

【調 査】

マクロ動学一般均衡モデル

——サーベイと日本のマクロデータへの応用——

藤原一平・渡部敏明

マクロ経済学の有力な分析手法としてよく用いられるモデルに、確率的動学一般均衡(dynamic stochastic general equilibrium; DSGE)モデルがある。本稿はこのモデルについて解説を行ったものである。前半では、このモデルの発展と、その分析に必要な合理的期待均衡の導出方法について説明する。後半では、このモデルの計量分析について説明する。ここでは、近年、DSGEモデルの計量分析によく用いられるマルコフ連鎖モンテカルロ法(Markov chain Monte Carlo; MCMC)とベイズ推定について説明する。また、DSGEモデルの評価のために用いられるDSGE-VARモデルについても説明する。さらに、ゼロ金利政策前の日本のマクロデータを用いて簡単なニュー・ケインジアンDSGEモデルを推定するとともに、そのモデルをDSGE-VARモデルを用いて評価する。

JEL Classification Codes: C11, C32, C51, C52, E32, E52

1. 序論

マクロ経済学の有力な分析手法としてよく用いられるモデルに、確率的動学一般均衡(dynamic stochastic general equilibrium; DSGE)モデルがある。このモデルは企業や家計の動学的最適化を基礎とするミクロ理論に基づくので、例えばベクトル自己回帰(vector autoregressive; VAR)モデルのような他のマクロ計量モデルと比べて、さまざまなショックの識別が簡単に行えるという長所がある。そこで、マクロ経済学者だけでなく中央銀行のような政策当局からも、政策効果の分析という観点から注目を集めている。本稿では、こうしたDSGEモデルについて解説を行う。

前半では、まず、このモデルの発展について説明する。Kydland and Prescott(1982)によって、これまで理論的なモデルと考えられてきた最適成長モデルが、実際の景気循環の説明に有用であることが示されて以来、DSGEモデルは、様々な批判に応える形で現実のマクロデータの変動に対する説明力を高めてきた。最近では、価格の粘着性や様々な実質硬直性を加えると、DSGEモデルのデータへのフィットが、構造モデルながらも誘導形モデルと遜色のないレベルにまで高まることが示されており、各国中央銀行や国際機関においても、従来型のケインズ経済学を基礎とした大型マクロモデルに取って代わり、予測や政策シミュレーションを行う際の中心的モデルとしての役割を果たすまでになっている。

次に、こうしたモデルを用いた分析を行う際に必要となる合理的期待均衡の導出方法について解説する。従来型の大型マクロモデルでは、適応的期待等をベースとした、アドホックな期待形成が仮定されていた。一方、DSGEモデルでは、期待はモデルに整合的な合理的期待に基づいており、期待を通じた政策の波及経路等を理論的に分析することが可能となっている。これは、DSGEモデルの大きな強みで

あるが、これに付随し、いかにして観察不可能な期待変数を解くか、すなわち、過去の変数で表現するかということが問題となってくる。合理的期待の解法については、様々な手法が提案されているが、本稿で扱うような現実説明力の高いモデルについては、モデルを定常状態周りで線形近似し、これを状態空間表現した上で、推定されることが多い。本稿では、モデルの導出からこれの定常状態周りの線形近似の方法について説明した後、このような線形近似モデルの解法として、頻繁に用いられている、Blanchard and Kahn(1980), Christiano(2002), Sims(2002)の手法を紹介する。

後半では、DSGEモデルの計量手法について説明する。DSGEモデルは、近年、マルコフ連鎖モンテカルロ法(Markov chain Monte Carlo; MCMC)を用いてベイズ推定することが多い¹⁾。従来のベイズ推定は、パラメータにデータを観測する前の事前分布を設定し、それをベイズの定理によって、データを観測した後の事後分布に改定し、事後分布を用いてパラメータを推定するというものであった。こうしたベイズ推定には、(1)事前分布に事前情報を加えることができる、(2)ベイズ統計学の事後オッズ比に基づくモデル選択では、互いに入れ子になっていないモデル間の比較も行える(ただし、この点については、以下で述べる「Lindley(1957)の逆説」と呼ばれる問題点があるので注意が必要である)、などの長所がある。しかし、誤差項が正規分布に従う線形回帰モデルなどの簡単なモデルでない限り、事後分布やそのモーメントの導出が難しいので、近年では、MCMCによってパラメータを事後分布からサンプリングし、サンプリングされた値を用いてパラメータを推定するという方法が用いられる。こうしたMCMCを用いたベイズ推定には、さらに、(3)インパルス応答関数や分散分解などパラメータの関数になっているものも、事後分布からサンプリングされたパラメータの値を代入することにより事

後分布からサンプリングできるので、それらをパラメータの不確実性を考慮して推定できる、(4)将来の予測も同様にパラメータの不確実性を考慮して行えるといった長所がある。

DSGE モデルの MCMC ベイズ推定を有名にしたのは、Smets and Wouters(2003)と Dynare である。DSGE モデルにはショックを容易に識別できるという利点はあるものの、VAR モデルと比べて現実のデータへの当てはまりが良くないとされていた。ところが、Smets and Wouters(2003)が、Christiano *et al.*(2005)で提案された(1)名目価格・賃金の硬直性、(2)消費の習慣形成、(3)投資の調整コスト、(4)可変資本稼働率といったさまざまな市場の摩擦を導入したニュー・ケインジアン DSGE モデル(CEE モデル)と VAR モデルとを事後オッズ比によって比較を行い、CEE モデルの現実のマクロデータへの当てはまりが VAR モデルとほぼ同等であるとの結果を示したことで、その後、中央銀行を中心に DSGE モデルが頻繁に用いられるようになった。また、Michel Juillard が DSGE モデルの分析のためのフリー・ソフト Dynare を開発したことが、それに拍車をかけた²⁾。しかし、このソフトを使うと DSGE モデルの MCMC ベイズ推定を簡単に行えるため、MCMC やベイズ推定についてよく理解しないまま DSGE モデルを推定している研究者が少なくない。そこで、本稿では、そうした研究者のために、DSGE モデルの MCMC ベイズ推定について解説を行う。そこでは、事後オッズ比に基づくモデル選択の方法についても解説する。

DSGE モデルのようなマクロモデルはいかに大型にしても現実のマクロ経済を完全に描写することは不可能である。そこで重要なのは、モデルと現実との乖離の度合いを計測することである。そうした方法としてまず考えられるのは、マクロモデルの制約を課さない VAR モデルが現実のマクロデータの変動を正しく記述しているものと仮定し、VAR モデルと DSGE モデルとを比較するという方法である。本稿で説明するように、DSGE モデルは、対数線形近似し合理的期待均衡を求めると、線形状態空間モデルとして表せる。また、線形状態空間モデルは一般的にベクトル自己回帰移動平均(Vector Autoregressive Moving Average; VARMA)モデルで表せる。VARMA モデルは MA 項が反転可能であれば VAR モデルになるが³⁾、次数が無限大になるので、DSGE モデルと有限次数の VAR モデルとは互いに入れ子になっていない。そうしたモデルを比較する場合、上記 Smets and Wouters(2003)のように事後オッズ比を用いると、パラメータの事前分布によっては正しくないモデルが選択される可能性があることが「Lindley(1957)の逆説」として知られており、Sims(2003)は Smets and Wouters(2003)の結果がこれに相当するのではないかと批判している。

こうした問題を避けるため、Del Negro and Schorfheide(2004)や Del Negro *et al.*(2007)らは、DSGE-VAR モデルと呼ばれるモデルを用いて VAR モデルと DSGE モデルを比較している。この方法では、VAR モデルのパラメータをベイズ推定

する時の事前分布の平均に DSGE モデルによって制約を課す。ただし、事前分布の分散が正であれば、VAR のパラメータはその制約から乖離できる。そこで、事前分布の分散を変えて推定を行い、DSGE モデルの制約をどの程度緩めるとデータへの当てはまりが最も良くなるかを計測することによって DSGE モデルと現実のデータとの乖離の度合いを計測する。本稿ではこうした手法についても解説する。

DSGE モデルを MCMC ベイズ推定により日本のマクロデータに応用した研究には Iiboshi *et al.*(2006)、Sugo and Ueda(2008)、Fujiwara *et al.*(2010)などがあり、それ以外にも最近徐々に増えてきているが、まだ少ない。また、DSGE-VAR モデルを日本のマクロデータに応用した研究は、渡部(2009)だけである。そこで、本稿では、DSGE モデルや DSGE-VAR モデルを日本のマクロデータに応用する。Iiboshi *et al.*(2006)、Sugo and Ueda(2008)、Fujiwara *et al.*(2010)、渡部(2009)では、DSGE モデルとして、上記 CEE モデルやそれを拡張したモデルを用いているが、本稿では、Del Negro and Schorfheide(2004)、An and Schorfheide(2007)らのモデルを用いている。このモデルは CEE モデルよりも簡単なモデルであるが、生産性がランダム・ウォークに従うと仮定しており、そのため、GDP や消費などのマクロ変数に確率的トレンドが生じる。CEE モデルではそうしたトレンドがモデル内で明示的に考慮されていないので、マクロ変数から、例えば Hodorick-Prescott(HP)フィルターなどのアドホックな方法により事前にトレンドを除去する必要があるのに対して⁴⁾、本稿のモデルは事前にトレンドを除去する必要があるという長所がある。また、DSGE-VAR モデルにより、簡単なモデルではあるものの、VAR モデルの推定において有用な情報を含んでいるとの結果が得られている。

本稿の構成は以下の通りである。まず、次の第2節で、DSGE モデルの発展について説明する。次に、第3節では、合理的期待均衡の導出方法について解説する。第4節では、本稿で推定に用いる Del Negro and Schorfheide(2004)、An and Schorfheide(2007)らのニュー・ケインジアン DSGE モデルについて説明する。第5節において、DSGE モデルの MCMC を用いたベイズ推定法について解説する。第6節で日本のマクロデータを用いて DSGE モデルを推定し、結果を紹介する。第7節で DSGE-VAR モデルについて解説し、DSGE モデルの評価を行う。最後に第8節で本稿のまとめを行うとともに今後の発展について述べる。

2. DSGE モデルの発展

Ramsey(1928)、Cass(1965)、Koopmans(1965)によって構築された最適成長モデル(Solow, 1956 や Swan, 1956 で外生的に設定されていた貯蓄率(消費水準)が家計の効用最大化より内生的に求まるモデル)は、その後、Brock and Mirman(1972)によって、不確実性下の(ある確率過程に従うショックが每期加わるような)モデルへと拡張された。近年、幅広いテーマへの応用が試みられている DSGE モデル

は、この確率的な最適成長モデルがその発端となっているが、Brock and Mirman(1972)による確率環境下の最適成長モデルは、極めて理論的なモデルであり、短期ないし中期の景気循環の分析に用いられるようなものではないと、当時は考えられていた。こうしたモデルは、その名が示す通り、主に長期的な現象を取り扱う経済成長理論における関心事項の分析に利用されてきた。このような考え方を一変させたのが、Kydland and Prescott(1982)である。

Kydland and Prescott(1982)は、確率的最適成長モデルを用いて実際の景気循環の説明に挑んだ最初の試みである。Kydland and Prescott(1982)は、まず、ソロー残差を計測し、技術ショックの確率過程を求めたうえで、これを前提とした確率シミュレーションを最適成長モデルを用いて行った。ここで、シミュレーションから得られる積率を実際のデータから得られるものに近づける手法(カリブレーション)を用いて、パラメーターを設定(推定)した。そして、Kydland and Prescott(1982)は、このようなモデルによって、米国の景気循環のうちかなりの部分の説明が可能となることを示した。今日では、こうしたアプローチで景気循環を説明するモデル(すなわち、リアル・ビジネス・サイクル・モデル⁵⁾)の導出や、これを用いたシミュレーションは、例えば、米国の経済学博士課程におけるマクロ経済学のコア・コースなどでは必須となっていることの多いテクニックであるが、当時は、革命的なアイデアであったようである。例えば、Lucas(2005)による、Kydland, Prescott 両氏のノーベル経済学賞受賞を称えた論文には、次のように記されている。“How did they ever think to put all these pieces together in this way? If Ed and Finn had not written on time inconsistency, I think someone else would have, sooner or later. But if they had not written ‘Time to Build...’ I think we would still be waiting for it, and without a clue as to what it was we were waiting for.”

Kydland and Prescott(1982)による先駆的な研究以降、リアル・ビジネス・サイクル・モデルは、様々な批判に応える形で発展を遂げることとなる。特に、初期のリアル・ビジネス・サイクル・モデルでは、正の技術ショックに対し、実質賃金が上昇するため、労働の異時点間代替から、労働供給が増加し、生産水準も上昇するというメカニズムが重要であった。この点、Kydland and Prescott(1982)によって設定された労働の賃金弾力性が、ミクロ・データを用いた先行研究によって得られた推定結果と比べて高すぎる、との批判が集まった。これに対し、Hansen(1985)や Rogerson(1988)は、労働の非分割性、すなわち、労働供給量を決定する際に、労働時間を細やかに調整することはできず、働くか、働かないかといった離散的な決定しかできない、といった概念を提案した。実際の労働市場での慣行をみれば、この設定の方が現実的であるとの理解の下、労働の非分割性を導入すれば、Kydland and Prescott(1982)によって設定された高い労働の賃金弾力性は、マクロの弾力性として正当化されることを示した。また、Braun(1994)や McGrattan(1994)は、技術シ

ョックだけでなく、実効税率(経済の資源配分を非効率にする歪曲税)の変化をショックとして加えると、モデルのフィットがさらに向上するとした。さらに、根源的な技術ショック(すなわち、単純なソロー残差ではなく、本質的な技術進歩)は、Kydland and Prescott(1982)で設定されたほど大きくはないはず、との批判に対し、Greenwood *et al.*(1988)は、資本稼働率を引き上げると減耗率が高まるようなメカニズムを組み込むことによって、資本稼働率が内生的に決定されるようなモデルを提案した。こうしたモデルを用いると、小さな技術ショックが大きな波及効果を持つことが示された。同様なメカニズムから、Burnside *et al.*(1996)は、労働貯蔵、すなわち、可変な労働稼働率をモデルに組み込み、労働変数の説明力向上を試みた。労働変数がモデル上では、消費を決定するような資産効果に強い影響を受けすぎているという点に対し、Benhabib *et al.*(1991)は、ホーム・プロダクションという概念を提唱し、統計に計測されない労働からの効用を考えることによって、資産効果の影響を現実的なレベルにまで弱めることを試みた。さらに、Merz(1995)や Andolfatto(1996)は、Mortensen and Pissarides(1994)型の労働市場のサーチ・マッチ・モデルを、リアル・ビジネス・サイクル・モデルに組み込み、このようなモデルのデータ説明力が高いことを示した。こうしたリアル・ビジネス・サイクル・モデルを用いた分析の発展については、King *et al.*(1988a, 1988b)や Cooley(1995)に詳しくまとめられている。

多くのリアル・ビジネス・サイクル・モデルが名目変数の動きや金融政策の影響を無視する中で⁶⁾、いくつかの研究は、現実社会の説明には、名目価格の硬直性等を組み込む必要があることを指摘した。例えば、Gali(1999)や Basu *et al.*(2006)などは、技術ショックが労働を増やすか減らすか、といった点に着目し、名目価格の硬直性といったケインジアンの特徴が組み込まれる必要性を主張した。新古典派成長モデルをベースとするリアル・ビジネス・サイクル・モデルでは、上述の通り、技術ショックは労働生産性を高めるため、労働供給を増加させる。一方、価格の粘着性を前提としたケインズ経済学の世界では、需要は価格が粘着的である以上、短期的には金融政策(理論的にはコントロール可能と仮定されるマネー・サプライ)に規定される⁷⁾。このため、技術ショックが発生したとしても、需要に規定される生産は増加せず、結果として、労働供給が減少する。この点、Gali(1999)は、Blanchard and Quah(1989)をベースとした長期制約付きの構造 VAR モデルを推定し、技術ショックが労働を減少させることを示した。また、Basu *et al.*(2006)は、景気循環要因を取り除いた「修正ソロー残差」を計測し、これが労働に負の影響を与えると報告した。このほか、Bils and Klenow(2004)は、ミクロ・データをみる限り、名目価格の硬直性が明確に存在することを示した。さらに、Christiano *et al.*(1999)は、Sims(1980)による VAR モデルを用いた金融政策についての先駆的研究を拡張し、(名目価格の硬直性が存在しない限り実質的な効果がないはずの)金融政策ショック後

の経済変動の典型的なパターンを提示した。このような VAR モデルで観察される金融政策ショック後の hump-shaped な反応に対しては、Kimball(1995)や Yun(1996)で提示されたような名目価格の硬直性を組み込んだリアル・ビジネス・サイクル・モデル、すなわち、ニュー・ケインジアン・モデルが重要との認識が強まった。

ニュー・ケインジアン・モデルは、ニュー・ケインジアン・フィリップス曲線、動学 IS 曲線(オイラー方程式)、金融政策ルールとの 3 つの方程式を本質的な構成要素としている⁸⁾。ニュー・ケインジアン・フィリップス曲線は、総供給曲線を描くもので、インフレ率と限界費用(生産水準、ないし、需給ギャップ)の関係を規定する。独占的競争下にあり、価格設定力を有する企業が、常に最適な価格を設定することができないような状況が想定されている。この結果、伝統的なフィリップス曲線と異なり、企業は、フォワード・ルッキングな価格設定を行うようになり、足もとの価格は、将来の限界費用見通しを勘案しながら設定されることとなる。ニュー・ケインジアン・モデルでは、このような価格の粘着性は、Taylor(1979, 1980)や Calvo(1983)のような非同時価格設定契約、ないし、Rotemberg(1982)のような価格変更に伴う調整コストを仮定することによって、組み込まれることが多い。Taylor(1979, 1980)は、例えば、2 四半期といった一定期間、企業は価格を変更できない、一方、Calvo(1983)は、每期、ランダムに選ばれた一定割合の企業のみが価格を変更できる、という非同時価格設定をそれぞれ仮定したものである。両者は似通ったものに見えるが、経済厚生上の観点からは、非常に異なるインプリケーションを持っている。例えば、Calvo(1983)では、極めて長期にわたり、価格を変更できない(しない)企業が存在するため、経済厚生上の損失につながる相対物価の歪み⁹⁾が、Taylor(1979, 1980)に比べ大きなものとなる。一方、Rotemberg(1982)では、価格の変更は、これに伴う資源の利用という経済厚生上の損失をもたらすが、相対物価のばらつきに伴う歪みは発生しない。しかし、通常、DSGE モデルは、対数線形近似した上で解かれることが多く(詳細は後述)、この限り(やや限定的になるが、経済厚生評価をしない限り)においては、Roberts(1995)によって示されたように、Taylor(1979, 1980)、Calvo(1983)、Rotemberg(1982)のいずれを用いても、ニュー・ケインジアン・フィリップス曲線は、観察上同一(observationally equivalent)であることが知られている。もう一つの本質的な構成要素である、動学 IS 曲線は、リアル・ビジネス・サイクル・モデルにおいても、重要な役割を果たす方程式であり、消費の異時点間代替に関する(需給ギャップと実質金利の関係を規定する)標準的なオイラー方程式を表現する。3 つ目の構成要素である金融政策ルールは、通常、Taylor(1993)によるテイラー・ルールの形を採ることが多い。テイラー・ルールに従うと、中央銀行が設定する名目短期金利は、インフレ率と需給ギャップに応じて決定される。ここで、需給ギャップは、理論的には、価格の粘着性

がない経済で成立するであろう生産水準と、価格の粘着性が存在する経済で実現している生産水準との差で表現される。テイラー・ルールより以前は、金融政策ルールとして、Friedman(1969)の $k\%$ ルール、すなわち、インフレ期待を一定に保つよう、マネー・サプライ成長率をコンスタントに設定するルールが、合理的期待モデルを含むマクロモデルにおいて、利用されることが多かった。これは、テイラー・ルールのような利子率を設定するルールを、合理的期待モデルに用いると、インフレ期待をコントロールできない、すなわち、期待(すなわち、解)を一意に決定できないような非決定の状況に陥ることが多かったことにも起因している。これに対し、Taylor(1993)は、テイラー・プリンシプルと呼ばれる概念を提唱し、名目金利がインフレ率に対し 1 対 1 以上に強く反応するようなルールにすれば、インフレ率上昇に対し、実質金利を引き上げることができると、利子率ルールを用いてもインフレ期待をコントロールすることが可能となり、非決定を避けることができることを示した。こうした技術的な要因に加え、テイラー・ルールは、実際の金融政策運営との親和性が高かったこともあり、近年、学術的のみならず、現実的な金融政策分析に頻繁に用いられるようになった。

こうしたニュー・ケインジアン・モデルについては、例えば、Clarida *et al.*(1999)、Walsh(2003)、Woodford(2003)等でまとめられているように、当初は、実際のデータの説明よりも、規範的、すなわち、どのような政策が理論的には望ましいか、といった点に焦点を当てた分析が行われることが多かった。ニュー・ケインジアン・モデルは、伝統的な IS-LM モデルと異なり、ミクロ的基盤を有する、すなわち、家計や企業の最適化行動より導かれているため、厚生分析に馴染みやすかったのは当然の帰結ともいえる。特に、Rotemberg and Woodford(1997)が、効用とモデルの 2 次近似より、インフレ率と需給ギャップより構成される 2 次の損失関数を導出したこと、すなわち、これまで便宜的にミクロ的基盤なしに仮定していた損失関数が理論的にも導出できることを示したことは、2 次の目的関数と 1 次の制約下で、線形の最適政策を導出できることもあり、この分野の発展に大きく貢献した。こうした規範的な分析は、Erceg *et al.*(2000)により、価格の粘着性だけでなく、名目賃金の粘着性が加味されたモデルへの拡張が試みられ、このような場合、損失関数には、賃金インフレ率も加わることが示された。さらに、Aoki(2001)は、価格の粘着性の異なる 2 部門モデルを考え、最適金融政策は、粘着的な価格の安定をより重視すべきであることを解析的に示した。また、Svensson(2003)は、損失関数の最小化より得られる、需給ギャップとインフレ率の最適な関係を維持するよう試みるターゲティング・ルールという考え方を提示し、これが、テイラー・ルールのような利子率ルールよりも、決定性を満たす(すなわち、経済を過度に不安定化させない)という意味で、優れていることを示した。

