば、$\frac{dk}{dm}\leqq 0$ となる。等号は、σ_3が1のときに成立する。

次に、(22)において $\dot{m}=0$ とすれば、

$$n\left(\frac{g(m_1)}{g'(m_1)}-m_1\right)=f_2(k_2)-k_2f_2'(k_2) \tag{22}$$

となる。この左辺をϕとおくと、

$$\frac{d\phi}{dm}=-\frac{ng(m_1)g''(m_1)}{\{g'(m_1)\}^2}\frac{dm_1}{dm}$$

となり、先にみたように $\sigma_3\leqq 1$ ならば $\frac{dm_1}{dm}>0$ であり、更に $\frac{d\phi}{dm}>0$ となる。$\dot{m}=0$ を示す曲線の傾きを求めると、

$$\frac{dk}{dm}=\left[-\frac{\phi'(m)}{k_2f_2''(k_2)}-\frac{\partial k_2}{\partial m}\right]\Big/\frac{\partial k_2}{\partial k}$$

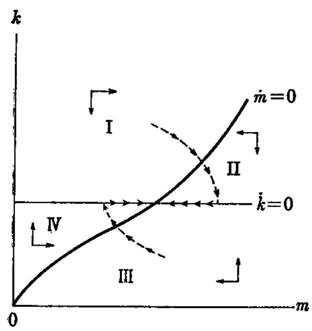
を得る。いま、消費財部門の代替の弾力性σ_3が1であるならば、$\frac{\partial k_2}{\partial m}=0$ となり、更に $k_2>k_1$ か、$\sigma_1+\sigma_2\geqq 1$ かのいずれかが成りたつならば $\frac{\partial k_2}{\partial k}>0$ となり、$\frac{dk}{dm}$ は正となる。σ_3が1、つまり消費財部門の生産関数がコブ・ダグラス型であれば、$\dot{m}=0$ を示す曲線は図に示されているように原点を通る右上りの曲線となる。

図に示されるように、$\dot{k}=0$ と $\dot{m}=0$ との交点はただ一つである。この点では、

$$\frac{r_1}{p_1}=\frac{r_2}{p_2}=n$$

が成立する。r_1/p_1 は第一資本財Kの利潤率を、r_2/p_2は第二資本財Mの利潤率を示しているから、長期均衡においては両資本財の利潤率は均等であり、かつそれらは自然成長率nに等しくなるのである。

かくして一義的に決定される長期均衡は安定性を有するであろうか。$\dot{k}=0$ を示す直線より上の領域では、時間とともにkは減少し、下ではkは増加する。一方、$\dot{m}=0$ を示す曲線より上の領域では、mは時間の経過につれて増加し、下の領域では減少する。図によって示されるように、任意の初期時点から出発する経済は、やがて長期均衡状態に収束していく。領域IとIIから出発する点は、領域IIIとIVに入り込むことはない。また領域IIIとIVから出発する点も、領域IとIIとに入り込むことはない。



これまでのことを要約する。もし消費財部門の代替の弾力性が1であり、かつ $k_2>k_1$ か、$\sigma_1+\sigma_2\geqq 1$ かのうちいずれか一つが成り立てば、長期均衡は一義的に決定され、かつそれは大域的に安定である。

4　むすび

我々の資本集約度条件と、通常の二部門モデル

における資本集約度条件（消費財産業の資本集約度は資本財産業のそれよりも大であるという条件）との関連について考えてみる。我々のモデルでは，第一資本財部門の生産物である第一資本財は，自己の部門と第二資本財部門において生産要素として使用され，第二資本財部門の生産物である第二資本財は消費財部門の生産要素として使用される。このような意味で，第二資本財部門は第一資本財部門よりも，消費財部門に近い部門といえよう。すると我々の得た資本集約度条件の意味するところは，消費財部門に近い第二資本財部門の資本集約度が，第一資本財部門のそれよりも大である，ということになろう。

Burmeister, Dobell, and Kuga [1] においては，全ての部門の生産関数はコブ・ダグラス型であると仮定されている。我々のモデルで示されたように，長期均衡の一義性と安定性とは，消費財部門の代替の弾力性が1であることに強く依存している。他の二つの資本財部門の代替の弾力性については，$\sigma_1+\sigma_2\geqq 1$ が成立すればよい。もちろんこの条件は，$\sigma_1\geqq 1$, $\sigma_2\geqq 1$ の二つの条件をも含んでいる。

（1） 異質の資本財が存在する成長モデルについては他に Hahn [3], Shell and Stiglitz [5], Solow [7] を参照。

（2） 二部門成長モデルについては，Inada [4], Uzawa [8], [9] を参照。

（3） このような貯蓄・投資行動仮説については Burmeister, Dobell and Kuga [1] が詳しい。

（4） 各部門の生産関数は一次同次であり，かつ well-behaved であるとする。いま生産関数を $y=f(k)$ としよう。$f'(k)>0$, $f''(k)<0$, $f'(0)=\infty$, $f'(\infty)=0$ であるとき f は well-behaved であるという。Inada [4] を参照。

（5） $\sigma_3=-\dfrac{g'(g-m_1g')}{m_1gg''}$ である。

参考文献

[1] Burmeister, E., Dobell, R. and Kuga, K., "A Note on the Global Stability of a Simple Growth Model with Many Capital Goods," *Quarterly Journal of Economics*, 82 (1968), 657—665.

[2] Hahn, F. H., "Equilibrium Dynamics with Heterogeneous Capital Goods," *Quarterly Journal of Economics*, 80 (1966), 633—646.

[3] Hahn, F. H., "On Warranted Growth Paths," *Review of Economic Studies*, 35 (1968) 175—184.

[4] Inada, K., "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization," *Review of Economic Studies*, 30 (1962—63), 119—127.

[5] Shell, K. and Stiglitz, J. E., "The Allocation of Investment in a Dynamic Economy," *Quarterly Journal of Economics*, 81 (1967), 592—609.

[6] Solow, R. M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, 70

(1956), 65—94.

[7] Solow, R. M., *Growth Theory*, Clarendon Press: Oxford, (1970).

[8] Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, 29 (1961—62), 40—47.

[9] Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth, II," *Review of Economic Studies*, 30 (1962—63), 105—118.

（一橋大学大学院博士課程）