一方で、ニュー・ケインジアン・モデルは、規範

的な分析だけでなく、景気循環の説明にも利用されている。Christiano *et al.* (2005) は、価格の粘着性に加え、名目賃金の粘着性、消費の習慣形成、投資成長率についての調整コスト、資本稼働率などの硬直性を組み込んだニュー・ケインジアン・モデルを構築した。Christiano *et al.* (2005) は、構造 VAR モデルより得られる金融政策ショックに対するインパルス・レスポンスに、DSGE モデルのレスポンスを近づけるようにパラメーターを(すなわち、シミュレーション積率法によって)推定し、こうしたモデルのフィットが十分に高いことを示した。さらに、Smets and Wouters (2003, 2007) は、Schorfeide (2000) によって提案された MCMC を用いたベイズ推定法を用いて、Christiano *et al.* (2005) モデルを米国、欧州について推定し、このような方法で推定されたモデルのフィットは、VAR と遜色ないものとなることを示した。現在、Christiano *et al.* (2005) をベースとしたモデルをベイズ推定法によってパラメーターを推定する手法は、各国中央銀行、国際機関などでは、マクロモデル構築をする際の標準的アプローチとなっている(例えば、Brubakk *et al.*, 2006; Murchison and Rennison, 2006; Adolfson *et al.*, 2007; Erceg *et al.*, 2006; Laxton and Pesenti, 2003; Christoffel *et al.*, 2008 など)を参照されたい。

3. DSGE モデルの導出と解法

ここでは、最も単純な新古典派成長モデルを用いて、DSGE モデルの導出とその解法についてみてみよう。静学モデルではない DSGE モデルでは、期待をどのようにして過去の変数やショック(状態変数)で表現するかが重要となってくる。なお、通常のモデルでは、合理的期待を仮定することによって、モデルの期待変数は、状態変数の関数として表すことが可能となる¹⁰⁾。

3.1 モデルの導出

家計 i は、消費 C_t が増えると増加し、労働供給 h_t が増加すると低下するような効用：

$$U_t(i) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[C_t(i), h_t(i)]$$

を、予算制約：

$$C_t(i) + K_{t+1}(i) - (1-\delta)K_t(i) + FA_t(i) \leq r_t^K K_t(i) + W_t h_t(i) + R_t FA_{t-1}(i)$$

の下で最大化する¹¹⁾。なお、 K_t は資本ストック、 FA_t は金融資産残高、 r_t^K は資本コスト、 W_t は賃金、 R_t は実質金利、 β は主観的割引率、 δ は資本の減耗率をそれぞれ示す¹²⁾。一階の最適条件から、

$$u_C[C_t(i), h_t(i)] = \beta E_t R_{t+1} u_C[C_{t+1}(i), h_{t+1}(i)], \quad (1)$$

$$u_C[C_t(i), h_t(i)] = \beta E_t u_C[C_{t+1}(i), h_{t+1}(i)] [(1-\delta) + r_{t+1}^K], \quad (2)$$

$$u_h[C_t(i), h_t(i)] = -u_C[C_t(i), h_t(i)] W_t \quad (3)$$

が導出される。なお、全ての家計が同質であれば、 $C_t(i) = C_t$, $h_t(i) = h_t$, $K_t(i) = K_t$, $FA_t = 0$ となるため、(2), (3) 式は、以下のように変形される。

$$u_C(C_t, h_t) = \beta E_t u_C(C_{t+1}, h_{t+1}) [(1-\delta) + r_{t+1}^K], \quad (4)$$

$$u_h(C_t, h_t) = -u_C(C_t, h_t) W_t. \quad (5)$$

一方で、代表的企業は、生産より要素費用を除いた利潤：

$$\pi_t = f(K_t, h_t) - W_t h_t - r_t^K K_t$$

を最大化する。一階の最適条件から、

$$r_t^K = f_K(K_t, h_t), \quad (6)$$

$$W_t = f_h(K_t, h_t) \quad (7)$$

が導出される。

家計の最適化条件である(4), (5) 式、企業の最適化条件である(6), (7) 式と財市場の均衡条件、すなわち、資源制約：

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = f(K_t, h_t) \quad (8)$$

の5式がモデルを構成し、5つの内生変数($C_t, K_t, h_t, W_t, r_t^K$)を決定する。ここで、効用関数を

$$u(C_t, h_t) = \ln C_t - \frac{\chi}{2} h_t^2,$$

生産関数および技術ショックの確率過程を、それぞれ、

$$f(K_t, h_t) = [\exp(z_t) h_t]^{1-\alpha} K_t^\alpha, \quad z_t = \rho_z z_{t-1} + u_t \quad (9)$$

と仮定すると、(4)-(7) 式は、技術ショック z_t を外生変数とし、3つの内生変数(C_t, K_t, h_t)を決める3つの式から成立する以下のモデルに書き換えることができる。

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \frac{1}{C_{t+1}} \{ (1-\delta) + \alpha [\exp(z_{t+1}) h_{t+1}]^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} \}, \quad (10)$$

$$(1-\alpha) + [\exp(z_t) h_t]^{-\alpha} \exp(z_t) K_t^\alpha = \chi h_t C_t, \quad (11)$$

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = [\exp(z_t) h_t]^{1-\alpha} K_t^\alpha. \quad (12)$$

3.2 定常状態

定常状態は、(10)-(12) 式の時点を取り除き、技術ショックを0と設定することによって以下のように求められる。

$$K = \sqrt{\frac{\frac{1-\alpha}{\chi} \left[\frac{1+\beta(\delta-1)}{\alpha\beta} \right]^{-\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}}}{\frac{1+\beta(\delta-1)}{\alpha\beta} - \delta}},$$

$$h = \sqrt{\frac{\frac{1-\alpha}{\chi} \left(\frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta} - \delta}},$$

$$C = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\chi} \left[\frac{1+\beta(\delta-1)}{\alpha\beta} \right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}.$$

3.2.1 線形近似

ここで、(10)-(12) 式を、定常状態近傍で、対数線形近似、すなわち、

$$\ln \frac{X_t}{\bar{X}} \approx \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}} \equiv \tilde{x}_t$$

を行うと、

$$E_t \tilde{C}_{t+1} = \tilde{C}_t + (1-\alpha) [1-\beta(1-\delta)] (E_t \tilde{r}_{t+1} + E_t \tilde{h}_{t+1} - \tilde{K}_{t+1}) = 0, \quad (13)$$

$$\alpha \tilde{K}_t - \tilde{C}_t - (1+\alpha) \tilde{h}_t + (1-\alpha) z_t = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1-\beta(1-\delta) - \alpha\beta\delta}{\alpha\beta} \tilde{C}_t + \tilde{K}_{t+1} - (1-\delta) \tilde{K}_t$$

$$= \frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta} [(1-\alpha)z_t + (1-\alpha)\bar{h}_t + \alpha\bar{K}_t] \quad (15)$$

が導出できる。ここで、(14)式を(13)、(15)式に代入すると、モデルは、内生変数である消費と資本ストックについての以下の2つの方程式に集約することができる。

$$\begin{aligned} & [2-(1-\alpha)\beta(1-\delta)]E_t\bar{C}_{t+1} \\ & + (1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]\bar{K}_{t+1} \\ & = (1+\alpha)\bar{C}_t + 2(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]E_tz_{t+1}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{t+1} = & -\frac{2[1-\beta(1-\delta)]-\alpha\beta\delta(1+\alpha)}{\alpha\beta(1+\alpha)}\bar{C}_t \\ & + \frac{2-(1-\alpha)\beta(1-\delta)}{(1+\alpha)\beta}\bar{K}_t \\ & + \frac{2(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]}{\alpha(1+\alpha)\beta}z_t. \quad (17) \end{aligned}$$

3.3 合理的期待解の導出

ここでは、Blanchard and Kahn(1980), Christiano(2002), Sims(2002)の手法を用いて、上記のモデルを状態空間表現した上で、その合理的期待均衡(パス)を求めよう¹³⁾。

3.3.1 Blanchard and Kahn(1980)

内生変数である $(\bar{C}_t, \bar{K}_t)$ を決める(16), (17)式は、以下のように表現することができる。

$$A \begin{pmatrix} E_t\bar{C}_{t+1} \\ \bar{K}_{t+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{C}_t \\ \bar{K}_t \end{pmatrix} + CE_tz_{t+1} + Dz_t. \quad (18)$$

ここで、それぞれの行列は以下のように定義される。

$$A = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} g_3 & 0 \\ g_4 & g_1/\beta g_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2g_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ g_5 \end{pmatrix}.$$

ただし、

$$\begin{aligned} g_1 &= 2-(1-\alpha)\beta(1-\delta), \\ g_2 &= (1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)], \\ g_3 &= 1+\alpha, \\ g_4 &= -\frac{2[1-\beta(1-\delta)]-\alpha\beta\delta(1+\alpha)}{\alpha\beta(1+\alpha)}, \\ g_5 &= \frac{2(1-\alpha)[1-\beta(1-\delta)]}{\alpha\beta(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

A の逆行列を両辺にかけることによって、(18)式は以下のように変形される。

$$\begin{pmatrix} E_t\bar{C}_{t+1} \\ \bar{K}_{t+1} \end{pmatrix} = A^{-1}B \begin{pmatrix} \bar{C}_t \\ \bar{K}_t \end{pmatrix} + A^{-1}CE_tz_{t+1} + A^{-1}Dz_t. \quad (19)$$

ここで、行列 $A^{-1}B$ について、固有値分解を行うと、

$$A^{-1}B = V\Lambda V^{-1} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

と変形することが可能となる。 V の第1列は、固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル、第2列は、固有値 λ_2 に対応する固有ベクトルを表す。なお、簡便化のため、

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

と表現した、この結果、(19)式は以下のように表せる。

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t\bar{C}_{t+1} \\ \bar{K}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{C}_t \\ \bar{K}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} E_tz_{t+1} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} z_t. \quad (20)$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} A^{-1}C,$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} A^{-1}D$$

と変形できる。

次に、(20)式の第1行、第2行それぞれに着目することによって、Policy Functionを導出してみよう。第1行は、

$$v_{11}E_t\bar{C}_{t+1} + v_{12}\bar{K}_{t+1} = \lambda_1(v_{11}\bar{C}_t + v_{12}\bar{K}_t) + c_1E_tz_{t+1}$$

を表現している。ここで、

$$|\lambda_1| > 1 \quad (21)$$

であれば、(19)式を用いると、

$$\begin{aligned} (v_{11}\bar{C}_t + v_{12}\bar{K}_t) &= -\frac{c_1}{\lambda_1}E_tz_{t+1} - \frac{c_1}{\lambda_1^2}E_tz_{t+2} - \frac{c_1}{\lambda_1^3}E_tz_{t+3} \\ &\quad - \cdots - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c_1}{\lambda_1^T}E_tz_{t+T} \\ &= -\frac{\rho_z}{\lambda_1}c_1z_t - \left(\frac{\rho_z}{\lambda_1}\right)^2c_1z_t - \left(\frac{\rho_z}{\lambda_1}\right)^3c_1z_t \\ &\quad - \cdots - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\rho_z^T}{\lambda_1^T}c_1z_t \\ &= -\frac{\lambda_1c_1}{\lambda_1 - \rho_z}z_t \end{aligned}$$

となるため、

$$\bar{C}_t = -\frac{v_{12}}{v_{11}}\bar{K}_t - \frac{\lambda_1c_1}{v_{11}(\lambda_1 - \rho_z)}z_t \quad (22)$$

が導出できる。一方、第2行

$$v_{21}E_t\bar{C}_{t+1} + v_{22}\bar{K}_{t+1} = \lambda_2(v_{21}\bar{C}_t + v_{22}\bar{K}_t) + d_2z_t$$

は、

$$|\lambda_2| < 1 \quad (23)$$

であれば、再び、(9)式を用いることにより、

$$\bar{K}_{t+1} = w_2\bar{K}_t + \frac{v_{11}d_2 - v_{21}\lambda_2c_1}{v_{11}v_{22} - v_{21}v_{12}}z_t \quad (24)$$

と表現されることとなる。

(21), (23)式が示すように、状態変数 $(\bar{K}_t, \text{先決内生変数})$ の数と絶対値が1より小さい固有値の数が一致すると(もしくは、操作変数 $\bar{C}_t$ と絶対値が1より大きい固有値の数が一致すると)、すなわち、いわゆるBlanchard and Kahn(1980)条件が満たされると、(9), (22), (24)式が示すように、初期値、ないしショックを所与とした、鞍点上の合理的期待均衡をユニークに求めることが可能となる¹⁴⁾。

この方法を用いた簡単なニュー・ケインジアンDSGEモデルの解法については、加藤(2006)を参照されたい。

3.3.2 Christiano(2002)

Christiano(2002)による解法は、一般的な未定計数法と解釈することができる¹⁵⁾。(16), (17)式は、以下のように表現することが可能となる。

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} E_t \bar{C}_{t+1} \\ E_t \bar{K}_{t+1} \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \bar{C}_t \\ \bar{K}_t \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \bar{C}_{t-1} \\ \bar{K}_{t-1} \end{pmatrix} + \beta_0 E_t z_{t+1} + \beta_1 z_t = 0. \quad (25)$$

なお、

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} -\vartheta_3 & \vartheta_2 \\ -\vartheta_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\vartheta_5 \end{pmatrix},$$

$$\beta_0 = -C, \quad \beta_1 = -D.$$

ここで、求める解は、

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_t \\ \bar{K}_{t+1} \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} \bar{C}_{t-1} \\ \bar{K}_t \end{pmatrix} + S_2 z_t \quad (26)$$

であるため、 S_1, S_2 という 2 つの未定係数(行列)を算出できれば、解(Policy Function)が求まることとなる。(9), (26)式を(25)式に代入すると、

$$(\alpha_0 S_1^2 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2) \begin{pmatrix} \bar{C}_{t-1} \\ \bar{K}_t \end{pmatrix} + [(\beta_0 + \beta_1 S_2) \rho_z + \beta_1 + (\alpha_1 + \alpha_0 S_1) S_2] z_t = 0$$

が得られる。このため、

$$\alpha_0 S_1^2 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I = 0 \quad (27)$$

となるような S_1 を求め、これを代入した上で、線形方程式

$$(\beta_0 + \alpha_0 S_2) \rho_z + \beta_1 + (\alpha_1 + \alpha_0 S_1) S_2 = F = 0 \quad (28)$$

を解く S_2 を見つければよい。なお、ここで(27)式より、 S_1 がユニークに決まるかどうかは、上記同様、Blanchard and Kahn(1980)条件に依存する。

(27)式より、行列 S_1 は、例えば、上記の Blanchard and Kahn(1980)のような手法を用いれば容易に求めることができる。(28)式より、行列 S_2 を求める際には、行列の列をベクトル変換するようなベクトル・オペレーター、 $\text{vec}(\cdot)$ 、が有用となる¹⁶⁾。

$$\text{vec}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ここで、

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

なお、ベクトル・オペレーターは、

$$\text{vec}(a+b) = \text{vec}(a) + \text{vec}(b),$$

$$\text{vec}(abc) = (c' \otimes a) \text{vec}(b)$$

という 2 つの特徴を持っている。このため、

$$\text{vec}(F') = \text{vec}(\rho_z \beta_0' + \rho_z S_2' \alpha_0' + \beta_1' + (S_2' \alpha_1' + S_2' S_1' \alpha_0'))$$

$$= \text{vec}(\rho_z \beta_0' + \beta_1')$$

$$+ \text{vec}(\rho_z S_2' \alpha_0' + S_2' \alpha_1' + S_2' S_1' \alpha_0')$$

$$= \text{vec}(\rho_z \beta_0' + \beta_1')$$

$$+ [\alpha_0 \rho_z + (\alpha_1 \otimes I) + (\alpha_0 S_1' \otimes I)]$$

$$\text{vec}(S_2') = 0$$

と表現できることから、 S_2' は以下のように求めることができる。

$$\text{vec}(S_2') = -(\alpha_0 \rho_z + \alpha_1 \otimes I + \alpha_0 S_1' \otimes I)^{-1} \text{vec}(\rho_z \beta_0' + \beta_1').$$

3.4 Sims(2002)

本稿の分析で用いる、Sims(2002)の手法は、内生変数、先決内生変数(状態変数)の区別なしにモデル

ルを解ける点、行列が特異であっても解ける点、Lubik and Schorfheide(2004)によって示されたように、予測誤差(合理的期待エラー)を明示的に取り扱うことにより、非決定のモデルであっても、Policy Functionを得られる点、などで優れている¹⁷⁾。(9), (16), (17)式は、以下のように表現される。

$$\Gamma_0 s_t = \Gamma_1 s_{t-1} + \Psi \epsilon_t + \Pi \eta_t. \quad (29)$$

ここで、

$$s_t = [\bar{C}_t, \bar{K}_{t+1}, z_t, E_t \bar{C}_{t+1}, E_t z_{t+1}]',$$

$$\epsilon_t = u_t,$$

$$\eta_t = [\bar{C}_t - E_{t-1} \bar{C}_t, z_t - E_{t-1} z_t]'$$

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\vartheta_3 & \vartheta_2 & 0 & \vartheta_1 & -2\vartheta_2 \\ \vartheta_5 & 1 & -\vartheta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\vartheta_1}{\beta \vartheta_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_z & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.4.1 Γ_0 が正則行列の時

ここでのモデルのように、 Γ_0 が正則行列の時には、(29)式は、

$$s_t = \Gamma_0^{-1} \Gamma_1 s_{t-1} + \Gamma_0^{-1} \Psi \epsilon_t + \Gamma_0^{-1} \Pi \eta_t$$

$$= \Gamma_0^{-1} \Gamma_1 s_{t-1} + \Psi^* \epsilon_t + \Pi^* \eta_t$$

となり、Blanchard and Kahn(1980)のケースと同様、

$$\Gamma_0^{-1} \Gamma_1 = \Lambda V^{-1}$$

といった固有値分解を用いると、

$$\omega_t = \Lambda \omega_{t-1} + V^{-1} \Psi^* \epsilon_t + V^{-1} \Pi^* \eta_t \quad (30)$$

となる。ここで、

$$\omega_t = V^{-1} s_t.$$

さらに、(30)式は、 Λ について、左上から、固有値の小さい順に並べ替えると、

$$\begin{pmatrix} \omega_{S,t} \\ \omega_{U,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_S & 0 \\ 0 & \Lambda_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{S,t-1} \\ \omega_{U,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_S^{-1} \\ V_U^{-1} \end{pmatrix} \Psi^* \epsilon_t + \begin{pmatrix} V_S^{-1} \\ V_U^{-1} \end{pmatrix} \Pi^* \eta_t \quad (31)$$

と表現することができる。ここで、添字 S は固有値が 1 より小さい行に対応する行列(ないしベクトル)、添字 U はこれが 1 より大きい行に対応する行列(ないしベクトル)をそれぞれ示す。

ω_t についての解が定常であるためには、

$$\omega_{U,t} = 0 \quad \forall t \quad (32)$$

であることが必要となるため、

$$V_U^{-1} \Psi^* \epsilon_t = -V_U^{-1} \Pi^* \eta_t \quad \forall t \quad (33)$$

が満たされる必要がある。ここで、 η_t が ϵ_t によって、ユニークに表現されるのであれば、予測誤差が同じ期の構造ショックだけで表現されることを意味するため、モデルは、Blanchard and Kahn(1980)条

件($V_U^{-1}\Pi^*$ が正則行列)を満たし, 合理的期待均衡がユニークに決定されることとなる¹⁸⁾.

決定性が満たされるケース (31)式の上の行については,

$$\begin{aligned}\omega_{S,t} &= \Lambda_S \omega_{S,t-1} + V_S^{-1} \Psi^* \epsilon_t + V_S^{-1} \Pi^* \eta_t \quad (34) \\ \text{となるため, これに(33)式を代入すると,} \\ \omega_{S,t} &= \Lambda_S \omega_{S,t-1} \\ &\quad + V_S^{-1} [\Psi^* - \Pi^* (V_U^{-1} \Pi^*)^{-1} V_U^{-1} \Psi^*] \epsilon_t \quad (35)\end{aligned}$$

が得られる。(32), (33), (35)式より, 合理的期待均衡をユニークに求めることができる。

非決定のケース ここでのモデルは, 決定性条件が満たされるが, それ以外の場合, すなわち, 1より大きい固有値の数が予測誤差の数よりも少なく, モデルが非決定となるケースについて考えてみよう。ここで, $V_U^{-1}\Pi^*$ の行が全て独立でなければ,

$$\begin{aligned}V_U^{-1}\Pi^* &= (U_1 U_2) \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \end{pmatrix} \quad (36) \\ &\quad \begin{matrix} m \times m & m \times k & k \times k \\ & m \times r & r \times r & r \times k \end{matrix} \\ &= \widehat{U} \widehat{D} \widehat{V}' = \widehat{U}_1 \widehat{D}_{11} \widehat{V}_1'\end{aligned}$$

のように, これを特異値分解することができる。ここで, D は対角行列, その他は正規直交行列, m は1より大きい固有値の数, k は予測誤差(期待変数)の数, r は予測誤差を決める制約の数($V_U^{-1}\Psi^*$ のランク)をそれぞれ示す。ここで, 少なくとも, 一つは安定解が存在する, すなわち,

$$\eta_t = -\lambda \epsilon_t$$

となるような λ が見つかるのであれば,

$$V_U^{-1}\Psi^* = V_U^{-1}\Pi^* \lambda \quad (37)$$

となるため, (33)式は,

$$\widehat{U}_1 D_{11} \begin{pmatrix} m \times r & r \times 1 \\ \hline V_1' \lambda \epsilon_t + V_1' \eta_t \end{pmatrix} = 0 \quad (38)$$

となる。ここで, 予測誤差が, 構造ショックと $E_{t-1}(\zeta_t) = 0$ という性質を持つサンスポット・ショック ζ_t の線形結合で表現されると仮定してみよう。

$$\eta_t = A_1 \epsilon_t + A_2 \zeta_t. \quad (39)$$

この結果, ここでの問題は, どのようにして, A_1 と A_2 をみつけるかということになる¹⁹⁾。ここで, (39)式を(38)式に代入すると,

$$U_1 D_{11} (V_1' \lambda + V_1' A_1) \epsilon_t + U_1 D_{11} V_1' A_2 \zeta_t = 0 \quad (40)$$

となる。すべての ζ_t について, (40)式が成立するためには,

$$U_1 D_{11} V_1' A_2 \zeta_t = 0.$$

すなわち, A_2 が V_1 に直交する必要がある。特異値分解より,

$$V_1 V_2 = 0$$

であるため, M_2 を任意の行列とした場合, この条件は,

$$A_2 = V_2 M_2$$

であれば満たされる。

一方, 正規直交行列の仮定より,

$$V V' = I = V_1 V_1' + V_2 V_2'$$

であるため,

$$V_1 V_1' A_1 + V_2 V_2' A_1 = A_1$$

が得られる。さらに, 正規直交行列の仮定から,

$$V_1 V_1' = I, \quad V_1 V_2' = 0$$

となるため, (40)式で表現される安定化条件は,

$$\begin{aligned}U_1 D_{11} (V_1' \lambda + V_1' A_1) \\ &= U_1 D_{11} [V_1' \lambda + V_1' (V_1 V_1' A_1 + V_2 V_2' A_1)] \\ &= U_1 D_{11} (V_1' \lambda + V_1' A_1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

すなわち,

$$V_1 A_1 = -V_1' \lambda$$

であることも要求する。ここで, (36), (37)式より,

$$V_1' \lambda = D_{11}^{-1} U_1' V_U^{-1} \Psi^*$$

となるため, (39)式は,

$$\eta_t = (-V_1 D_{11}^{-1} U_1' V_U^{-1} \Psi^* + V_2 V_2' A_1) \epsilon_t + V_2 M_2 \zeta_t \quad (41)$$

として, 予測誤差を構造ショックとサンスポット・ショックの線形結合で表現することが可能となる。この場合, (32), (34), (41)式が合理的期待均衡解を規定する。なお, A_1 と M_2 は任意の行列であり, $V_2 A_1$ は $(k-r) \times l$, M_2 は $(k-r) \times p$ の行列であるため, $k=r$ の時には, ユニークな合理的期待均衡を求めることが可能となり, 決定性が満たされるケースのように解が表現されることとなる。

3.4.2 Γ_0 が特異行列の時

ここで紹介したモデルでは, Γ_0 は正則行列となるが, 以下では, これが特異行列だったとして考えてみよう。(29)式の行列 Γ_0 と Γ_1 は, QZ 分解により以下のように変形できる。

$$Q'QZ' = \Gamma_0, \quad Q'QZ' = \Gamma_1.$$

ただし, $Q'Q = Z'Z = I$ であり, Q と Z は複素数になる可能性もある。 Φ と Ω は上三角行列で, これらも複素数になる可能性がある。こうした QZ 分解は必ず存在する。

ここで,

$$\omega_t = Z' s_t$$

とし, (29)式の両辺の前に Q を掛けると, 次式が得られる。

$$\Phi Z' s_t = \Omega Z' s_{t-1} + Q \Psi \epsilon_t + Q \Pi \eta_t \quad (42)$$

QZ 分解は解が1つには決まらないが, Ω と Φ の対角成分の比率 $\{\omega_H/\phi_H\}$ (一般化固有値と呼ばれる)は一般的に1つである。そこで, 行列 Ω と Φ について, 一般化固有値の絶対値の小さいものから大きい方ものへと順番に並べ, (42)式を絶対値が1より小さい安定な一般化固有値と1より大きい不安定な一般化固有値の2つのブロックに分けることにより, 以下の(43)式のように書き換える。

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ 0 & \Phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{S,t} \\ \omega_{U,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{S,t-1} \\ \omega_{U,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{.1} \\ Q_{.2} \end{pmatrix} (\Psi \epsilon_t + \Pi \eta_t).$$

ここで, $Q_{.1}$ と $Q_{.2}$ は行列 Q の第1列と第2列をそれぞれ示す。

不安定なブロックは,

$$\omega_{U,t} = \Phi_{22}^{-1} \Omega_{22} \omega_{U,t-1} + \Phi_{22}^{-1} Q_{.2} (\Psi \epsilon_t + \Pi \eta_t)$$

と表現することができる。このブロックについては, 一般化固有値の値が1より大きいため, (32), (33)

式と同じように、

$$\omega_{U,t} = 0 \quad \forall t, \quad (43)$$

$$Q_2 \Psi \epsilon_t = -Q_2 \Pi \eta_t \quad \forall t \quad (44)$$

が均衡条件として求まる。なお、ここでは、非決定のケースは扱わないが、基本的には上記のような手続きをとれば、(41)式と同様の式を求めることができる。

一方、安定的なブロックについては、(43)、(44)式を用いることで、

$$\begin{aligned} \omega_{S,t} &= \Phi_{11}^{-1} \Omega_{11} \omega_{S,t-1} + \Phi_{11}^{-1} Q_{11} (\Psi \epsilon_t + \Pi \eta_t) \\ &= \Phi_{11}^{-1} \Omega_{11} \omega_{S,t-1} \\ &\quad + \Phi_{11}^{-1} Q_{11} [\Psi - \Pi (Q_2 \Pi)^{-1} Q_2 \Psi] \epsilon_t \end{aligned} \quad (45)$$

を導出することができる。(43)、(44)、(45)式が合理的期待均衡をユニークに決定する。

4. ニュー・ケインジアン DSGE モデル

本節では、推定に用いるニュー・ケインジアン DSGE モデルを導出する。なお、事前に恣意的に変数のトレンドを仮定することなしにモデルの推定が可能となる Del Negro and Schorfheide (2004), An and Schorfheide (2007) を参照した。

4.1 モデルの導出

最終財製造企業は、完全競争下、中間財 $Y_t(j)$ $j \in [0, 1]$ を用いて、以下の生産技術を用いて最終財を生産する。

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(j)^{1-\nu} dj \right]^{\frac{1}{1-\nu}}. \quad (46)$$

ここで、 $1/\nu (>1)$ は各中間財の需要の価格弾力性を表す。企業は中間財の価格 $P_t(j)$ と最終財の価格 P_t を所与として利潤最大化を行う。その結果、中間財の需要を以下のように求めることができる。

$$Y_t(j) = \left[\frac{P_t(j)}{P_t} \right]^{-1/\nu} Y_t. \quad (47)$$

また、(47)式を(46)式に代入すると、最終財の価格を以下のように定義することができる。

$$P_t = \left[\int_0^1 P_t(j)^{\frac{\nu}{1-\nu}} dj \right]^{\frac{1-\nu}{\nu}}.$$

一方、中間財 j は、独占的競争下、線形の生産関数：

$$Y_t(j) = A_t h_t(j)$$

を持つ中間財生産企業 j によって生産される。ここで、 A_t はすべての企業に共通の生産性を表す。労働は完全競争市場において実質賃金 W_t で雇用される。この結果、企業 j が直面する限界費用 MC_t は、以下のコスト最小化問題のラグランジュ乗数として求まる。

$$W_t h_t(j) + MC_t [Y_t(j) - A_t h_t(j)].$$

すなわち、

$$MC_t = \frac{W_t}{A_t}$$

となる。企業 j は、価格変更に伴う Rotemberg (1982) 型の調整コストに直面しながら、利益 D_t の割引現在価値：

$$\begin{aligned} &E_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} Q_{t+s|t} D_{t+s}(j) \right] \\ &= E_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} Q_{t+s|t} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}} Y_{t+s}(j) - W_{t+s} h_{t+s}(j) \right) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\phi}{2} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s-1}(j)} - \pi^* \right)^2 Y_{t+s}(j) \Bigg] \\ &= E_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} Q_{t+s|t} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}} - MC_{t+s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\phi}{2} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s-1}(j)} - \pi^* \right)^2 Y_{t+s}(j) \right) \right] \\ &= E_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} Q_{t+s|t} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}} - \frac{W_{t+s}}{A_{t+s}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\phi}{2} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s-1}(j)} - \pi^* \right)^2 Y_{t+s}(j) \right) \right] \end{aligned}$$

を最大化するように、名目価格を設定する。ここで、 $Q_{t+s|t}$ は、確率割引因子、すなわち、家計にとっての $t+s$ 期の消費財 1 単位の t 期における価値(企業には外生変数)を表す。 π^* は後述する中央銀行が設定する目標インフレ率、 ϕ は、価格粘着性の強さを規定するパラメーターを、それぞれ示す。

一方、家計は以下のように定義される効用の割引現在価値：

$$E_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left(\frac{C_{t+s}/A_{t+s}}{1-\tau} - \chi_H h_{t+s} \right) \right] \quad (49)$$

を、予算制約式

$$P_t C_t + E_t [Q_{t+1|t} S_{t+1}] + B_t + T_t \leq P_t W_t h_t + (1+i_{t-1}) B_{t-1} + P_t D_t + S_t \quad (50)$$

の下で最大化するよう消費、労働供給を決定する。 $1/\tau$ は異時点間代替の弾力性、 χ_H は労働時間の定常状態を決定するスケール・パラメータで、ここでは、 $\chi_H=1$ とする。家計は名目利子率 i_t をクーポン利回りとする国債 B_t 、およびアロー・証券 S_t の取引に参加できる²⁰⁾。さらに、家計は企業から残余実質利潤 D_t を受け取り、一括税 T_t を支払う。なお、資産蓄積に関する横断性条件は満たされているものとする。効用水準は、今期の消費だけでなく、レファレンスとなる水準 A_t からの乖離に応じて変化する。 A_t は、消費の習慣モデルに照らすと、 C_{t-1} を表すと考えることができ、習慣ショックと解釈することができる。なお、本稿では簡便化のため、これが生産技術と同等と仮定した²¹⁾。

金融政策は、インフレ率、需給ギャップ(潜在 GDP からの乖離)に応じて金利を変動させるテイラー・ルールに従い決定されていると仮定する。

$$1+i_t = \left[\frac{\pi^*}{\beta} \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\phi_1} \left(\frac{Y_t}{Y_t^*} \right)^{\phi_2} \right]^{1-\rho_R} (1+i_{t-1})^{\rho_R} e^{\epsilon_{R,t}}. \quad (51)$$

ここで、 $\epsilon_{R,t}$ は金融政策のショック、 $\pi_t (=P_t/P_{t-1})$ は粗インフレ率、 Y_t^* は価格が伸縮的な経済における GDP 値を、それぞれ示す。なお、 ϕ_1, ϕ_2, ρ_R はそれぞれ政策パラメーターを示す。

財政当局は、GDP の ζ_t ($\zeta_t \in [0, 1]$) 割合の財政支出を行う。

$$G_t = \zeta_t Y_t. \quad (52)$$

なお、本稿では、財政支出からの効用はゼロであると仮定する。政府は政府収入の不足を賄うため一括税を課す。政府の予算制約式は以下になる。

$$P_t G_t + (1+i_{t-1}) B_{t-1} = T_t + B_t. \quad (53)$$

4.2 外生的ショック

生産性は以下のようなランダム・ウォークに従うと仮定する。

$$\ln A_t = \ln \gamma + \ln A_{t-1} + \ln z_t, \quad (54)$$

$$\ln z_t = \rho_z \ln z_{t-1} + \epsilon_{z,t}. \quad (55)$$

この仮定の下では、生産性は γ の率で成長し、 $\ln z_t$ は生産性成長率の外生的な変動を表す。

また、政府支出に関しては、 $g_t = 1/(1-\xi_t)$ の変動を以下のように仮定する。

$$\ln g_t = (1-\rho_g) \ln g + \rho_g \ln g_{t-1} + \epsilon_{g,t}. \quad (56)$$

$\epsilon_{z,t}, \epsilon_{g,t}$, および金融政策のショック $\epsilon_{R,t}$ は過去と独立で互いに独立な平均0の正規分布に従うと仮定する。標準偏差はそれぞれ $\sigma_z, \sigma_g, \sigma_R$ で表す。

4.3 均衡

ここでは、すべての中間財生産者が同一の選択をする対称的な均衡を考える。したがって、添字 j は省略することが可能となる。財市場の均衡条件である資源制約は、

$$Y_t = C_t + \frac{g_t-1}{g_t} Y_t + \frac{\phi}{2} \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} - 1 \right)^2 Y_t \quad (57)$$

として与えられる。なお、(57)式は、アロー証券の残高は閉鎖経済全体でみればゼロとなるため、(48), (50), (52), (53)の4式からも導出できる。

(49), (50)式で表現される家計の効用最大化問題より、

$$Q_{t+1|t} = \beta E_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\tau} \left(\frac{A_t}{A_{t+1}} \right)^{1-\tau}, \quad (58)$$

$$1 = C_t^{-\tau} \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\tau} W_t, \quad (59)$$

$$\frac{1}{1+i_t} = \beta E_t \frac{1}{\pi_{t+1}} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\tau} \left(\frac{A_t}{A_{t+1}} \right)^{1-\tau} \quad (60)$$

が導出できる。

一方、企業部門については、(48)式で表現される利潤を、(47)式で表現される需要関数の制約の下、最大化するよう価格を設定することで、ニュー・ケインジアン・フィリップス曲線

$$\begin{aligned} (1-1/\nu) + \frac{1}{\nu} \left(\frac{C_t}{A_t} \right)^{\tau} \\ - \phi (\pi_t - \pi^*) \left(\left(1 - \frac{1}{2\nu} \right) \pi_t + \frac{\pi^*}{2\nu} \right) \\ + \phi \beta E_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\tau} \left(\frac{A_t}{A_{t+1}} \right)^{1-\tau} \frac{Y_{t+1}}{Y_t} (\pi_{t+1} - \pi^*) \pi_{t+1} \\ = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

を導出できる。なお、(61)式の導入に当たっては、(58), (59)式を代入した。ここで、(57), (61)式について、価格の粘着性がない場合、すなわち、 $\phi=0$ について解き、これに(52)式を代入すると、伸縮価格下のGDP水準として、

$$Y_t^* = (1-\nu)^{\frac{1}{\tau}} A_t g_t \quad (62)$$

が導出できる。この結果、(54), (55), (56)式によって規定される外生変数 (A_t, z_t, g_t) の下、(51), (57), (60), (61), (62)式が、内生変数 ($Y_t, C_t, i_t, \pi_t, Y_t^*$) を決定することとなる。

生産性 A_t は、非定常であるため、生産と消費に

確率的トレンドが生じる。そこで、トレンドを除去した変数 $c_t = C_t/A_t$, $y_t = Y_t/A_t$, $y_t^* = Y_t^*/A_t$ を導入する。この結果、(54)式を用いると、以下のように、トレンド除去後のモデルが導出できる。

$$1 + i_t = \left(\frac{\pi^*}{\beta} \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\phi_1} \left(\frac{y_t}{y_t^*} \right)^{\phi_2} \right)^{1-\rho_R} (1 + i_{t-1})^{\rho_R} e^{\epsilon_{R,t}}, \quad (63)$$

$$y_t = c_t + \frac{g_t-1}{g_t} y_t + \frac{\phi}{2} \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} - 1 \right)^2 y_t, \quad (64)$$

$$\frac{1}{1+i_t} = \beta E_t \frac{\gamma}{\pi_{t+1}} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\tau} \left(\frac{1}{z_{t+1}} \right), \quad (65)$$

$$\begin{aligned} (1-1/\nu) + \frac{1}{\nu} c_t^{-\tau} - \phi (\pi_t - \pi^*) \left\{ \left(1 - \frac{1}{2\nu} \right) \pi_t + \frac{\pi^*}{2\nu} \right\} \\ + \phi \beta E_t \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\tau} \frac{y_{t+1}}{y_t} (\pi_{t+1} - \pi^*) \pi_{t+1} = 0, \end{aligned} \quad (66)$$

$$y_t^* = (1-\nu)^{\frac{1}{\tau}} g_t. \quad (67)$$

インフレ率 π_t , 金利 i_t , およびトレンドを除去した変数 c_t, y_t, y_t^* については、 $\epsilon_{z,t}, \epsilon_{g,t}, \epsilon_{R,t}$ をすべて0とすることで、以下のように定常状態が求まる。

$$\pi = \pi^*, i = \frac{\pi}{\beta\gamma} - 1, c = (1-\nu)^{1/\tau},$$

$$y = g(1-\nu)^{1/\tau}, y^* = g(1-\nu)^{1/\tau}.$$

ここで、(55), (56), (63), (64), (65), (66), (67)式について、対数線形近似を行うと、モデルは以下のよう表せる²²⁾。

$$\tilde{z}_t = \rho_z \tilde{z}_{t-1} + \epsilon_{z,t}, \quad (68)$$

$$\tilde{g}_t = \rho_g \tilde{g}_{t-1} + \epsilon_{g,t}, \quad (69)$$

$$\tilde{i}_t = (1-\rho_R) (\phi_1 \tilde{\pi}_t + \phi_2 (\tilde{y}_t - \tilde{g}_t)) + \rho_R \tilde{i}_{t-1} + \epsilon_{R,t}, \quad (70)$$

$$\tilde{y}_t = E_t \tilde{y}_{t+1} - E_t \tilde{g}_{t+1} + \tilde{g}_t - \frac{1}{\tau} \left(\tilde{i}_t - \frac{1}{\tau} E_t \tilde{\pi}_{t+1} - \frac{1}{\tau} E_t \tilde{z}_{t+1} \right), \quad (71)$$

$$\tilde{\pi}_t = \kappa (\tilde{y}_t - \tilde{g}_t) + \beta E_t \tilde{\pi}_{t+1}. \quad (72)$$

ここで、

$$\kappa = \frac{\tau(1-\nu)}{\nu\pi^2\phi}. \quad (73)$$

この対数線形モデルでは、 ν と ϕ を識別できないので、以下ではそれらの代わりに(73)式で定義される κ を推定している。

以下、予測誤差を

$$\eta_{\pi,t} = \tilde{\pi}_t - E_{t-1}[\tilde{\pi}_t], \quad \eta_{y,t} = \tilde{y}_t - E_{t-1}[\tilde{y}_t] \quad (74)$$

と定義し、さらに内生変数ベクトル $\mathbf{s}_t$, 外生ショックのベクトル $\mathbf{e}_t$, 予測誤差ベクトル $\boldsymbol{\eta}_t$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{s}_t = [\tilde{\pi}_t, \tilde{y}_t, \tilde{i}_t, \tilde{g}_t, \tilde{z}_t, E_t[\tilde{\pi}_{t+1}], E_t[\tilde{y}_{t+1}]]', \quad (75)$$

$$\mathbf{e}_t = [\epsilon_{R,t}, \epsilon_{g,t}, \epsilon_{z,t}]', \quad (76)$$

$$\boldsymbol{\eta}_t = [\eta_{\pi,t}, \eta_{y,t}]'. \quad (77)$$

そうすると、(68)-(74)式を以下のようにまとめることができる。

$$\Gamma_0 \mathbf{s}_t = \Gamma_1 \mathbf{s}_{t-1} + \Psi \mathbf{e}_t + \Pi \boldsymbol{\eta}_t. \quad (78)$$

ただし、係数行列 $\Gamma_0, \Gamma_1, \Psi, \Pi$ は以下の通り。

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1/\tau & 1-\rho_g & \rho_z/\tau & 1/\tau & 1 \\ -1 & \kappa & 0 & -\kappa & 0 & \beta & 0 \\ -(1-\rho_R)\psi_1 & -(1-\rho_R)\psi_2 & 1 & (1-\rho_R)\psi_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

ここで, Sims (2002)の方法を用いると, (78)式は次のように解くことができる.

$$\mathbf{s}_t = \Theta_1 \mathbf{s}_{t-1} + \Theta_0 \epsilon_t. \quad (81)$$

4.4 観測方程式

このモデルの推定に用いるデータは, 一人当たり実質 GDP の成長率(YGR), インフレ率(INFL), 名目利子率(INT)である. これらはすべて四半期データで, %表示されているものとする. また, INFL と INT は年率表示されているものとする. そうすると, これらのデータとモデルの内生変数との関係は以下のように表せる.

$$\text{YGR}_t = \gamma^{(Q)} + 100(\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1} + \hat{z}_t), \quad (82)$$

$$\text{INFL}_t = \pi^{(A)} + 400\pi_t, \quad (83)$$

$$\text{INT}_t = \pi^{(A)} + r^{(A)} + 4\gamma^{(Q)} + 400\hat{r}_t. \quad (84)$$

ただし, パラメータ $\gamma^{(Q)}, \pi^{(A)}, r^{(A)}$ はモデルのパラメータと以下のような関係になる.

$$\gamma = 1 + \frac{\gamma^{(Q)}}{100}, \quad \beta = \frac{1}{1 + r^{(A)}/400}, \quad \pi = 1 + \frac{\pi^{(A)}}{400}. \quad (85)$$

ここで, $\mathbf{y}_t = [\text{YGR}_t, \text{INFL}_t, \text{INT}_t]'$, $\mathbf{s}_t = [\mathbf{s}_t', \hat{y}_{t-1}]'$ と定義すると, (82)-(84)式は下記のように表せる.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{d} + \mathbf{Z}\mathbf{s}_t. \quad (86)$$

ただし,

$$\mathbf{d} = [\gamma^{(Q)}, \pi^{(A)}, \pi^{(A)} + r^{(A)} + 4\gamma^{(Q)}]', \quad (87)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & -100 \\ 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

4.5 線形ガウシアン状態空間モデル

観測方程式(86)に合わせて, 状態変数を $\mathbf{s}_t$ ではなく, $\tilde{\mathbf{s}}_t = [\mathbf{s}_t', \hat{y}_{t-1}]'$ とすると, 遷移方程式(81)は以下のように表せる.

$$\tilde{\mathbf{s}}_t = \tilde{\Theta}_1 \tilde{\mathbf{s}}_{t-1} + \tilde{\Theta}_0 \epsilon_t. \quad (89)$$

係数行列 $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_0$ は, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]$, $\mathbf{0} = [0, \dots, 0]$ とすると, 以下のように定義される.

$$\tilde{\Theta}_1 = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} \Theta_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

(89)式と(86)式は以下のような線形ガウシアン状

態空間モデルを構成する.

・観測方程式

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{d} + \mathbf{Z}\mathbf{s}_t; \quad (90)$$

・遷移方程式

$$\tilde{\mathbf{s}}_t = \tilde{\Theta}_1 \tilde{\mathbf{s}}_{t-1} + \tilde{\Theta}_0 \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}). \quad (91)$$

ここで,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}.$$

5. MCMC を用いたベイズ推定法

5.1 尤度の評価

DSGE モデルは定常状態の周りで対数線形近似すると, (90), (91)式のような線形ガウシアン状態空間モデルで表わせることがわかった. したがって, それらに以下のカルマン・フィルターを適用することで尤度を計算することができる.²³⁾

・予測方程式

$$\tilde{\mathbf{s}}_{t|t-1} = \tilde{\Theta}_1 \tilde{\mathbf{s}}_{t-1|t-1}, \quad (92)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \tilde{\Theta}_1 \mathbf{P}_{t-1|t-1} \tilde{\Theta}_1' + \tilde{\Theta}_0 \mathbf{V} \tilde{\Theta}_0', \quad (93)$$

$$\mathbf{v}_{t|t-1} = \mathbf{y}_t - \mathbf{d} - \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{s}}_{t|t-1}, \quad (94)$$

$$\mathbf{F}_{t|t-1} = \mathbf{Z}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}'; \quad (95)$$

・更新方程式

$$\tilde{\mathbf{s}}_{t|t} = \tilde{\mathbf{s}}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}'\mathbf{F}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{v}_{t|t-1}, \quad (96)$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}'\mathbf{F}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{t|t-1}. \quad (97)$$

ここで, $\tilde{\mathbf{s}}_{t|t-1}$ と $\mathbf{P}_{t|t-1}$ はパラメータの値と $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1})$ が与えられた時の $\tilde{\mathbf{s}}_t$ の条件付期待値と条件付分散共分散行列, $\tilde{\mathbf{s}}_{t|t}$ と $\mathbf{P}_{t|t}$ はパラメータの値と $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t)$ が与えられた時の $\tilde{\mathbf{s}}_t$ の条件付期待値と条件付分散共分散行列, $\mathbf{v}_{t|t-1}$ と $\mathbf{F}_{t|t-1}$ はパラメータの値と $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1})$ が与えられた時の $\mathbf{y}_t$ の条件付期待値と条件付分散共分散行列を表す.

このアルゴリズムを, $\tilde{\mathbf{s}}_{1|0} = \mathbf{0}$, $\text{vec}(\mathbf{P}_{1|0}) = [\mathbf{I} - \tilde{\Theta}_1 \otimes \tilde{\Theta}_1]^{-1} \text{vec}(\tilde{\Theta}_0 \mathbf{V} \tilde{\Theta}_0')$ からスタートして²⁴⁾, 逐次的に実行すれば以下の式から対数尤度を計算できる.

$$\ln L = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{F}_{t|t-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_{t|t-1}' \mathbf{F}_{t|t-1}^{-1} \mathbf{v}_{t|t-1}. \quad (98)$$

5.2 ベイズ推定

データを $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T)$ とすると, MCMC を使わない従来のベイズ推定は以下のように行う²⁵⁾.

1. データを観測する前の分布である事前分布 $f(\boldsymbol{\theta})$ を設定する.
2. ベイズの定理

$$f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}) = \frac{f(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \quad (99)$$

から, データを観測した後の分布である事後分布 $f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y})$ を計算する.

3. 事後分布を用いてパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を推定する.

ここで, ベイズの定理(99)式の右辺の分母 $\int f(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{\theta}$ に依存しないので定数であり, その逆数は基準化定数(normalizing constant)と呼ばれる. DSGE モデルでは, 上で説明したように, 尤度 $f(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ はカルマ

ン・フィルターによって計算できるので, (99) 式の右辺の分子は計算できるが, 基準化定数を解析的に計算することができない. また, 尤度を解析的に計算できないモデルでは, (99) 式の右辺の分子も計算できない. そうした場合でも, MCMC を用いれば, 事後分布 $f(\theta|Y)$ から θ をサンプリングすることができる. そこで, そうした場合, MCMC を用いて以下のようにベイズ推定を行う.

1. 事前分布 $f(\theta)$ を設定する.
2. MCMC を用いて, 事後分布 $f(\theta|Y)$ から $(\theta_1, \dots, \theta_M)$ をサンプリングする.
3. サンプリングされた $(\theta_1, \dots, \theta_M)$ を用いてパラメータ θ を推定する.

5.3 MCMC

MCMC とは 1 回前にサンプリングされた値に依存させて次のサンプリングを行う方法の総称で, 大きく分けると, ギブス・サンプラーとメトロポリス・ヘイスティングス・アルゴリズム (MH アルゴリズム) の 2 つがある. DSGE モデルの推定では, 通常, ランダム・ウォーク MH アルゴリズムが用いられるので, 以下ではこの方法について説明する²⁶⁾.

本稿では, 合理的期待均衡が一意に求まる場合だけを考える. 正確には, 合理的期待均衡が一意に求まらなければ (他にパラメータの範囲は事前分布で切断する. そうすると, ランダム・ウォーク MH アルゴリズムを用いた DSGE モデルのパラメータのサンプリングは以下のように行う.

- [1] $\ln f(\theta|Y)$ のモード $\hat{\theta}$ を求める. モードが求まったら, Sims(2002) の方法により, $\hat{\theta}$ で合理的期待均衡が一意であるかどうか確認する. 一意であれば (他にパラメータの制約がある場合は, それも満たせば), モード $\hat{\theta}$ において $\ln f(\theta|Y)$ のヘッシアン の逆行列にマイナスをつけたもの

$$H = -[\partial^2 \ln f(\theta|Y) / \partial \theta \partial \theta' |_{\theta=\hat{\theta}}]^{-1} \quad (100)$$

を計算する. H が正値定符号であれば, [2] に進む.

- [2] $n=1$ とし, 適当な初期値 θ_0 を選択する. 例えば, [1] で求めたモードを初期値とする.
- [3] $\theta_n^{(\text{propos})}$ を以下のランダム・ウォーク・モデルからサンプリングする.

$$\theta_n^{(\text{propos})} = \theta_{n-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim \text{NID}(0, cH). \quad (101)$$

ここで, $\nu_t \sim \text{NID}(0, cH)$ は ν_t が平均 0, 分散共分散行列 cH の独立な正規分布に従うことを表している. また, c は調整係数であり, 詳細は以下で説明する.

- [4] Sims(2002) の方法により, [3] でサンプリングされた $\theta_n^{(\text{propos})}$ の下で合理的期待均衡が一意かどうかを調べ, 一意であれば (他にパラメータの制約がある場合は, それも満たせば), [5] に進む. そうでなければ, [3] に戻る.
- [5] $\theta_n^{(\text{propos})}$ と $n-1$ 回目にサンプリングされた θ_{n-1} を用いて, 以下の式から受容確率 q を計算する.

$$q = \min \left[\frac{f(\theta_n^{(\text{propos})} | Y)}{f(\theta_{n-1} | Y)}, 1 \right]. \quad (102)$$

- [6] $\theta_n^{(\text{propos})}$ を確率 q で受容し, 残りの確率 $1-q$ で棄却する. 受容された場合は $\theta_n = \theta_n^{(\text{propos})}$ とし, 棄却された場合は $\theta_n = \theta_{n-1}$ とする.
- [7] 過去のサンプリングから [6] で受容された比率を計算する. それが 25% を大幅に上回る場合は c を高くして [2] に戻る. 25% を大幅に下回る場合は c を低くして [2] に戻る.
- [8] $n < N$ であれば $n = n+1$ とし, [2] に戻る. $n = N$ であれば終了.

このアルゴリズムでは, $\theta_n^{(\text{propos})}$ は正しい分布からサンプリングされたものではないので, それをそのまま採択せず, $1-q$ の確率で棄却し, 棄却された場合, 1 回前にサンプリングされたのと同じ値 θ_{n-1} をサンプリングすることで, 正しい分布からサンプリングされるよう調整している. 具体的には, $f(\theta_n^{(\text{propos})} | Y) / f(\theta_{n-1} | Y) < 1$ の場合, 正しい分布の下では, $\theta_n^{(\text{propos})}$ よりも θ_{n-1} の方が出やすいので, $\theta_n^{(\text{propos})}$ を $1-q$ の確率で棄却し, 棄却された場合, 1 回前にサンプリングされたのと同じ値 θ_{n-1} をもう一度サンプリングすることで, $\theta_n^{(\text{propos})}$ がサンプリングされる確率を下げ, θ_{n-1} がサンプリングされる確率を上げている.

このアルゴリズムを実行すると, $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ がサンプリングされるが, $N \rightarrow \infty$ とすると, θ_N は $f(\theta|Y)$ からサンプリングされた変数に確率収束する. そこで, K, M を十分大きな数とし, $N = K + M$ として上記アルゴリズムを実行し, 事後分布に収束するまでの最初の $(\theta_1, \dots, \theta_K)$ を捨て (この捨てる回数 K のことを burn-in と呼ぶ), 残りの $(\theta_{K+1}, \dots, \theta_{K+M})$ を事後分布 $f(\theta|Y)$ からサンプリングされたものと見なして, 推定に用いればよい.

このアルゴリズムでは, [5] の受容確率 q の計算に事後密度の値が必要であるが, 事後密度の基準化定数は $f(\theta_n^{(\text{propos})} | Y) / f(\theta_{n-1} | Y)$ の分子と分母でキャンセルするので必要ない. そこで, 基準化定数がわからない場合でも応用できる²⁷⁾.

(101) 式の誤差項 ν_t の分散共分散行列を cH とする理由は以下の通りである. 事後分布が d 次元正規分布であり, その分散共分散行列 Σ が既知の場合には, (101) 式の誤差項 ν_t の分散共分散行列を $2.38^2 \Sigma / d$ とするのが最も効率的であることが知られている (Gelman *et al.*, 1996; Roberts *et al.*, 1997). ただし, ここで最も効率的というのは, サンプリングされた値の標本平均の標準誤差が最も小さいという意味で, 詳しくは以下で説明する. 実際には, 分散共分散行列 Σ は未知なので, 通常はそれを (100) 式の H で推定する.

また, [7] で受容比率が 25% 程度になるように係数 c を調整しているのは以下の理由による. このアルゴリズムでは, [6] で棄却されると, 1 回前にサンプリングされたのと同じ値がサンプリングされる. そこで, [5] の受容確率 q が低いと, 同じ値が続けて何度もサンプリングされることになり非効率であ

る。\$q\$ が小さくならないようにするためには、\$\theta_n^{(proposal)}\$ が \$\theta_{n-1}\$ とそれほど大きく乖離しないようにする必要があり、そのためには、調整係数 \$c\$ を小さくすればよい。しかし、\$c\$ をあまり小さくすると、\$\theta_n^{(proposal)}\$ が \$\theta_{n-1}\$ の周りの狭い範囲からしかサンプリングされなくなるので、それも効率的でない。そこで、受容確率が 25% 程度になるように \$c\$ を調整するのが効率的とされている²⁸⁾。Dynare でも、\$c\$ の値を調整できるので、必ず調整するよう注意されている。

(101)式では、\$v_t\$ の分布を正規分布にしているの、\$\theta_n^{(proposal)}\$ の値は \$(-\infty, \infty)\$ からサンプリングされることになる。そこで、取り得る値の範囲が限定されているパラメータに関しては、\$(-\infty, \infty)\$ のすべての値を取るように変数変換した上でサンプリングするのが望ましい。

このランダム・ウォーク MH アルゴリズムは、平均的に 4 回に 1 回しか値が変わらず、かつ 1 回前にサンプリングされた値から大きく離れた値がサンプリングされないの、サンプリングされた値の自己相関が高く(その結果、標本平均の標準誤差が高くなる)、あまり効率的なサンプリング法ではない。そのため、事後分布への収束が遅いので、burn-in の回数 \$K\$ を十分大きくする必要がある。

また、1 回前にサンプリングされた値から大きく離れた値がサンプリングされないの、事後分布が単峰でない場合には²⁹⁾、1 つの山の周りからしかサンプリングされない可能性がある。Chib and Ramamurthy(2010) は、ギブス・サンプラー、独立 MH アルゴリズム、擬似焼きなまし法(simulated annealing)を組み合わせることにより、そうした場合でもうまくサンプリングでき、かつ効率的な方法を提案しているが、この方法は 1 回のサンプリングに時間がかかるので、より実用的なサンプリング法の開発が望まれる。

5.4 収束判定

\$\theta\$ の burn-in 以降の \$M\$ 個のサンプルが得られたら、まずそれが事後分布からのサンプルに収束しているかどうかを確認する必要がある。少なくとも、サンプリングされた値をプロットして、途中で平均や分散に大きな変化が見られないかどうかは確認すべきである。その他にも収束の判定の方法がいくつか提案されているので³⁰⁾、そうした方法も用いるべきであろう。

本稿の以下の分析では、Geweke (1992)によって提案された CD(Convergence Diagnostic)統計量を用いて収束の判定を行っている。あるパラメータ \$\theta\$ の CD 統計量は、そのパラメータの burn-in 以降の \$M\$ 個のサンプルの中の最初から \$M_A\$ 個のサンプルの平均 \$\bar{\theta}_A\$ と最後から \$M_B\$ 個のサンプルの平均 \$\bar{\theta}_B\$ を使って以下のように計算される。

$$CD = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\{SE(\bar{\theta}_A)\}^2 + \{SE(\bar{\theta}_B)\}^2}}. \quad (103)$$

ここで、\$SE(\bar{\theta}_A)\$、\$SE(\bar{\theta}_B)\$ は \$\bar{\theta}_A\$、\$\bar{\theta}_B\$ の標準誤差で、それらの計算方法については以下で説明する。これは、最初から \$M_A\$ 個のサンプルと最後から \$M_B\$ 個の

サンプルの平均の差の検定統計量であり、\$\theta\$ の burn-in 以降の \$M\$ 個のサンプルが事後分布からのサンプルに収束していれば、平均に差はないはずなので³¹⁾、CD 統計量は漸近的に標準正規分布に従う。以下の分析では、Geweke(1992)に従い、\$M_A = 0.1M\$、\$M_B = 0.5M\$ としている³²⁾。

5.5 事後分析

すべてのパラメータで、burn-in 以降の \$M\$ 個のサンプルが事後分布からのサンプルに収束していると判定されたら、それらを事後分布からサンプリングされたものと見なして事後分析を行う。各パラメータの平均、標準偏差はそのパラメータの \$M\$ 個のサンプルの標本平均、標本標準偏差として推定できる。また、信用区間も簡単に計算できる³³⁾。例えば、90% 信用区間は、\$M\$ 個のサンプルを大きさの順に並べ替え、上 5%、下 5% の値として計算できる。

MCMC によってサンプリングされた値には自己相関があるので、標本平均の標準誤差の計算には注意が必要である。例えば、\$M\$ 個のサンプルをすべて使うのではなく、それを \$J\$ 個飛ばしで使えば、\$J\$ を十分大きくすると自己相関を無視できるので、通常のランダム・サンプリングと同様、\$\sqrt{\sigma^2/G}\$ として標準誤差を計算できる。ただし、\$G\$ は \$J\$ 個飛ばしにした場合のサンプルの数で、\$\sigma^2\$ はそのサンプルの標準偏差である。また、\$M\$ 個のサンプルをすべて使い、自己相関を考慮に入れて標準誤差を計算する方法もいくつか提案されている³⁴⁾。本稿の以下の分析では、Gallant(1987)に従い、以下のバルチェンのウインドウによって標準誤差(SE)を計算している。

$$SE(\bar{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{M} \left[\bar{\gamma}(0) + \frac{2M}{M-1} \sum_{i=1}^{B_M} K\left(\frac{i}{B_M}\right) \bar{\gamma}(i) \right]}. \quad (104)$$

ここで、

$$\bar{\gamma}(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=i+1}^M (\theta^{(k)} - \bar{\theta})(\theta^{(k-i)} - \bar{\theta}),$$

$$K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3, & z \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2(1-z)^3, & z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

また、\$B_M\$ はバンド幅で、ここでは \$B_M = 0.1M\$ とした。

5.6 非効率因子

用いた MCMC のサンプリング法がランダム・サンプリングと比べてどれぐらい非効率であるかを示す指標に非効率因子(inefficiency factor)がある。DSGE モデルの推定に必要なわけではないが、以下では、上記のランダム・ウォーク MH アルゴリズムの非効率性を示すためにこの非効率因子も計算している。

MCMC でサンプリングされた値の分散を \$\sigma^2\$、\$k\$ 次の自己相関を \$\rho_k\$ とすると、\$M\$ 個の標本平均の分散は、\$\sigma^2(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k)/M\$ となるので、\$\sigma^2(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k)\$ が高いほど標準誤差も高くなる。ランダム・サンプリングでは、自己相関はないので、標本平均の分散は \$\sigma^2/M\$ となる。そこで、それらの比率 \$1 +

表 1. DSGE モデルのパラメータの事前分布

パラメータ	範囲	分布	平均	標準偏差
τ	$(0, \infty)$	ガンマ	2.00	0.50
K	$(0, \infty)$	ガンマ	0.20	0.10
ϕ_1	$(0, \infty)$	ガンマ	1.50	0.25
ϕ_2	$(0, \infty)$	ガンマ	0.50	0.25
ρ_R	$(0, 1)$	ベータ	0.50	0.20
ρ_g	$(0, 1)$	ベータ	0.80	0.10
ρ_z	$(0, 1)$	ベータ	0.66	0.15
$r^{(A)}$	$(0, \infty)$	ガンマ	0.50	0.50
$\pi^{(A)}$	$(0, \infty)$	ガンマ	7.00	2.00
$\gamma^{(Q)}$	$(-\infty, \infty)$	正規	0.40	0.20
$100 \sigma_R$	$(0, \infty)$	逆ガンマ	0.40	4.00
$100 \sigma_g$	$(0, \infty)$	逆ガンマ	1.00	4.00
$100 \sigma_z$	$(0, \infty)$	逆ガンマ	0.50	4.00

注) An and Schorfheide (2007) と同じ事前分布を採用している。合理的期待均衡が一意に決まらない範囲は切断している。

$2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$ は MCMC のランダム・サンプリングに対する非効率性を表し、その推定値

$$1F = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\rho}_k \quad (105)$$

を非効率因子と呼ぶ³⁵⁾。ここで、 $\bar{\rho}_k$ は k 次の標本自己相関である。ただし、無限次までの標本自己相関は計算できないので、自己相関が有意でなくなる次数 k 以降は切断する。例えば、非効率因子が 10 の場合、MCMC でランダム・サンプリングと同じ標準誤差の推定値を得るためには、ランダム・サンプリングの 10 倍の回数のサンプリングを行う必要があることを意味する。

5.7 事前分布

前節のモデルで推定するのは以下の 13 個のパラメータである。

$\theta = [\tau, K, \phi_1, \phi_2, \rho_R, \rho_g, \rho_z, r^{(A)}, \pi^{(A)}, \gamma^{(Q)}, \sigma_R, \sigma_g, \sigma_z]$ 。本稿では、これらのパラメータの事前分布は、An and Schorfheide (2007) に従い、表 1 のように設定した。

事前分布は、モデルの定数項や係数には正規分布、誤差項の標準偏差あるいは分散には逆ガンマ分布を設定することが多い。こうすると、モデルが線形で誤差項が正規分布に従う場合には、事後分布も同じ逆ガンマ分布と正規分布になり便利だからである³⁶⁾。(90)、(91) 式は線形ガウシアン状態空間モデルであるが、その係数行列 $d, Z, \Theta_1, \Theta_0, V$ ではなく、元々の DSGE モデルのパラメータ θ に対して事前分布を設定することに注意されたい。遷移方程式 (91) は (78) 式を合理的期待を仮定して解いたものであるが、(79) 式からわかるように、 Γ_0 は DSGE モデルのパラメータの非線形関数になっている。したがって、DSGE モデルの定数項や係数の事前分布を正規分布にし、誤差項の標準偏差あるいは分散の事前分布を逆ガンマ分布にしても、事後分布は同じ分布にはならない。

そこで、あえてそうする必要はないが、通常通り、各ショックの標準偏差 $\sigma_R, \sigma_g, \sigma_z$ の事前分布には逆ガンマ分布、 $(-\infty, \infty)$ のすべての値を取り得る $\gamma^{(Q)}$ の事前分布には正規分布を設定した。その他、

$(0, \infty)$ の値しか取らない τ, K, ϕ_1, ϕ_2 の事前分布にはガンマ分布、各ショックの持続性を表すパラメータ ρ_R, ρ_g, ρ_z については $(0, 1)$ の間の値しか取らないものと仮定し、ベータ分布を設定した³⁷⁾。

また、パラメータの値によっては合理的期待均衡が存在しなかったり、一意に定まらない可能性があるため、そうしたパラメータの値の範囲は事前分布から切断した。そこで、合理的期待均衡が一意に定まらない範囲からサンプリングされた場合には、その値は捨てている。特に、テイラー・ルールにおける政策金利のインフレ率に対する感応度 ϕ_1 が 1 を下回る場合、均衡が一意に定まらないことが知られており³⁸⁾、 ϕ_1 に 1 を下回る値がサンプリングされた場合には捨てられるので、 ϕ_1 は必ず 1 を上回ることになる。

5.8 モデル選択

ベイズ統計学におけるモデル選択は、事後オッズ比を用いて行われる。モデル M_i とモデル M_j の事後オッズ比 (POR) は以下のように表される。

$$\text{POR} = \frac{p(M_i | Y)}{p(M_j | Y)} = \frac{p(Y | M_i) p(M_i)}{p(Y | M_j) p(M_j)} \quad (106)$$

ここで、 $p(Y | M_i) / p(Y | M_j)$ と $p(M_i) / p(M_j)$ は、それぞれ、ベイズ・ファクターおよび事前オッズ比と呼ばれる。また、ベイズ・ファクターの分子 $p(Y | M_i)$ と分母 $p(Y | M_j)$ はそれぞれ、モデル M_i と M_j の周辺尤度と呼ばれる。

この事後オッズ比が 1 を上回れば (下回れば)、モデル M_i (M_j) を選択する。どちらのモデルが正しいか事前情報がない場合には、通常、事前オッズ比は 1 に設定される。そうすると、事後オッズ比はベイズ・ファクターに等しくなるので、周辺尤度の高いモデルが選択されることになる。

周辺尤度の計算方法には、Geweke (1999) の修正調和平均法、Chib and Jeliazkov (2001) の方法、Newton and Raftrey (1994) の調和平均法がある。補論 C で説明しているように、Newton and Raftrey (1994) の調和平均法は不安定なので、Geweke (1999) によって修正調和平均法が提案された。An and Schorfheide (2007) は、Geweke (1999) の修正調和平均法と Chib and Jeliazkov (2001) の方法を比較し、サンプリングの回数を増やすと同じ値に収束するが、サンプリングの回数が少ない時には Geweke (1999) の修正調和平均法の方が信頼できるとの結果を得ている。そこで、本稿では Geweke (1999) の修正調和平均法によって計算した周辺尤度を用いてモデル比較を行う。この方法について詳しくは補論 C を参照されたい。

第 1 節で述べたように、Smets and Wouters (2003, 2007) は、欧米のマクロデータに当てはまりが良いとされる CEE モデルと VAR モデルの周辺尤度を計算し、ほぼ同じ値であるとの結果を報告している。しかし、DSGE モデルと VAR モデルのように互いに入れ子になっていないモデルを事後オッズ比によって比較すると、パラメータの事前分布によっては正しくないモデルが選択される可能性があ

図1. 日本のマクロデータ

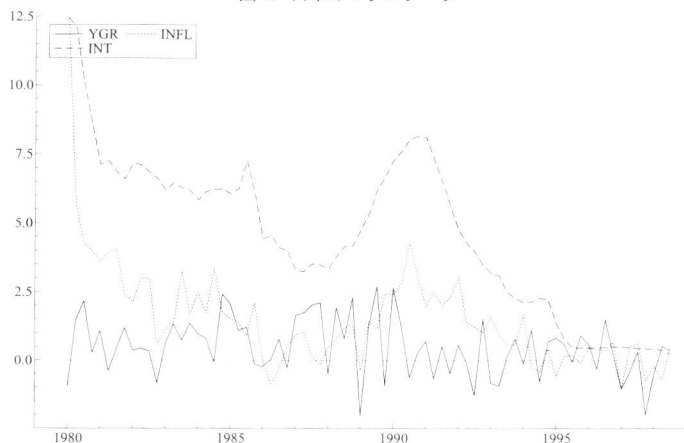
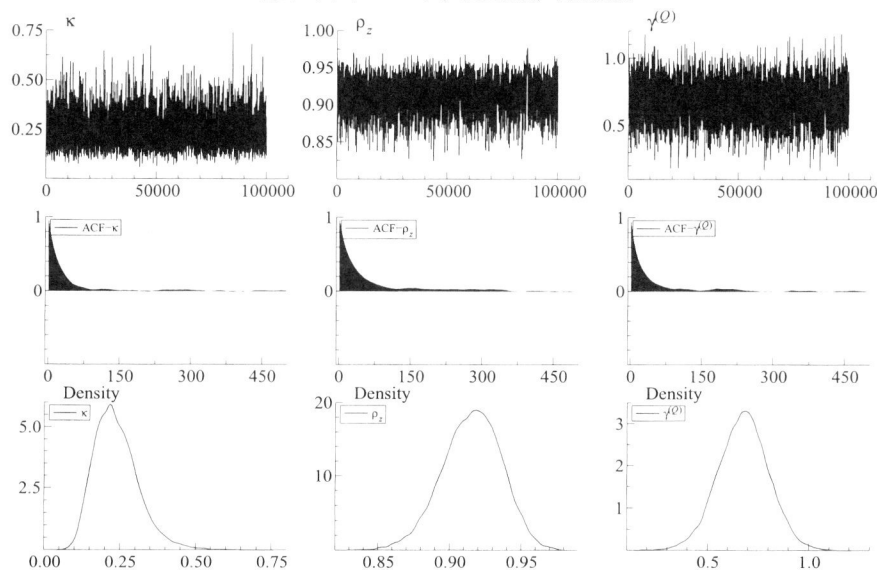


図2. サンプル・パス, 自己相関, 密度関数



ることが「Lindley(1957)の逆説」として知られている。Sims(2003)はSmets and Wouters(2003)の結果がこれに相当するのではないかと批判している。こうした問題を避けるため、Del Negro and Schorfheide(2004)やDel Negro *et al.*(2007)らは、DSGE-VARモデルと呼ばれるモデルを用いてVARモデルとDSGEモデルを比較している。DSGE-VARモデルについては、第7節で説明する。

6. DSGEモデルの日本のマクロデータへの応用

6.1 データ

本節では、第4節で説明したDSGEモデルを前節で説明したランダム・ウォークMHアルゴリズムを用いたベイズ推定法により日本のマクロデータに應用する。日本のマクロデータを用いてDSGEモデルを推定する場合の最大の問題は長年に渡るゼロ金利政策期間の存在である。ゼロ金利期間には、テイラー・ルールに従って名目金利が改定されてい

ると想定できないので、前節のモデルをそのまま用いることはできない。このため、名目金利がゼロ以下にはなれないというゼロ金利制約を加える必要があり、この制約を加えるとモデルが非線形になるため、合理的期待均衡の導出が難しくなる。また、将来、ゼロ金利政策が解除される可能性も考慮して合理的期待均衡を導出する必要がある。仮に合理的期待均衡が求まったとしても、推定式が非線形になるので、尤度をカルマン・フィルターで計算できなくなり、パーティクル・フィルターと呼ばれる相当な計算時間を要する方法が必要になる(Fernández-Villaverde and Rubio-Ramírez, 2005, 2007)。そこで、ゼロ金利期間を含めた推定は今後

の課題とし、本稿では、ゼロ金利前の1980年第II四半期-1998年第III四半期のデータを用いて推定を行った³⁹⁾。

推定に用いたデータは、日本の一人当たり実質GDP成長率(YGR)、インフレ率(INFL)、名目利子率(INT)の四半期データ(%)である。インフレ率には日本の消費者物価指数(生鮮食品を除く)、名目利子率には翌日物コール・レートを用いた⁴⁰⁾。すべ

て%表示とし、INFLとINTは年率換算した。図1にこれらのデータを示している。

6.2 DSGEモデルの推定結果

前節で説明したランダム・ウォークMHアルゴリズムによってパラメータを300,000回サンプリングし、最初の200,000回をburn-inとして捨て、残りの100,000回を事後分布からのサンプルと見なして事後分析に用いた。パラメータをサンプリングしたら、burn-in以降のサンプルの分布が事後分布に収束していることを確認するために、burn-in以降のサンプル・パスをグラフにして、途中で平均や分散に変化がないことを確認する必要がある。13個すべてのパラメータのサンプル・パスは載せられないので、図2に、3つのパラメータ $\kappa, \rho_z, \gamma^{(Q)}$ のburn-in以降の100,000回のサンプル・パスを載せている。そこでは、平均や分散のシフトは見られない。図2には、上記3つのパラメータのサンプルの

表2. DSGE モデルのパラメータの推定結果

パラメータ	平均	標準誤差	標準偏差	90% 信用区間	CD	非効率因子
τ	2.4486	0.0101	0.5252	[1.6626, 3.3805]	-0.09	21.6
κ	0.2390	0.0014	0.0738	[0.1364, 0.3729]	0.81	23.6
ϕ_1	1.6382	0.0058	0.2237	[1.2809, 2.0130]	1.01	71.2
ϕ_2	0.4836	0.0064	0.2371	[0.1632, 0.9211]	1.37	87.0
ρ_R	0.8151	0.0007	0.0355	[0.7534, 0.8694]	-0.17	41.5
ρ_g	0.9519	0.0008	0.0273	[0.8992, 0.9861]	-1.50	50.9
ρ_z	0.9155	0.0006	0.0207	[0.8801, 0.9482]	0.91	73.4
$\gamma^{(A)}$	0.1313	0.0042	0.2004	[0.0017, 0.5756]	-1.19	82.3
$\pi^{(A)}$	1.9776	0.0091	0.3073	[1.5033, 2.5014]	0.71	123.2
$\gamma^{(Q)}$	0.6770	0.0028	0.1256	[0.4711, 0.8828]	1.55	42.8
100 σ_R	0.1752	0.0004	0.0175	[0.1492, 0.2068]	0.98	56.8
100 σ_g	1.1661	0.0023	0.1040	[1.0071, 1.3494]	0.14	20.8
100 σ_z	0.2137	0.0006	0.0268	[0.1744, 0.2612]	1.03	95.5

注) ランダム・ウォーク MH アルゴリズムにより、300,000 回サンプリングを行い、200,000 回を burn-in として捨て、残りの 100,000 回のサンプルを使って推定した。平均と標準偏差はサンプルの標本平均、標本標準偏差として計算した。90% 信用区間は、サンプルを大きさの順で並び替え、上 5% と下 5% の値として求めた。標準誤差はバルチェンのウィンドウを使って (104) 式から計算した。CD は Burn-in 以降の 100,000 個のサンプルの分布が事後分布に収束しているかどうかを検定する Geweke (1992) の CD (convergence diagnostic) 統計量であり、(103) 式から計算した。事後分布に収束していれば、CD 統計量は漸近的に正規分布に従う。非効率因子は (105) 式で計算され、標本平均の標準誤差をランダム・サンプリングと同程度にするために、ランダム・サンプリングの何倍の回数サンプリングを行なう必要があるかを表す。

表3. 対数周辺尤度による DSGE モデルの比較

	M_0 : 制約なし	M_1 : $\kappa=5$	M_2 : $\phi_2=0$
Geweke (1999) の修正調平均法			
推定値	-284.063	-293.284	-286.375
標準誤差	0.059	0.097	0.018
Chib and Jeliazkov (2001)			
推定値	-284.154	-293.199	-286.410
標準誤差	0.173	0.202	0.119
Newton and Raftrey (1994) の調平均法			
推定値	-274.176	-279.073	-274.694
標準誤差	0.451	0.861	0.768

注) 標準誤差はデルタ法で計算した。

自己相関係数と密度関数も載せている。前節で説明したように、ランダム・ウォーク MH アルゴリズムは効率的なサンプリング法ではないので、正の自己相関が長期に渡って持続していることがわかる。

表2に burn-in 以降の 100,000 回のサンプルを使って計算した推定結果をまとめている。CD 統計量によると、すべてのパラメータで、推定に使った burn-in 以降の 100,000 回のサンプルが事後分布に収束しているという帰無仮説が有意水準 5% で受容される。 κ は (73) 式で定義され、価格の硬直性を表すパラメータ ϕ の減少関数なので、 κ の値が大きくなるほど価格は伸縮的になる。 κ の事後平均と 90% 信用区間は、それぞれ 0.2390, [0.1364, 0.3729] といずれも低い。この結果は、価格に高い硬直性があることを示している。以下では、前節で説明した周辺尤度を用いて、 $\kappa=5$ とした価格が伸縮的なモデルとの比較を行っている。 ϕ_1 はテイラー・ルールにおける政策金利のインフレ率に対する感応度を表し、その事後平均と 90% 信用区間は、それぞれ 1.6382, [1.2809, 2.0130] と高い値を示している。ただし、 ϕ_1 が 1 を下回ると均衡が一意に定まらないことが知られており、本稿では、そうしたケースを事前分布で

排除しているの、1 より小さい値はサンプリングされないことに注意されたい。テイラー・ルールにおける政策金利の GDP ギャップに対する感応度を表す ϕ_2 の事後平均と 90% 信用区間は、0.4836, [0.1632, 0.9211] と低い。そこで、以下で、周辺尤度を用いて、 $\phi_2=0$ とした政策金利が GDP ギャップに反応していないモデルとの比較を行っている。また、財政支出ショックと生産性ショックの持続性を表す ρ_g, ρ_z の事後平均、90% 信用区間は、 ρ_g が 0.9519, [0.8992, 0.9861], ρ_z が 0.9155, [0.8801, 0.9482] といずれも高い値を示している。このことは、これらのショックに高い持続性があることを示している。政策金利の持続性を表す ρ_R は ρ_g, ρ_z と比べると低いものの、0.8151, [0.7534, 0.8694] とやはり高い持続性を示している。

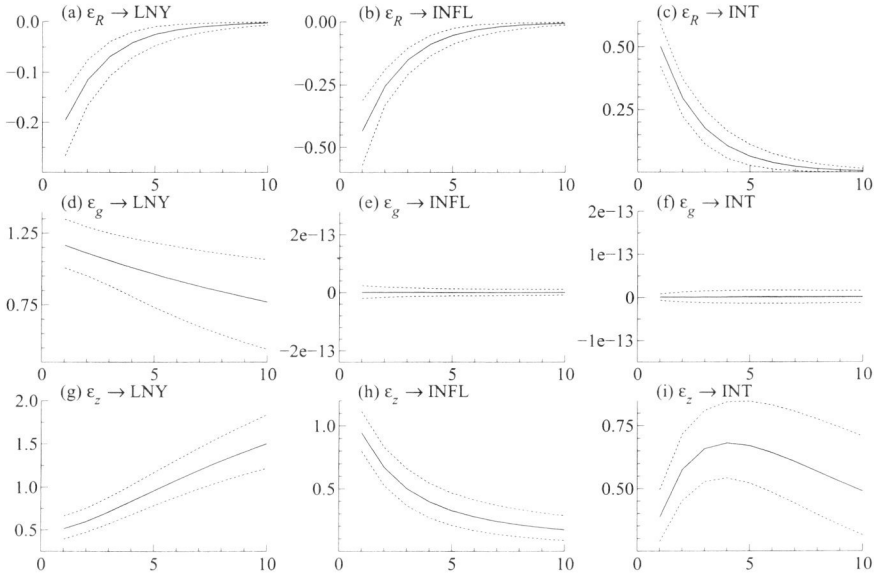
さらに、An and Schorfheide (2007) に従い、このモデルのパラメータに制約を課した 2 つのモデルを考え、周辺尤度を用いて制約を課さないモデルと比較を行った。一つは、 κ を高い値で固定した価格が伸縮的なモデルである。具体的には、An and Schorfheide (2007) に従い、 $\kappa=5$ とした。もう一つは、 $\phi_2=0$ としたテイラー・ルールにおいて政策金利が GDP ギャップに反応しないモデルである。以下、制約を課さないモデルを M_0 、価格が伸縮的なモデル ($\kappa=5$) を M_1 、政策金利が GDP ギャップに反応しないモデル ($\phi_2=0$) を M_2 と呼ぶ。

表2に各モデルの対数周辺尤度の推定値と標準誤差を示している。前節で説明したように、本稿では、Geweke (1999) の修正調平均法で計算した周辺尤度を用いてモデル比較を行うが、表2には比較のため、Chib and Jeliazkov (2001) の方法と Newton and Raftrey (1994) の調平均法で計算した対数周辺尤度と標準誤差も載せている。対数周辺尤度の推定値は、Geweke (1999) の修正調平均法と Chib and Jeliazkov (2001) の方法がほぼ同じ値であるのに対して、Newton and Raftrey (1994) の調平均法はかなりの差がある。また、Geweke (1999) の修正調平均法は Chib and Jeliazkov (2001) の方法より標準誤差が小さい。

表3の Geweke (1999) の修正調平均法によって推定した周辺尤度が最も高いのは M_0 である。ただし、 M_0 と M_2 の対数周辺尤度の推定値の差はそれほど大きくないので、標準誤差を考慮して M_0 の対数周辺尤度が M_2 の対数周辺尤度を上回るかどうか検定を行ったところ、有意に上回った。以上より、価格は硬直的であり、政策金利は GDP ギャップに反応していたことがわかる。

図3はこの DSGE モデルの下でのインパルス応答関数を示している。DSGE モデルにおけるインパ

図3. インパルス応答関数(DSGEモデル)



ルス応答関数の導出の仕方については補論Dを参照されたい。 $\epsilon_R, \epsilon_g, \epsilon_z$ はそれぞれ金利ショック、財政支出ショック、生産性ショックを表し、LNY, INFL, INT はそれぞれ一人当たり実質GDPの対数値 ($YGR_t = LNY_t - LNY_{t-1}$)、インフレ率、名目利子率を表す。ここでは、各ショックが1期に $100 \times$ 標準偏差 ($100\sigma_R, 100\sigma_g, 100\sigma_z$) だけ上昇した場合のインパルス応答関数を描いている。また、点線は90%信用区間を表す。An and Schorfheide (2007) がアメリカのデータで同じモデルを推定しているの、そのFigure 11に描かれているインパルス応答関数と図3のインパルス応答関数とを比較すると、すべてのケースで、ほぼ同じ形状をしている。

7. DSGEモデルの評価

7.1 DSGE-VARモデル

DSGEモデルを評価する方法に、Del Negro and Schorfheide (2004) や Del Negro *et al.* (2007) らによって提案されたDSGE-VARモデルを用いる方法がある⁴¹⁾。この方法では、VARモデルのパラメータをベイズ推定する時の事前分布の平均にDSGEモデルによって制約を課す。ただし、事前分布の分散が正であれば、その制約から乖離できる。そこで、事前分布の分散を変えて推定を行い、データへの当てはまりを比較することで、どの程度、DSGEモデルからの乖離の度合いが大きいかを評価する。

以下、次数 p のVARモデルを考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t, \\ \mathbf{u}_t &\sim \text{NID}(\mathbf{0}, \Sigma_u). \end{aligned} \quad (107)$$

ここで、 $\mathbf{y}_t$ は n 個のマクロ変数のベクトルを表し(第4節のモデルでは、4.4節で説明したように、 $n=3$ で、 $\mathbf{y}_t = [YGR_t, INFL_t, INT_t]'$)、誤差項 $\mathbf{u}_t$ は平均 $\mathbf{0}$ 、分散共分散行列 Σ_u の独立な正規分布に従うものとする。

いま、 T 個の標本 $\mathbf{y}_t (t=1, \dots, T)$ が与えられて

いるものとする。このとき、

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{p+1}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}_T' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{y}_p' & \cdots & \mathbf{y}_1' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathbf{y}_{T-1}' & \cdots & \mathbf{y}_{T-p}' \end{bmatrix}, \quad (108)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_0' \\ \vdots \\ \Phi_p' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p+1}' \\ \vdots \\ \mathbf{u}_T' \end{bmatrix} \quad (109)$$

と定義すると、VARモデル(107)は以下のように表せる。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Phi + \mathbf{U}. \quad (110)$$

以下、 $\mathbf{X}$ の列の数を $k (=1+np)$ と表す。

DSGE-VARモデルでは、VARモデルのパラメータ (Φ, Σ_u) とDSGEモデルのパラメータ θ に事前分布 $f(\Phi, \Sigma_u, \theta)$ を設定し、MCMCにより事後分布 $f(\Phi, \Sigma_u, \theta | \mathbf{Y})$ からサンプリングを行う。

7.2 事前分布

事前分布 $f(\Phi, \Sigma_u, \theta)$ の設定では、まず、

$$f(\Phi, \Sigma_u, \theta) = f(\Phi, \Sigma_u | \theta) f(\theta) \quad (111)$$

と分解する。その上で、 $f(\theta)$ には例えば表1のような事前分布を設定し、 $f(\Phi, \Sigma_u | \theta)$ でVARモデルのパラメータ (Φ, Σ_u) にDSGEモデルの制約を課す。そのために、パラメータ θ のDSGEモデルからサンプル数 $T^* = \lambda T$ の人工データ $\mathbf{Y}^*(\theta)$ を発生させ、そのデータがVARモデル(110)に従うものとし、そのデータを条件とするVARモデルのパラメータ (Φ, Σ_u) の分布 $f(\Phi, \Sigma_u | \mathbf{Y}^*(\theta))$ を $f(\Phi, \Sigma_u | \theta)$ とするという方法を考えよう。そうすると、 λ を大きくすれば、DSGEモデルから発生させたより多くのデータを条件とすることになるので、DSGEモデルの制約がより強くなる。

ベイズの定理より、

$$f(\Phi, \Sigma_u | \mathbf{Y}^*(\theta)) \propto f(\mathbf{Y}^*(\theta) | \Phi, \Sigma_u) f(\Phi, \Sigma_u) \quad (112)$$

となり、右辺の最初の項は (Y^*, X^*) をデータとする VAR モデルの尤度関数なので以下のように表せる。

$$f(Y^*(\theta) | \Phi, \Sigma_u) \propto |\Sigma_u|^{-\lambda T/2} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \{ \Sigma_u^{-1} (Y^{*'} Y^* - \Phi' X^{*'} Y^* - Y^{*'} X^* \Phi + \Phi' X^{*'} X^* \Phi) \} \right]. \quad (113)$$

ここで、 tr はトレースで、行列の対角成分を足し合わせることを表す。また、 X^* は (108) の X の式に Y^* を代入したものである。右辺の X^*, Y^* は θ に依存するので、正確には、 $X^*(\theta), Y^*(\theta)$ と書くべきであるが、 θ は省略する。

実際に人工データ (Y^*, X^*) を発生させてそれを (113) 式に代入し、それを (112) 式に代入することにより VAR モデルのパラメータの事前分布を設定すると、事前分布が (Y^*, X^*) に依存して変動する。そこで、人工データを発生させる代わりに、 $Y^{*'} Y^*, X^{*'} Y^*, Y^{*'} X^*, X^{*'} X^*$ をパラメータ θ の DSGE モデルにおけるそれらの期待値に置き換える。以下、 $\Gamma_{yy}^*(\theta) = E_\theta[y_t y_t']$, $\Gamma_{xy}^*(\theta) = E_\theta[x_t y_t']$, $\Gamma_{xx}^*(\theta) = E_\theta[x_t x_t']$ とする。DSGE モデルのパラメータ θ の値が与えられると、これらの期待値は解析的に求められる。具体的には、以下の式から計算できる。

$$E_\theta[y_t y_t'] = Z \Omega_{ss} Z', \quad (114)$$

$$E_\theta[y_t y_{t-h}'] = Z \tilde{\Theta}_1^h \Omega_{ss} Z'. \quad (115)$$

ここで、 $\Omega_{ss} = E_\theta[\tilde{s}_t \tilde{s}_t']$ であり、(91) 式より、それは以下の式から計算できる。

$$\text{vec}(\Omega_{ss}) = [I - \tilde{\Theta}_1 \otimes \tilde{\Theta}_1]^{-1} \text{vec}(\tilde{\Theta}_0 V \tilde{\Theta}_0'). \quad (116)$$

(112) 式右辺の $f(\Phi, \Sigma_u)$ を無情報事前分布 $f(\Phi, \Sigma_u) \propto |\Sigma_u|^{-(n+1)/2}$ とすると⁴²⁾、これを (113) 式において $Y^{*'} Y^*, X^{*'} Y^*, Y^{*'} X^*, X^{*'} X^*$ を $\lambda T \Gamma_{yy}^*(\theta), \lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta), \lambda T \Gamma_{yx}^*(\theta), \lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta)$ に置き換えたものに掛けることにより、 θ を条件とする VAR モデルのパラメータの事前分布が以下のように設定される。

$$f(\Phi, \Sigma_u | \theta) = c^{-1}(\theta) |\Sigma_u|^{-\frac{1}{2}(\lambda T + n + 1)} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \{ \lambda T \Sigma_u^{-1} (\Gamma_{yy}^*(\theta) - \Phi \Gamma_{xy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta) \Phi + \Phi \Gamma_{xx}^*(\theta) \Phi) \} \right]. \quad (117)$$

ここで、 $c^{-1}(\theta)$ は事前分布 (117) の積分が 1 になるための基準化定数である。これは、 $\lambda T \geq k + n$ であり、 $\Gamma_{xx}^*(\theta)$ の逆行列が存在すれば、以下のように計算できる。

$$c(\theta) = (2\pi)^{nk/2} |\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta)|^{-n/2} |\lambda T \Sigma_u^*(\theta)|^{-(\lambda T - k)/2} \times 2^{-n(\lambda T - k)/2} \pi^{n(n-1)/4} \prod_{i=1}^n \Gamma[(\lambda T - k + 1 - i)/2]. \quad (118)$$

ここで、 $\Gamma[\cdot]$ はガンマ関数を表す。

事前分布 (117) は以下のよく知られた逆ウィッシュャート-正規型事前分布である⁴³⁾。

$$\Sigma_u | \theta \sim \text{IW}(\lambda T \Sigma_u^*(\theta), \lambda T - k, n), \quad (119)$$

$$\Phi | \Sigma_u, \theta \sim N(\Phi^*(\theta), \Sigma_u \otimes (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta))^{-1}). \quad (120)$$

ここで、

$$\Phi^*(\theta) = \Gamma_{xx}^{*-1}(\theta) \Gamma_{xy}^*(\theta), \quad (121)$$

$$\Sigma_u^*(\theta) = \Gamma_{yy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta) \Gamma_{xx}^{*-1}(\theta) \Gamma_{xy}^*(\theta). \quad (122)$$

7.3 事後分布

VAR モデルのパラメータ (Φ, Σ_u) と DSGE モデルのパラメータ θ の同時事後分布は以下のように表せる。

$$f(\Phi, \Sigma_u, \theta | Y) = f(\Phi | Y, \Sigma_u, \theta) f(\Sigma_u | Y, \theta) f(\theta | Y). \quad (123)$$

逆ウィッシュャート-正規型事前分布 (119), (120) の下では、 $f(\Sigma_u | Y, \theta), f(\Phi | Y, \Sigma_u, \theta)$ もそれぞれ以下のような逆ウィッシュャート分布と多変量正規分布になる⁴⁴⁾。

$$\Sigma_u | Y, \theta \sim \text{IW}((\lambda + 1) T \tilde{\Sigma}_u(\theta), (\lambda + 1) T - k, n), \quad (124)$$

$$\Phi | Y, \Sigma_u, \theta \sim N(\tilde{\Phi}(\theta), \Sigma_u \otimes (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + X' X)^{-1}). \quad (125)$$

ここで、

$$\tilde{\Phi}(\theta) = (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + X' X)^{-1} (\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta) + X' Y), \quad (126)$$

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{1}{(\lambda + 1) T} \{ \lambda T \Gamma_{yy}^*(\theta) + Y' Y - (\lambda T \Gamma_{yx}^*(\theta) + Y' X) (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + X' X)^{-1} (\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta) + X' Y) \}. \quad (127)$$

逆ウィッシュャート分布や多変量正規分布からは簡単にサンプリングできるので、(123) 式の右辺最後の $f(\theta | Y)$ から θ をサンプリングできれば、それを条件として逆ウィッシュャート分布 (124) から Σ_u をサンプリングし、さらに、サンプリングされた θ と Σ_u を条件として多変量正規分布 (125) から Φ をサンプリングすれば、同時事後分布 (123) からサンプリングできる。

$f(\theta | Y)$ はベイズの定理より以下のように表せる。

$$f(\theta | Y) \propto f(Y | \theta) f(\theta). \quad (128)$$

右辺の $f(Y | \theta)$ は以下のように計算できる。

$$f(Y | \theta) = \frac{f(Y | \Phi, \Sigma_u) f(\Phi, \Sigma_u | Y \theta)}{f(\Phi, \Sigma_u | Y \theta)} = \frac{|\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + X' X|^{-n/2} |(\lambda + 1) T \tilde{\Sigma}_u(\theta)|^{-(\lambda + 1) T - k/2}}{|\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta)|^{-n/2} |\lambda T \Sigma_u^*(\theta)|^{-(\lambda T - k)/2}} \times \frac{(2\pi)^{-nT/2} 2^{n(\lambda + 1) T - k/2} \prod_{i=1}^n \Gamma[(\lambda + 1) T - k + 1 - i]/2}{2^{n(\lambda T - k)/2} \prod_{i=1}^n \Gamma[(\lambda T - k + 1 - i)/2]}. \quad (129)$$

そこで、これに事前密度 $f(\theta)$ を掛ければ、(128) 式より、 $f(\theta | Y)$ の基準化定数以外は求まるので、5.3 節で説明したランダム・ウォーク MH アルゴリズムにより $f(\theta | Y)$ からサンプリングできる。以下の推定では、事前密度 $f(\theta)$ として、前節の DSGE モデルの推定で用いた表 1 の事前分布をそのまま用いている。

$f(\theta | Y)$ から θ をサンプリングできれば、補論 C の修正調平均法を用いて DSGE-VAR モデルの周辺尤度を推定できる。そこで、 λ を変えて DSGE-VAR モデルの周辺尤度を計算することによ

表 4. DSGE-VAR モデルの対数周辺尤度

λ	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	5.00
推定値	-285.28	-274.40	-272.96	-273.05	-273.47	-274.11	-275.25	-279.27
標準誤差	0.021	0.023	0.026	0.045	0.015	0.026	0.034	0.034

注) 対数周辺尤度は, Geweke(1999)の修正調和平均法により推定した。標準誤差はデルタ法で計算した。

表 5. DSGE-VAR モデル($\lambda=0.75$)における DSGE モデルのパラメータの推定結果

パラメータ	平均	標準誤差	標準偏差	90% 信用区間	CD	非効率因子
τ	2.0661	0.0089	0.4940	[1.3223, 2.9427]	-1.04	20.9
κ	0.2801	0.0022	0.1012	[0.1393, 0.4679]	-0.97	57.6
ψ_1	1.5535	0.0049	0.2427	[1.1827, 1.9797]	0.40	20.2
ψ_2	0.4593	0.0056	0.2446	[0.1386, 0.9194]	2.47	77.3
ρ_R	0.7844	0.0014	0.0538	[0.6885, 0.8645]	1.60	82.2
ρ_θ	0.9047	0.0016	0.0682	[0.7698, 0.9821]	1.09	44.4
ρ_z	0.8230	0.0010	0.0555	[0.7242, 0.9069]	0.67	47.5
$r^{(A)}$	0.1890	0.0028	0.3437	[0.0017, 0.8982]	0.16	6.6
$\pi^{(A)}$	2.6395	0.0331	1.1383	[1.4125, 4.8695]	-0.89	54.5
$\gamma^{(Q)}$	0.5997	0.0048	0.1986	[0.2572, 0.9137]	-1.10	39.2
100 σ_R	0.1623	0.0003	0.0176	[0.1359, 0.1931]	0.03	9.6
100 σ_g	0.9386	0.0023	0.1182	[0.7569, 1.1440]	0.45	19.5
100 σ_z	0.2612	0.0009	0.0420	[0.2006, 0.3376]	-0.24	28.2

注) ランダム・ウォーク MH アルゴリズムにより, 300,000 回サンプリングを行い, 200,000 回を burn-in として捨て, 残りの 100,000 回のサンプルを使って推定した。平均と標準偏差はサンプルの標本平均, 標本標準偏差として計算した。90% 信用区間は, サンプルを大きさの順で並び替え, 上 5% と下 5% の値として求めた。標準誤差はバルチェンのウィンドウを使って (104) 式から計算した。CD は Burn-in 以降の 100,000 個のサンプルの分布が事後分布に収束しているかどうかを検定する Geweke(1992) の CD (convergence diagnostic) 統計量であり, (103) 式から計算した。事後分布に収束していれば, CD 統計量は漸近的に正規分布に従う。非効率因子は (105) 式で計算され, 標本平均の標準誤差をランダム・サンプリングを同程度にするために, ランダム・サンプリングの何倍の回数サンプリングを行なう必要があるかを表す。

り, DSGE モデルを評価できる。具体的には, 周辺尤度を最大にする λ の値が高いほど, DSGE モデルの情報が有用であることを意味する。特に, 周辺尤度が λ の単調減少関数の場合には DSGE モデルは何ら情報をもたらさないことを意味し, 逆に λ の単調増加関数の場合には DSGE モデルに定式化の誤りが全くないことを意味する。

周辺尤度の計算だけであれば, $f(\theta|Y)$ から DSGE モデルのパラメータ θ をサンプリングするだけでよいが, DSGE-VAR モデルのインパルス応答関数を導出するためには, サンプリングされた θ を用いて, さらに (124), (125) から VAR モデルのパラメータ (Φ, Σ_u) をサンプリングする必要がある。DSGE-VAR モデルのインパルス応答関数の導出方法については補論 D を参照されたい。

7.4 日本のマクロデータへの応用

前節の DSGE モデルの推定に用いたのと全く同じ日本のマクロデータを用いて, DSGE-VAR モデルの推定も行った。VAR モデルのラグ次数は 4 とした⁴⁵⁾。 $\lambda \geq \lambda(k+n)/T \approx 0.21$ でなければ, (120) 式の基準化定数 $c^{-1}(\theta)$ を計算できないことに注意されたい。そこで, λ の値を 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 2.00, 5.00 と変えて, 各 λ の値で DSGE-VAR モデルを推定し, 周辺尤度を計算した。DSGE-VAR モデルの推定と周辺尤度の計算は, DSGE モデルと同様, 各 λ の値で, サンプリングを 300,000 回行い, 最初の 200,000 回を burn-in として捨て, 残りの 100,000 回のサンプルを用いて行った。

表 4 に各 λ における DSGE-VAR モデルの対数周辺尤度の推定値とその標準誤差を示している。対数周辺尤度の推定

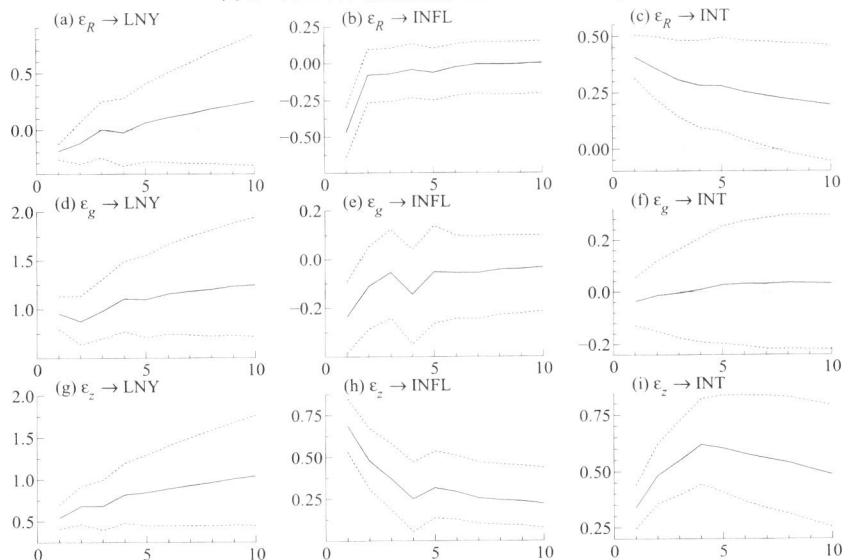
値は $\lambda=0.75$ の時に最大になっている。ただし, $\lambda=1.00$ の時の対数周辺尤度とあまり差がないので, $\lambda=0.75$ の時の対数周辺尤度が $\lambda=1.00$ の対数周辺尤度を上回るかどうか検定を行ったところ, 有意水準 5% で有意に上回った。この結果は, 本稿の DSGE モデルには定式化の誤りはあるものの (もし定式化の誤りが全くなければ, 周辺尤度は λ の単調増加関数になる), VAR の推定にある程度有用な情報を与えてくれる (もし全く情報を与えないなら, 周辺尤度は λ の単調減少関数になる) ことを意味している。

表 5 は, 周辺尤度を最大化する $\lambda=0.75$ の下での DSGE モデルのパラメータの推定結果を示している。CD 統計量は ψ_1 の値が 2.47 と高くなっているが, 有意水準 1% であれば, サンプリングされ

たパラメータが事後分布に収束しているという帰無仮説は受容される。パラメータの事後平均や 90% 信用区間は, 表 2 の DSGE モデルと比べて, $\kappa, r^{(A)}, \pi^{(A)}, 100 \sigma_z$ では上昇しているのに対して, 他のパラメータでは低下している。

また, 図 4 は $\lambda=0.75$ の下での DSGE-VAR モデルのインパルス応答関数を描いたものである。(DSGE-VAR モデルのインパルス応答関数の導出方法については補論 D を参照されたい。) An and Schorfheide(2007) はアメリカのデータで DSGE-VAR モデルを推定し, Figure 12 にインパルス応答関数を描いているが, それと比べて大きな違いはない。An and Schorfheide(2007) の Figure 11 と Figure 12 を比べると, DSGE モデルよりも DSGE-VAR モデルの方がインパルス応答関数の 90% 信用区間が広がっているが, 本稿の図 3 と図 4 を比べると, 同様のことが見て取れる。ただし, 財政支出ショックからインフレ率へのインパルス応答が, An and Schorfheide(2007) の Figure 12 ではすべての期でほぼ 0 であるのに対して, 本稿の図 3(e) では 1 期に負になっており, この点についてはさらなる検討が必要である。例えば, 本稿のモデルでは財政支出を外生にしているが, 財政政策と変数間の内生的関係(財政ルールの存在)を考慮した推定も行うべきであろう⁴⁶⁾。Del Negro *et al.*(2007) では, より大型の DSGE モデルを使って DSGE-VAR モデルを推定し, DSGE モデルを使っても DSGE-VAR モデルを使っても金利ショックに対するマクロ変数のインパルス応答関数がそれほど変わらないので, 金

図4. インパルス応答関数(DSGE-VAR モデル)



融政策の効果のシミュレーションには DSGE モデルを使ってよいと結論付けている。本稿で用いた小型のモデルでは、同じモデルを用いている An and Schorfheide(2007) 同様、金利ショックに対する GDP、インフレ率、金利の反応は、DSGE モデルを用いるか DSGE-VAR モデルを用いるかで大きく異なる。そこで、Del Negro *et al.*(2007) のような比較的大きな DSGE モデルを日本のマクロデータに適用した場合に結果がどうなるかは興味深い、これは今後の研究課題とする。

Del Negro and Schorfheide(2004)や Del Negro *et al.*(2007)では、周辺尤度を最大化する λ の値の下で DSGE-VAR モデルを用いて将来のマクロ変数の予測を行うとパフォーマンスが改善するとの結果を得ている。こうした予測パフォーマンスの分析についても今後の課題とする。

8. まとめと今後の課題

本稿では、DSGE モデルやその分析手法について解説を行うとともに、Del Negro and Schorfheide(2004)、An and Schorfheide(2007)らの DSGE モデルと DSGE-VAR モデルをゼロ金利政策前の日本のマクロ経済データを用いて推定した。本稿で用いた DSGE モデルは小型モデルであるが、DSGE-VAR モデルにより、定式化の誤りは見られるものの、ある程度有用な情報を提供してくれることが明らかになった。

こうした DSGE モデルや DSGE-VAR モデルの研究は現在進行中であり、今後に残された課題も多い。そこで、以下、今後の課題について述べる。

1. 今次金融危機を経て、金融市場の不完全性をいかにして、現実的な DSGE モデルに組み込むかといった点は大きな課題となっている。Kiyotaki and Moore(1997)や Bernanke *et al.*(1999)を組み込んだ DSGE モデルの開発は活発化しており、これが、ショックの波及を大き

くすることなどが示されている。しかし、今次金融危機のような現象を、大きなショックとしてではなく、内生的なメカニズムに基づき発生させることができるかといった点に着目が集まりつつある。この点、これを可能とする Mendoza(2010) のような理論的モデルの発展が期待される。特に、今次金融危機のような発生確率は低いが規模の大きいイベントを内包するようなモデルをどのようにして推定するか、といった点は今後の大きな課題となてこよう。

2. 標準的な DSGE モデルでは、失業は存在しない。この点、Mortensen and Pissarides(1994)型のサーチ・マッチング・モデルは、失業の説明に有用なモデルとして考えられている。しかし、Shimer(2005)は、通常の仮定の下では、サーチ・マッチング・モデルの、景気循環における失業の説明力が十分でないことを示した。その後、失業を DSGE モデルに組み込み、これの説明を試みる様々な研究が進展している。特に、本稿との関連でみれば、Gertler *et al.*(2008)や Blanchard and Gali(2010)では、ニュー・ケインジアン・モデルへのこうした摩擦的失業の組み込みが試みられている。失業は経済厚生を考える上でも重要な変数と考えられるため、これを説明できるモデルと、これから生じる厚生損失を計算することのできるモデルの開発が期待される。
3. 本稿では、パラメータの事後分布からのサンプリングに、先行研究同様、ランダム・ウォーク MH アルゴリズムを用いた。しかし、この方法は受容確率をあまり高くできないので、同じ値が続けて出てしまい効率的でない。また、ランダム・ウォーク・モデルの誤差項の分散を大きくできないので、値が大きく動けず、事後分布が単峰でない場合、1つの山の周りからしかサンプリングされない可能性がある。こうした問題を解消する新たなサンプリング法の開発が望まれる。Chib and Ramamurthy(2010)はそうした新たなサンプリング法を提案しているが、この方法はサンプリングに時間がかかり実用的でない。
4. 本稿ではモデルを定常状態の周りで対数線形近似したが、より正確な分析のためにはもっと高次の近似を行う必要がある。2次関数やより高次の関数で近似する方法については、Judd(1998)、Taylor and Uhlig(1999)、Den Haan

and Marcet(1994), Auroba *et al.*(2004)などを参照されたい⁴⁷⁾。

5. Eo(2009)はパラメータがマルコフ・スイッチング・モデルに従って変動するDSGEモデルを考え、将来のレジームがスイッチする可能性を考慮に入れて合理的期待均衡を計算し、推定を行っている。こうしたマルコフ・スイッチングDSGEモデルを用いた分析も重要であろう。ただし、こうしたモデルではパラメータの事後分布が単峰にならない可能性が高いので、Eo(2009)はChib and Ramamurthy(2010)の方法で推定を行っている。既に述べたように、この方法は時間がかかるので、より短時間で推定できる実用的な方法の開発が望まれる。Farmer *et al.*(2009)はマルコフスイッチングDSGEモデルにおいて合理的期待均衡が一意に定まる条件を導出している。
6. 日本のみならず、主要先進国において、政策金利がほぼ下限に達しているような状況下では、名目金利がゼロ以下になれないというゼロ金利制約を加えた推定を行う必要性がこれまで以上に高まっている。ゼロ金利制約を考慮した上で、ゼロ金利期間が内生的に決定され、その下で合理的期待が形成されるようなモデルをまず構築する必要がある、さらにそのような非線形モデルを推定することが要求されている。そうした推定はまだ誰も成功していないので、今後の重要な課題である⁴⁸⁾。
7. DSGE-VARモデルでは真のモデルをVARとしているが、DSGEモデルは定常状態の周りで対数線形近似すると、VARモデルではなく線形ガウシアン状態空間モデルで表せる。そこで、真のモデルをVARモデルではなく線形ガウシアン状態空間モデルとした分析も必要であろう。
8. 本稿では触れなかったが、DSGEモデルのパラメータの識別可能性も重要である。この問題については、例えば、Canova and Sala(2009)やIskrev(2010)を参照されたい。

補論 A：時点の整合性

DSGEモデルでは、ストック変数(例えば、資本ストックや金融資産残高)や変率変数(例えば、金利やインフレ率)を、モデルを通じて整合的に表現することが重要となる。なお、リアル・ビジネス・サイクル・モデルやニュー・ケインジアン・モデルとでは、この時点の表記法が異なることが多いため、注意が必要となる。

リアル・ビジネス・サイクル・モデルでは、家計の予算制約式は以下のような形で表現されることが多い。

$$C_t + K_{t+1} + (1 - \delta)K_t + FA_{t+1} \leq r_t^K K_t + W_t h_t + R_t FA_t \quad (A1)$$

ここで、家計は、状態変数(K_t, FA_t)を所与として、ストック変数である K_{t+1} と FA_{t+1} の最適選択を試みる。

一方、(資本ストックを含まない)単純なニュー・ケインジアン・モデルでは、以下のように記述されることが多い。

$$C_t + FA_t \leq \frac{W_t}{P_t} h_t + (1 + i_{t-1}) FA_{t-1} \quad (A2)$$

ここで、家計は、効用を最大化するように FA_t を選択する。

(A1)、(A2)式のいずれも間違いではなく、モデルを書く際に、統一されていればよい。しかし、モデルをシミュレートする際には、プログラムによっては、特定の表記法を指定するものもある。例えば、DYNAREでは、(A2)式の表記でプログラムを書かないとモデルをシミュレートすることができない。

どうして、このような表記法の違いが存在するのかは定かではない。しかし、リアル・ビジネス・サイクル・モデルでは、資本ストックが重要な変数である中、企業の利潤最大化問題を考えると、(A2)式の表記法では、企業が最適な K_{t+1} を選択することになってしまう。一方、金融政策の役割が重要なニュー・ケインジアン・モデルでは、テイラー・ルールなどを考えると、(A1)式の表記法では、金融政策が i_{t+1} を設定することになってしまう。こうしたことを避けるために、モデルによって表記法が異なっているのかもしれない。

補論 B：解の唯一性について

ここでは、King *et al.*(1988a, 1988b)以来、その簡便性から頻繁に用いられるようになってきた、非線形DSGEモデルを対数線形近似する手法を用いて、(22)、(24)式のような解、すなわち、Policy Functionを導出してきた。しかし、線形近似されたモデルで合理的期待均衡解がユニークであったとしても、非線形なモデルでは、解がユニークなものとなるとは限らない。ここでは、非線形なモデルにおいても、ここで紹介した新古典派成長モデルでは、解が唯一となることの証明のエッセンスを紹介する。

第3節で紹介したモデルについては、外部性や歪みが存在しないため、厚生経済学の第2定理に従うと、導出された競争均衡と同じ配分を社会計画者の問題として実現することができる。

社会計画者は、上記モデルと同じ効用の割引現在価値

$$W_t = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(C_{t+s}, h_{t+s}) \quad (B1)$$

を(8)式で表現される資源制約の下で最適化する。なお、最適な選択がなされている限りは、労働に関する一階の条件として、(11)式が導出されるため、労働は消費と資本の関数として表現できる。

$$h_t = h(C_t, K_t) \quad (B2)$$

なお、ここでは、簡便化のため、ショックは考えないが、ショックを加えた不確実性下での問題としても本質的な差はない。これを(8)式に代入すると、陰関数の定理より、消費は、さらに、資本の関数として表現されることとなる。

$$C_t = C(K_t, K_{t+1}) \quad (B3)$$

(B1)式より、

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u[C(K_{t+1+s}, K_{t+2+s}), h(C_{t+1+s}, K_{t+1+s})] \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(K_{t+1+s}, K_{t+2+s}) \end{aligned}$$

であることに着目すると、上記の最適化問題は、以下

のようにベルマン方程式として表現することが可能となる。

$$\begin{aligned}
 V(K_t) &= \max_{K_{t+1}} W_t \\
 &= \max_{K_{t+1}} \left[u(K_t, K_{t+1}) + \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s u(K_{t+1+s}, K_{t+2+s}) \right] \\
 &= \max_{K_{t+1}} \left[u(K_t, K_{t+1}) + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(K_{t+1+s}, K_{t+2+s}) \right] \\
 &= \max_{K_{t+1}} [u(K_t, K_{t+1}) + \beta V(K_{t+1})]. \quad (B4)
 \end{aligned}$$

任意の t について、上記の関係は満たされる必要があるため、(B4)式は、以下のような形で表記されることが多い。

$$V(K) = \max_K [u(K, K') + \beta V(K')]. \quad (B5)$$

ここで、(B5)式における価値関数 $V(\cdot)$ さえかわれば、1期前の状態変数 K に従い、翌期の状態変数 K' が決まることとなる。

$$K' = g(K). \quad (B6)$$

さらに、(B6)を(B2)、(B3)式に代入すると、

$$h = h(K), \quad (B7)$$

$$C = C(K) \quad (B8)$$

が得られる。こうして、(B6)、(B7)式の Policy Function より、何らかの状態変数の初期値から、合理的期待均衡下の全ての内生変数のパスが得られることとなる。

問題は、(B5)式における価値関数 $V(\cdot)$ をユニークにみつけることができるか、ということになる。これについては、議論がテクニカルになるため、本稿では紹介しないが、(B5)式について、完備距離空間(バナッハ空間)における価値関数 $V(\cdot)$ についての縮小写像を用いることにより、 $V(\cdot)$ の唯一性(関数 $V(\cdot)$ についての不動点のようなものの存在)を証明することが可能となる(この点についての詳細は、Stokey *et al.*(1989)やLjungqvist and Sargent(2004)を参照されたい)。

補論 C：周辺尤度の修正調和平均推定量

MCMC を用いた周辺尤度の計算にはいくつかの方法が提案されているが、本稿では、DSGE や DSGE-VAR モデルの先行研究に従い、Geweke (1999)によって提案された修正調和平均推定量を用いている。以下では、条件である M_1 や M_2 を省略して、周辺尤度を $f(\mathbf{Y})$ と表すことにする。まず、 $g(\theta)$ を何らかの確率密度関数であるとする、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{g(\theta)}{f(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)} \right] &= \int \frac{g(\theta)}{f(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)} f(\theta|\mathbf{Y}) d\theta \\
 &= \int \frac{g(\theta)}{f(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)} \frac{f(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)}{f(\mathbf{Y})} d\theta \\
 &= \int \frac{g(\theta)}{f(\mathbf{Y})} d\theta \\
 &= \frac{1}{f(\mathbf{Y})} \int g(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{f(\mathbf{Y})}. \quad (C1)
 \end{aligned}$$

したがって、周辺尤度は事後分布からサンプリングさ

れた $(\theta_1, \dots, \theta_M)$ を用いて以下のように推定できる。

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{Y}) &= \frac{1}{E \left[\frac{g(\theta)}{f(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)} \right]} \\
 &\approx \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{g(\theta_i)}{f(\mathbf{Y}|\theta_i)f(\theta_i)} \right]^{-1}. \quad (C2)
 \end{aligned}$$

Newton and Raftoy(1994)は、 $g(\theta) = f(\theta)$ とすることを提案している。そうすると、(C2)式は以下のように簡単になる。

$$f(\mathbf{Y}) \approx \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{f(\mathbf{Y}|\theta_i)} \right]^{-1}. \quad (C3)$$

これは、周辺尤度の調和平均推定量と呼ばれる。しかし、 $f(\mathbf{Y}|\theta_i)$ は 0 に近くなることがあるので、そうすると値が不安定になる。

この問題を解消するために、Geweke(1999)は $g(\theta)$ を以下の切断正規分布にした修正調和平均推定量を提案している。

$$\begin{aligned}
 g(\theta) &= \tau^{-1} (2\pi)^{-k/2} |\Sigma|^{-1/2} \\
 &\exp \left[-\frac{1}{2} (\theta - \mu)' \Sigma^{-1} (\theta - \mu) \right] \\
 &\times I[(\theta - \mu)' \Sigma^{-1} (\theta - \mu) \leq F_{k, \tau}^{-1}(\tau)]. \quad (C4)
 \end{aligned}$$

ここで、 k は θ の次元(パラメータの数)、 $F_{k, \tau}^{-1}(\tau)$ は自由度 k の χ^2 分布の累積分布関数の逆関数である。本稿では、 $\tau = 0.95$ とした。また、Geweke(1999)に従い、 μ と Σ を、それぞれ事後分布からサンプリングされた θ の標本平均と標本分散共分散行列にした。 $I[\cdot]$ は括弧の中の不等式が満たされれば 1、満たされなければ 0 となる指示関数である。

この修正調和平均推定量では、 θ の値として極端な値がサンプリングされた場合に、(C2)式の $g(\theta_i)/[f(\mathbf{Y}|\theta_i)f(\theta_i)]$ が 0 になるため、周辺尤度の値が不安定になるのを防ぐことができる。ただし、本稿の分析では、合理的均衡が一意に求まらない θ の範囲を切断しているので注意が必要である。事前分布 $f(\theta)$ と $g(\theta)$ に関しては、切断していない範囲で積分して 1 になるように基準化定数を掛ける必要がある。 $f(\theta)$ に関しては、表 1 に示されている事前分布から θ を 10,000 回サンプリングし、そのうち切断されていない範囲から N_f 回サンプリングされたとすると、 $10000/N_f$ を基準化定数とした。また、 $g(\theta)$ に関しては、(C4)式の変量正規分布から θ を 10,000 回サンプリングし、そのうち切断されていない範囲からサンプリングされ、かつ(C4)式の指示関数の括弧の中の不等式を満たした回数を N_g 回とすると、 $10000/N_g$ を基準化定数とした。

また、このようにして計算した周辺尤度はあくまでも推定値であり推定誤差を含むことにも注意が必要である。そこで、本稿では、対数周辺尤度の標準誤差もデルタ法によって計算している。

補論 D：DSGE モデルと DSGE-VAR モデルのインパルス応答関数

DSGE モデルで、例えば、1 期に σ_R の金利上昇があった場合の、YGR, INFL, INT のインパルス応答関数を導出するためには、

$$\epsilon_t = \begin{cases} [\sigma_R, 0, 0]', & t = 1 \\ [0, 0, 0]', & t \neq 1 \end{cases} \quad (D1)$$

を(90), (91)式に代入すればよい。具体的には, DSGE モデルのパラメータ θ の値が与えられれば, 金利ショックの k 期のインパルス応答は以下の式から計算できる。

$$IR_{R,k}(\theta) = Z \times \bar{\Theta}^{k-1}(\theta) \times \bar{\Theta}_0(\theta) \times \epsilon_1, \\ \epsilon_1 = [\sigma_{R,1}, 0, 0]'. \quad (D2)$$

ここで, $IR_{R,k}(\theta)$ は 3×1 のベクトルで, 上から, YGR, INFL, INT のインパルス応答関数に対応している。ただし, 図3と図4では, YGRではなく, LNY (YGR_t = LNY_t - LNY_{t-1}) のインパルス応答関数を示している。 $\bar{\Theta}_1(\theta), \bar{\Theta}_0(\theta)$ は, ランダム・ウォーク MH アルゴリズムにより DSGE モデルのパラメータをサンプリングするごとに計算できるので, ランダム・ウォーク MH アルゴリズムを M 回繰り返せば, M 個の $IR_{R,k}(\theta)$ を計算することができる。これは, $IR_{R,k}(\theta)$ もパラメータと同時に事後分布からサンプリングしていることになり, $IR_{R,k}(\theta)$ の事後平均はその標本平均, 90% 信用区間は, $IR_{R,k}(\theta)$ を大きさの順に並べ替え, 上5%と下5%の値を抽出することにより導出できる。財政支出ショックや生産性ショックについても同様である。

これに対して, DSGE-VAR モデルでインパルス応答関数を求めるためには, 工夫が必要である。便宜上, $\bar{\epsilon}_t = [\epsilon_{R,t}/\sigma_R, \epsilon_{g,t}/\sigma_g, \epsilon_{z,t}/\sigma_z]'$ と定義すると, VAR モデル(107)式の誤差項 u_t を構造ショック $\bar{\epsilon}_t$ によって以下のように表現する必要がある。

$$u_t = \Sigma_{tr} \Omega \bar{\epsilon}_t. \quad (D3)$$

ここで, Σ_{tr} は Σ_u をコレスキー分解した行列, Ω は直交行列である。この Σ_{tr} と Ω が求まれば,

$$\bar{\epsilon}_t = \begin{cases} [1, 0, 0]', & t = 1 \\ [0, 0, 0]', & t \neq 1 \end{cases} \quad (D4)$$

として ($\bar{\epsilon}_{R,t} = \sigma_{R,t}$ なので, これは(D1)と同じ), (D3)式を VAR モデル(107)式に代入すると金利ショックのインパルス応答関数を求めることができる。

しかし, VAR モデルの尤度は Σ_u に依存するが, (D3)式より,

$$\Sigma_u = \Sigma_{tr} \Omega E[\bar{\epsilon}_t \bar{\epsilon}_t'] \Omega' \Sigma_{tr}' = \Sigma_{tr} \Omega \Omega' \Sigma_{tr}' = \Sigma_{tr} \Sigma_{tr}'$$

となるので, Ω はデータからは識別できない。そこで, 本稿では, An and Schorfheide(2007)や Del Negro *et al.*(2007)に従い, DSGE モデルにおけるショックの起きた1期のインパルス応答関数から Ω を求める。DSGE モデルにおける金利ショック $\epsilon_{R,1} = \sigma_R(\bar{\epsilon}_1=1)$ に対する1期のインパルス応答関数は, DSGE モデルのパラメータ θ の値が与えられれば, (D2)式で $k=1$ とすれば $IR_{R,1}(\theta)$ として求まる。財政支出ショックや生産性ショックについても同様に1期のインパルス応答関数 $IR_{g,1}(\theta), IR_{z,1}(\theta)$ を導出できる。 $IR_1(\theta) = [IR_{R,1}(\theta), IR_{g,1}(\theta), IR_{z,1}(\theta)]$ とすると, これは QR 分解により, 以下のように一意に分解できる。

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial \epsilon_t'} \right)_{\text{DSGE}} = IR_1(\theta) = \Sigma^*(\theta) \Omega^*(\theta). \quad (D5)$$

ここで, $\Sigma^*(\theta)$ は下三角行列, $\Omega^*(\theta)$ は直交行列で

ある。(D3)式の Ω を(D5)式の $\Omega^*(\theta)$ で置き換える。

ここで, ランダム・ウォーク MH アルゴリズムにより, DSGE モデルのパラメータ θ をサンプリングし, さらに, それを条件とする事後分布(124), (125)より Σ_u と Φ をサンプリングすれば, 以下のように DSGE-VAR における金利ショックのインパルス応答関数を求めることができる。

[1] Σ_u をコレスキー分解して, Σ_{tr} を求める。

[2] (D5)式から, $\Omega^*(\theta)$ を計算し, $\Omega = \Omega^*(\theta)$ とする。

[3] [1],[2]で計算した Σ_{tr}, Ω と(D4)式を(D3)式に代入し, それをさらに VAR モデル(107)式に代入することで, 金利ショックのインパルス応答関数を求める。

これもランダム・ウォーク MH アルゴリズムにより, DSGE モデルのパラメータ θ をサンプリングするごとに計算できるので, ランダム・ウォーク MH アルゴリズムを M 回繰り返せば, M 個のインパルス応答関数を計算することができ, その標本平均として事後平均を, 大きさの順に並べ替え, 上5%と下5%の値を抽出することにより 90% 信用区間を導出できる。財政支出ショックや生産性ショックについても同様である。

(日本銀行金融市場局・一橋大学経済研究所)

注

* 本研究は, 一橋大学グローバル COE プログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」と文部科学省科学研究費基盤 A「金融危機下のマクロ経済政策の計量分析」(代表者: 渡部敏明)から助成を受けている。一橋大学定例研究会参加者および討論者の廣瀬康生氏(慶応大学)から多くの貴重なコメントを頂いた。また, 本稿で使用した日本のマクロデータは, 中島上智氏(日本銀行)に作成してもらった。さらに, 中島上智氏と大塚芳宏氏(一橋大学大学院経済学研究科博士課程)には本稿の誤りをチェックしてもらった。ここに記して感謝の意を表したい。本稿に示された内容は, 筆者たち個人に属し, 日本銀行の公式見解を示すものではない。また, 本稿に残っている誤りはすべて筆者たちの責任である。

1) DSGE モデルの MCMC を用いたベイズ推定法について解説した文献には, An and Schorfheide(2007), Canova(2007), Dejong and Dave(2007), Fernández-Villaverde(2009), Pytlarczyk(2007)などがある。

2) Dynare は, <http://dynare.org/> からダウンロードできる。Dynare について詳しくは, 上記サイトや Jillard(2001)を参照されたい。本稿の推定では Dynare は用いておらず, Frank Schorfheide のホームページ <http://www.econ.upenn.edu/~schorf/research.htm> を参考に, すべて GAUSS を使ってプログラミングした。ただし, 合理的期待均衡を導出するプログラムは, Christopher Sims が作成した gensys の Gauss 版を <http://www.econ.upenn.edu/~schorf/computing.htm> よりダウンロードして利用した。他のソフト(Matlab, R, Octave)用の gensys は, <http://sims.princeton.edu/yftp/gensys/> からダウンロードできる。

3) 線形状態空間モデルを VARMA モデルで表した場合の MA 項の反転可能性については, Fernández-Villaverde *et al.*(2007)を参照されたい。

4) Sims(2003)はこうしたアド・ホックなトレンドの除去についても批判している。

5) 名目変数が含まれないことが多かったこともあり,

リアル・ビジネス・サイクル・モデル(実物景気循環モデル)と呼ばれるようになった。

6) 独占的競争を組み込んだリアル・ビジネス・サイクル・モデルについては、例えば、Hornstein(1993)を参照されたい。

7) 本論点については、様々な見解が提示されている。ここで挙げられた論文のほかに、例えば、Christiano *et al.*(2004, 2006), Gali and Rabanal(2005), Erceg *et al.*(2006), Fernald(2007), Chari *et al.*(2008)を参照されたい。

8) 後ほど紹介する現実説明力の高いモデルは、これらに実質硬直性などの調整メカニズムが加えられている。

9) 本来、同一であるべき価格が異なるため、企業毎の労働投入量に違いが生じ、最適な資源配分が達成できなくなる。

10) 合理的期待ではなく、経済主体が過去の変数より、なんらかの計量モデルに従い将来の期待を決定するようなラーニングについては、Evans and Honkapohja(2001)を参照されたい。

11) ストック変数や変化率変数の時点の書き方については、補論 A を参照。

12) ここでは、家計が資本ストックを保有している。家計が金融資産のみを保有し、これを運用資金として銀行が資本ストックを保有するような定式化にしても、同様の解が得られる。

13) Christiano(2002), Sims(2002)が収録されている Computational Economic の 20 巻 1-2 号は、線形合理的期待モデルの解法特集号となっており、このほかにも、King and Watson(2002)による手法が紹介されている。King and Watson(2002)は、基本的には、Blanchard and Kahn(1980)の手法に基づくもので、逆行列を計算するために、行列の reduction を自動で行うことが可能となっている。行列が特異の場合については、上記のような reduction を行う方法よりも、最近では、Shur 分解を用いるものが多い。詳細については、Klein(2000)や後述する Sims(2002)を参照されたい。

14) 主観的割引率が 1 より小さく設定されるような通常のモデルでは、Blanchard and Kahn(1980)条件は満たされることが多い。これが満たされないようなモデルについては、例えば、Farmer(1999)が詳しい。なお、ここでは、定常状態の非決定ではなく、バスの非決定について議論していることには注意が必要である。また、線形近似モデルで解の唯一性が満たされたとしても、非線形モデルでこれが満たされるとは限らない。この点については、補論 B を参照。

15) ここでは、一般化された未定計数法による解法を紹介するが、未定計数法自体については、例えば、McCallum(1983), Campbell(1994), Uhlig(1998)を参照。

16) MATLAB では、 m を $\mathbf{X}$ の行数とした場合、 $\text{reshape}(\mathbf{X}, n \times m, 1)$ でこのような変換が可能。

17) 非決定の下での DSGE モデルの推定については、Lubik and Schorfheide(2004)を参照されたい。

18) Sims(2002)の解法は、 $\mathbf{V}_0^* \mathbf{\Pi}^*$ において、列(1より大きい固有値)の数が行(期待変数)の数より多かったとしても、行列が特異であれば、合理的期待をユニークに決められる可能性を排除しない。なお、この $\mathbf{\Gamma}_0$ が正則行列の時の説明は Hirose(2008)を参照した。

19) なお、下に示すように、実際には、これをモデルの構造パラメーターで決めることはできない。Lubik and Schorfheide(2003)によって示されたように、ある過程に従い、カリブレートする手法もあるが、推定等を行う必要がある。詳細は、Lubik and Schorfheide(2004)を参照されたい。

20) 厳密には、アロー証券の残高は、マクロではゼロとなるため、各家計 i の問題として表現される必要がある。

また、アロー証券の購入は、 $E_t[Q_{t+1}|S_{t+1}] = \sum_{S_{t+1}} Q_t(\bar{s}_{t+1}|\bar{s}_t) S_t(\bar{s}_{t+1}, j)$ として、リターンは $S_t = S_t(\bar{s}_t, j)$ と表現されるべきである。ここでは、簡便化のため、簡略的な表記法を用いた。なお、 $\bar{s}_t$ は状態を示す。

21) この仮定の下では、効用関数が消費、実質貨幣保有、余暇に関して加法分離ではなくても、経済は均衡成長経路を辿ることができる。

22) なお、金利とインフレ率については、乖離幅となる。

$$\bar{r}_t = \ln(1+i_t) - \ln(1+i) \approx i_t - i.$$

23) カルマン・フィルターについて詳しくは、Durbin and Koopman(2001), Harvey(1983), Kim and Nelson(1999)などを参照されたい。

24) これらは、パラメータの値だけ与えられ、データがない場合の $\bar{s}_t$ の期待値と分散共分散行列である。また、 $\otimes$ はクロネッカー積を表す。

25) ベイズ推定や MCMC について詳しくは、小西・越智・大森(2008), 中妻(2007), 和合(2005)などを参照されたい。

26) MH アルゴリズムについては、Chib and Greenberg(1995)を参照されたい。

27) [1]で事後分布の対数値のモードとその下でヘッシアンを計算する必要があるが、モードは基準化定数とは関係なく、また事後分布の対数値では基準化定数は積ではなく和になるのでヘッシアンの計算にも関係ない。

28) burn-in の間に $\mathbf{H}$ と c を適応的に調整する適応的(adaptive)ランダム・ウォーク MH アルゴリズムと呼ばれる方法もある。この方法については、Roberts and Rosenthal(2007, 2009), Rosenthal(2010)を参照されたい。

29) An and Shorfheide(2007)は、テラールルールを(51)式の需給ギャップルールから、GDP 成長率ルール

$$R_t = \left[r\pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{Y_t}{\gamma Y_{t-1}} \right)^{\psi_2} \right]^{1-\rho_R} R_{t-1}^{\rho_{R,t}}$$

に変えると、事後分布が単峰でなくなるなどの結果を報告している。他の例については、Chib and Ramamurthy(2010)を参照されたい。

30) 小西・越智・大森(2008)を参照されたい。

31) 平均に差がないというのは収束の必要条件であり、十分条件ではない。

32) 最初の M_A 個と最後の M_B 個の間に $M - M_A - M_B = 0.4M$ 個分の間隔を空けているのは、 θ_A と θ_B を無関係にするためである。

33) 古典的な標本学派の統計学では、パラメータが定数で標本が確率変数であるのに対して、ベイズ統計学ではパラメータが確率変数で標本が定数である。そこで、これは標本学派の信頼区間(confidence interval)と異なるため、鈴木(1978)に従い、信用区間(Bayesian credible interval)と呼ぶ。

34) Hamilton(1994)を参照されたい。

35) Chib(2001)を参照されたい。

36) 事前分布と事後分布が conjugate 分布になるような事前分布を自然共役(natural conjugate)の事前分布という。

37) DSGE モデルの事前分布を設定する他の方法や事前分布の推定結果への影響については、Del Negro and Schorfheide(2008)を参照されたい。

38) Lubik and Schorfheide(2004)を参照されたい。

39) ゼロ金利前の期間をいつまでにするかは議論が分かれるところである。例えば、Sugo and Ueda(2008)では、1995 年第 IV 四半期に翌日物コール・レートが 0.5% まで下がっているのを、そこまでをゼロ金利前の期間と考え推定を行っている。

40) 一人当たり実質 GDP とインフレ率は季節調整済みのデータを用いた。名目利率については、1988 年 11 月以前は有担保コール翌日物を、それ以後は無担

保コールを用いた。インフレ率については、1989年4月の消費税導入と1997年4月の消費税率引き上げの影響を調整した。

41) DSGE-VAR モデルについてより平易に解説したものに Del Negro and Schorfheide (2006) がある。

42) 無情報事前分布については、Zellner (1971) を参照されたい。

43) 詳しくは、Zellner (1971) を参照されたい。

44) 詳しくは、Zellner (1971) を参照されたい。

45) より厳密な分析のためには、ラグ次数も周辺尤度により選択すべきであるが、マクロ変数の四半期データを用いた VAR モデルの推定ではラグ次数を4とすることが多いので (An and Schorfheide, 2007; Del Negro et al., 2004, 2007), ここでもそれに倣った。

46) そうした財政政策と変数間の内生的関係を考慮して VAR モデルを推定している研究に、Blanchard and Perotti (2002) がある。

47) An and Schorfheide (2007) は、対数線形近似だけでなく、Schmitt-Grohé and Uribe (2006) のアルゴリズムを用いて2次近似した場合の推定も行っている。

48) 完全予見ではないが、特殊な確率過程 (例えば、マルコフ連鎖) を仮定した上でのシミュレーションは、例えば、Eggertson and Woodford (2003) や Adam and Billi (2006, 2007) で行われているが、一般的な確率過程の下でのシミュレーション自体がいまだ実現していない。

参 考 文 献

- 加藤涼 (2006) 『現代マクロ経済学講義—動学的一般均衡モデル入門』東洋経済新報社。
- 小西貞則・越智義道・大森裕浩 (2008) 『計算科学の方法—ブートストラップ, EM アルゴリズム, MCMC』朝倉書店。
- 中妻照雄 (2007) 『入門ベイズ統計学』朝倉書店。
- 鈴木雪夫 (1978) 『統計解析』筑摩書房。
- 和合肇編著 (2005) 『ベイズ計量経済分析—マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社。
- 渡部敏明 (2009) 「DSGE-VAR モデルの日本のマクロデータへの応用」ESRI Discussion Paper Series No. 225-J, 内閣府経済社会総合研究所。
- Adam, K. and Billi, R. (2006) "Optimal Monetary Policy under Commitment with a Zero Bound on Nominal Interest Rates," *Journal of Money Credit and Banking*, Vol. 38, No. 7, pp. 1877-1906.
- Adam, K. and Billi, R. (2007) "Discretionary Monetary Policy and the Zero Lower Bound on Nominal Interest Rates," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 54, No. 3, pp. 728-752.
- Adolfson, M., Laseen, S., Linde, J. and Villani, M. (2007) "Bayesian Estimation of an Open Economy DSGE Model with Incomplete Pass-Through," *Journal of International Economics*, Vol. 72, No. 2, pp. 481-511.
- Andolfatto, D. (1996) "Business Cycles and Labor-Market Search," *American Economic Review*, Vol. 86, No. 1, pp. 112-132.
- An, S. and Schorfheide, F. (2007) "Bayesian Analysis of DSGE Models," *Econometric Reviews*, Vol. 26, No. 2, pp. 113-219.
- Aoki, K. (2001) "Optimal Monetary Policy Responses to Relative-Price Changes," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 48, No. 1, pp. 55-80.
- Aruoba, S. B., Fern and ez-Villaverde, J. and Rubio-Ramirez, J. E. (2004) "Comparing Solutions Methods for Dynamic Equilibrium Economies," *Journal of Economics Dynamics and Control*, Vol. 30, No. 12, pp. 2477-2508.
- Basu, S., Fernald, J. and Kimball, M. (2006) "Are Technology Improvements Contractionary?" *American Economic Review*, Vol. 96, No. 5, pp. 1418-1448.
- Benhabib, J., Rogerson, R. and Wright, R. (1991) "Home-work in Macroeconomics: Household Production and Aggregate Fluctuations," *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 6, pp. 1166-1187.
- Bernanke, B., Gertler, M. and Gilchrist, C. (1999) "The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework," in J. B. Taylor and M. Woodford (eds.), *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1C, Chapter 21, Amsterdam: Elsevier, pp. 1341-1393.
- Bils, M. and Klenow, P. (2004) "Some Evidence on the Importance of Sticky Prices," *Journal of Political Economy*, Vol. 112, No. 5, pp. 947-985.
- Blanchard, O. and Gali, J. (2010) "Labor Markets and Monetary Policy: A New Keynesian Model with Unemployment," *American Economic Journal: Macroeconomics*, Vol. 2, No. 2, pp. 1-30.
- Blanchard, O. and Kahn, C. (1980) "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations," *Econometrica*, Vol. 48, No. 5, pp. 1305-1311.
- Blanchard, O. and Quah, D. (1989) "The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances," *American Economic Review*, Vol. 79, No. 4, pp. 655-673.
- Blanchard, O. and Perotti, R. (2002) "An Empirical Characterization of The Dynamic Effects of Changes In Government Spending And Taxes on Output," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 117, No. 4, pp. 1329-1368.
- Braun, R. (1994) "Tax Disturbances and Real Economic Activity in the Postwar United States," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 33, No. 3, pp. 441-462.
- Brock, W. and Mirman, L. (1972) "Optimal Economic Growth and Uncertainty," *Journal of Economic Theory*, Vol. 4, No. 3, pp. 479-513.
- Brubakk, L., Husebo, T.-A., Maih, J., Olsen K. and Ostnor, M. (2006) "Finding NEMO: Documentation of the Norwegian Economy Model," Staff Memo, 2006/6, Norges Bank.
- Burnside, C. and Eichenbaum, M. (1996) "Factor-Hoarding and the Propagation of Business-Cycle Shocks," *American Economic Review*, Vol. 86, No. 5, pp. 1154-1174.
- Calvo, G. (1983) "Staggered Prices in A Utility-Maximizing Framework," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 12, No. 3, pp. 383-398.
- Campbell, J. (1994) "Inspecting the Mechanism: an Analytical Approach to the Stochastic Growth Model," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 33, No. 3, pp. 463-506.
- Canova, F. (2007) *Methods for Applied Macroeconomic Research*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Canova, F. and Sala, L. (2009) "Back to Square One: Identification Issues in DSGE Models," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 56, No. 4, pp. 431-449.
- Cass, D. (1965) "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, Vol. 32, No. 3, pp. 233-240.
- Chari, V. V., Kehoe, P. J. and McGrattan, E. R. (2008) "Are Structural VARs with Long-Run Restrictions Useful in Developing Business Cycle Theory?" *Journal of Monetary Economics*, Vol. 55, No. 8, pp. 1337-1352.
- Chib (2001) "Markov Chain Monte Carlo Methods:

- Computation and Inference," in J. J. Heckman and E. Leaper (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 5, Chapter 57, Amsterdam, Netherlands: Elsevier, pp. 3569-3649.
- Chib, S. and Greenberg, E. (1995) "Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm," *American Statistician*, Vol. 49, No. 4, pp. 327-335.
- Chib, S. and Jeliazkov, I. (2001) "Marginal Likelihood from the Metropolis-Hastings Output," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 96, No. 453, pp. 270-281.
- Chib, S. and Ramamurthy, S. (2010) "Tailored Randomized-Block MCMC Methods with Application to DSGE," *Journal of Econometrics*, Vol. 155, No. 1, pp. 19-38.
- Christiano, L. (2002) "Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients," *Computational Economics*, Vol. 20, No. 1-2, pp. 21-55.
- Christiano, L., Eichenbaum, M. and Evans, C. (1999) "Monetary Policy Shocks: What Have We Learned and to What End?" in J. B. Taylor and M. Woodford (eds.), *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1A, Chapter 14, Amsterdam: Elsevier, pp. 65-148.
- Christiano, L. J., Eichenbaum, M. and Evans, C. (2005) "Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary policy," *Journal of Political Economy*, Vol. 113, No. 1, pp. 1-45.
- Christiano, L., Eichenbaum, M. and Vigfusson, R. (2004) "The Response of Hours to a Technology Shock: Evidence Based on Direct Measures of Technology," *Journal of the European Economic Association*, Vol. 2, No. 2-3, pp. 381-395.
- Christiano, L., Eichenbaum, M. and Vigfusson, R. (2006) "Alternative Procedures for Estimating Vector Autoregressions Identified with Long-Run Restrictions," *Journal of the European Economic Association*, Vol. 4, No. 2-3, pp. 475-483.
- Christoffel, K., Coenen, G., and Warne, A. (2008) "The New Area-Wide Model of the Euro Area — A Micro-Founded Open-Economy Model for Forecasting and Policy Analysis," European Central Bank Working Paper Series, 923.
- Clarida, R., Gali, J. and Gertler, M. (1999) "The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective," *Journal of Economic Literature*, Vol. 37, No. 4, pp. 1661-1707.
- Cooley, T. (1995) *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Dejong, D. N. and Dave, C. (2007) *Structural Macroeconometrics*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2004) "Priors from General Equilibrium Models for VARs," *International Economic Review*, Vol. 45, No. 2, pp. 643-673.
- Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2006) "How Good is What Youve Got? DSGE-VAR as a Toolkit for Evaluating DSGE Models," *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, Vol. 91, No. 2, pp. 21-37.
- Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2008) "Forming Priors for DSGE Models (and How It Affects the Nominal Rigidities)," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 55, No. 7, pp. 1191-1208.
- Del Negro, M., Schorfheide, F., Smets, F. and Wouters, R. (2007) "On the Fit of New Keynesian Models," (with comments) *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 25, No. 2, pp. 123-162.
- Den Haan, W. J. and Marcet, A. (1994) "Accuracy in Simulation," *Review of Economic Studies*, Vol. 61, No. 1, pp. 3-17.
- Durbin, J. and Koopman, S. J. (2001) *Time Series Analysis by State Space Models*, Oxford: Oxford University Press. (和合肇・松田安昌訳 (2004) 『状態空間モデルによる時系列分析入門』シーエービー出版.)
- Eggertsson, G. B. and Woodford, M. (2003) "The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy," *Brookings Papers on Economic Activity*, Vol. 34 (2003-1) pp. 139-235.
- Eo, Y. (2009) "Bayesian Analysis of DSGE Models with Regime Switching," MPRA Paper 13910, University Library of Munich, Germany.
- Erceg, C., Henderson, D. and Levin, A. (2000) "Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 46, No. 2, pp. 281-313.
- Erceg, C., Guerrieri, L. and Gust, C. (2006) "SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis," *International Journal of Central Banking*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-50.
- Evans, G. and Honkapohja, S. (2001) *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Farmer, R. (1999) *Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Farmer, R. E. A., Waggoner, D. F. and Zha, T. (2009) "Understanding Markov-Switching Rational Expectations Models," *Journal of Economic Theory*, Vol. 144, No. 5, pp. 1489-1867.
- Fernald, J. (2007) "Trend Breaks, Long-Run Restrictions, and Contractionary Technology Improvements," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 54, No. 8, pp. 2467-2485.
- Fernández-Villaverde, J. (2009) "The Econometrics of DSGE Models," *NBER Working Paper*, No. 14677.
- Fernández-Villaverde, J. and Rubio-Ramírez, J. F. (2005) "Estimating Dynamic Equilibrium Economies: Linear versus Nonlinear Likelihood?" *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 20, No. 7, pp. 891-910.
- Fernández-Villaverde, J. and Rubio-Ramírez, J. F. (2007) "Estimating Macroeconomic Models: A Likelihood Approach?" *Review of Economic Studies*, Vol. 74, NO. 4, pp. 1-46.
- Fernández-Villaverde, J., Rubio-Ramírez, J. F., Sargent, T. J. and Watson, M. (2007) "A, B, C (and D's) for Understanding VARs," *American Economic Review*, Vol. 97, No. 3, pp. 1021-1026.
- Friedman, M. (1969) *The Optimum Quantity of Money and Other Essays*, Chicago: Aldine Publishing Company.
- Fujiwara, I., Hirose, Y. and Shintani, M. (2010) "Can News be a Major Source of Aggregate Fluctuations," *Journal of Money Credit and Banking*, forthcoming.
- Gali, J. (1999) "Technology, Employment, and the Business Cycle: Do Technology Shocks Explain Aggregate Fluctuations?" *American Economic Review*, Vol. 89, No. 1, PP. 249-271.
- Gali, J. and Rabanal, P. (2005) "Technology Shocks and Aggregate Fluctuations: How Well Does the RBC Model Fit Postwar U.S. Data?" *NBER Macroeconomics Annual 2004*, Cambridge, MA: MIT Press, pp. 225-318.

- Gallant, A. R. (1987) *Nonlinear Statistical Models*, NY: John Wiley Sons.
- Gelman, A. G., Roberts, G. O. and Gilks, W. R. (1996) "Efficient Metropolis Jumping Rules," in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds.), *Bayesian Statistics*, 5, Oxford: Oxford University Press, pp. 599-608.
- Gertler, M., Sala, L. and Trigari, A. (2008) "An Estimated Monetary DSGE Model with Unemployment and Staggered Nominal Wage Bargaining," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 40, No. 8, pp. 1713-1764.
- Geweke, J. (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," (with discussion) in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds.), *Bayesian Statistics*, 4, Oxford: Oxford University Press, pp. 169-194.
- Geweke, J. (1999) "Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development and Communication," *Econometric Reviews*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-126.
- Greenwood, J., Hercowitz, Z. and Huffman, G. (1988) "Investment, Capacity Utilization, and the Real Business Cycle," *American Economic Review*, Vol. 78, No. 3, pp. 402-417.
- Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton, NJ: Princeton University Press. (沖本竜義・井上智夫訳 (2006) 『時系列解析』シーエービー出版.)
- Hansen, G. (1985) "Indivisible Labor and the Business Cycle," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 16, No. 3, pp. 309-327.
- Harvey, A. C. (1989) *Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Hirose, Y. (2008) "Equilibrium Indeterminacy and Asset Price Fluctuations in Japan: A Bayesian Investigation," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 40, No. 5, pp. 967-999.
- Hornstein, A. (1993) "Monopolistic Competition, Increasing Returns to Scale, and the Importance of Productivity Shocks," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 31, No. 3, pp. 299-316.
- Iiboshi, H., Nishiyama, S. and Watanabe, T. (2006) "An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Japanese Economy: A Bayesian Analysis," Mimeo.
- Iskrev, N. (2010) "Local Identification in DSGE Models," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 57, No. 2, pp. 189-202.
- Judd, K. L. (1998) *Numerical Methods in Economics*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Juillard, M. (2001) "DYNARE: A Program for the Simulation of Rational Expectation Models," *Computing in Economics and Finance*, 213.
- Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1999) *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Kimball, M. (1995) "The Quantitative Analytics of the Basic Neomonetarist Model," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 27, No. 4, pp. 1241-1277.
- King, R., Plosser, C. and Rebelo, S. (1988a) "Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 21, No. 2-3, pp. 195-232.
- King, R., Plosser, C. and Rebelo, S. (1988b) "Production, Growth and Business Cycles: 2. New Directions," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 21, No. 2-3, pp. 309-341.
- King, R. and Watson, M. (2002) "System Reduction and Solution Algorithms for Singular Linear Difference Systems under Rational Expectations," *Computational Economics*, Vol. 20, No. 1-2, pp. 57-86.
- Kiyotaki, N. and Moore, J. (1997) "Credit Cycles," *Journal of Political Economy*, Vol. 105, No. 2, pp. 211-248.
- Klein, P. (2000) "Using the Generalized Shur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 24, No. 10, pp. 1405-1423.
- Koopmans, T. C. (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth," *The Economic Approach to Development Planning*, Amsterdam: North-Holland.
- Kydland, F. and Prescott, E. (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations," *Econometrica*, Vol. 50, No. 6, pp. 1345-70.
- Laxton, D. and Pesenti, P. (2003) "Monetary Rules for Small, Open, Emerging Economies," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, No. 5, pp. 1109-1146.
- Lindley, D. V. (1957) "A Statistical Paradox," *Biometrika*, Vol. 44, No. 1-2, pp. 187-192.
- Ljungqvist, L. and Sargent, T. (2004) *Recursive Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Lubik, T. A. and Schorfheide, F. (2003) "Computing Sunspot Equilibria in Linear Rational Expectations Models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, No. 2, pp. 273-285.
- Lubik, T. A. and Schorfheide, F. (2004) "Testing for Indeterminacy: An Application to U.S. Monetary Policy," *American Economic Review*, Vol. 94, No. 1, pp. 190-217.
- Lucas, R. (2005) "Present at the Creation: Reflections on the 2004 Nobel Prize to Finn Kydland and Edward Prescott," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 8, No. 4, pp. 777-779.
- McCallum, B. (1983) "On Non-Uniqueness in Rational Expectations Models: An Attempt at Perspective," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 11, No. 2, pp. 139-168.
- McGrattan, E. (1994) "The Macroeconomic Effects of Distortionary Taxation," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 33, No. 3, pp. 573-601.
- Mendoza, E. (2010) "Sudden Stops, Financial Crises and Leverage," *American Economic Review*, forthcoming.
- Merz, M. (1995) "Search in the Labor Market and the Real Business Cycle," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 36, No. 2, pp. 269-300.
- Mortensen, D. and Pissarides, C. (1994) "Job Creation and Job Destruction in the Theory of Unemployment," *Review of Economic Studies*, Vol. 61, No. 3, pp. 397-415.
- Murchison, S. and Rennison, A. (2006) "ToTem: The Bank of Canada's New Quarterly Projection Model," *Technical Reports*, 97, Bank of Canada.
- Newton, M. A. and Raftery, A. E. (1994) "Approximate Bayesian Inference with the Weighted Likelihood Bootstrap," (with discussion) *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 56, No. 1, pp. 3-48.
- Pytlarczyk, E. (2007) *Construction and Bayesian Estimation of DSGE Models for the EURO Area — A*

- Statistical Framework*, Saarbrücken, Germany: VDM Verlag Dr. Müller.
- Ramsey, F. (1928) "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, Vol. 38, No. 152, pp. 543-559.
- Roberts, G. O., Gelman, A. and Gilks, W. (1997) "Weak Convergence and Optimal Scaling of Random Walk Metropolis Algorithms," *Annals of Applied Probability*, Vol. 7, No. 1, pp. 110-120.
- Roberts, G. O. and Rosenthal, J. S. (2007) "Coupling and Ergodicity of Adaptive Markov Chain Monte Carlo Algorithms," *Journal of Applied Probability*, Vol. 44, No. 2, pp. 458-475.
- Roberts, G. O. and Rosenthal, J. S. (2009) "Examples of Adaptive MCMC," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 18, No. 2, pp. 349-367.
- Roberts, J. (1995) "New Keynesian Economics and the Phillips Curve," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 27, No. 4, pp. 975-84.
- Rogerson, R. (1988) "Indivisible Labor, Lotteries and Equilibrium," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 21, No. 1, pp. 3-16.
- Rosenthal, J. S. (2010) "Optimal Proposal Distributions and Adaptive MCMC," in S. Brooks, A. Gelman, G. Jones and X.-L. Meng (eds.), *MCMC Handbook*, in press.
- Rotemberg, J. J. (1982) "Sticky Prices in the United States," *Journal of Political Economy*, Vol. 90, No. 6, pp. 1187-1211.
- Rotemberg, J. and Woodford, M. (1997) "An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy," in B. S. Bernanke and J. J. Rotemberg (eds.), *NBER Macroeconomics Annual 1997*, Cambridge, MA: MIT Press, pp. 297-346.
- Schmitt-Grohe, S. and Uribe, M. (2006) "Optimal Simple and Implementable Monetary and Fiscal Rules," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 54, No. 6, pp. 1702-1725.
- Schorfheide, F. (2000) "Loss Function-Based Evaluation of DSGE Models," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 15, No. 6, pp. 645-670.
- Shimer, R. (2005) "The Cyclical Behavior of Equilibrium Unemployment and Vacancies," *American Economic Review*, Vol. 95, No. 1, pp. 25-49.
- Sims, C. (1980) "Macroeconomics and Reality," *Econometrica*, Vol. 48, No. 1, pp. 1-48.
- Sims, C. (2002) "Solving Linear Rational Expectations Models," *Computational Economics*, Vol. 20, No. 1-2, pp. 1-20.
- Sims, C. (2003) "Comments on Smets and Wouters," available at <http://sims.princeton.edu/yftp/Ottawa/SWcommentSlides.pdf>
- Smets, F. and Wouters, R. (2003) "An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area," *Journal of the European Economic Association*, Vol. 1, No. 5, pp. 1123-1175.
- Smets, F. and Wouters, R. (2007) "Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach," *American Economic Review*, Vol. 97, No. 3, pp. 586-606.
- Solow, R. (1956) "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, No. 1, pp. 65-94.
- Stokey, N., Lucas, R. and Prescott, E. (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Oxford, MA: Harvard University Press.
- Sugo, T. and Ueda, K. (2008) "Estimating a Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for Japan," *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 22, No. 4, pp. 476-502.
- Svensson, L. (2003) "What Is Wrong with Taylor Rules? Using Judgment in Monetary Policy through Targeting Rules," *Journal of Economic Literature*, Vol. 41, No. 2, pp. 426-477.
- Swan, T. (1956) "Economic Growth and Capital Accumulation," *Economic Record*, Vol. 32, No. 2, pp. 334-361.
- Taylor, J. B. (1979) "Staggered Wage Setting in a Macro Model," *American Economic Review*, Vol. 69, No. 2, pp. 108-113.
- Taylor, J. B. (1980) "Aggregate Dynamics and Staggered Contracts," *Journal of Political Economy*, Vol. 88, No. 1, pp. 1-23.
- Taylor, J. B. (1993) "Discretion versus Policy Rules in Practice," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 39, No. 1, pp. 195-214.
- Taylor, J. B. and Uhlig, H. (1990) "Solving Non-linear Stochastic Growth Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-17.
- Uhlig, H. (1998) "A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily," in R. Marimon and A. Scott (eds.), *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 30-61.
- Walsh, C. (2003) *Monetary Theory and Policy*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Woodford, M. (2003) *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Yun, T. (1996) "Nominal Price Rigidity, Money Supply Endogeneity, and Business Cycles," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 37, No. 2-3, pp. 345-370.
- Zellner, A. (1971) *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, New York: John Wiley & Sons. (福井庸・大澤豊訳(1986)『ベイズ計量経済学入門』培風館.)