経済研究
Vol. 62, No. 3, July 2011

メガ企業の生産関数の形状

――分析手法と応用例――

渡辺努*・水野貴之・石川温・藤本祥二

本稿では生産関数の形状を選択する手法を提案する．世の中には数人の従業員で営まれる零細企業から数十万人の従業員を擁する超巨大企業まで様々な規模の企業が存在する．どの規模の企業が何社存在するかを表したものが企業の規模分布であり，企業の規模を示す変数である Y(生産)と K(資本)と L(労働)のそれぞれはベキ分布とよばれる分布に従うことが知られている．本稿では，企業規模の分布関数と生産関数という2つの関数の間に存在する関係に注目し，それを手がかりとして生産関数の形状を特定するという手法を提案する．具体的には，K と L についてデータから観察された分布の関数形をもとにして，仮に生産関数がある形状をとる場合に得られるであろう Y の分布関数を導出し，データから観察される Y の分布関数と比較する．日本を含む25カ国にこの手法を適用した結果，大半の国や産業において，Y, K, L の分布と整合的なのはコブダグラス型であることがわかった．また，Y の分布の裾を形成する企業，つまり巨大企業では，K や L の投入量が突出して大きいために Y も突出して大きい傾向がある．一方，全要素生産性が突出して高くそれが原因で Y が突出して大きいという傾向は認められない．
JEL Classification Codes: C16, C18, D20, E23

1. はじめに

企業の生産関数の形状としてはコブダグラス型やレオンチェフ型など様々な形状がこれまで提案されており，ミクロやマクロの研究者によって広く用いられている．例えば，マクロの生産性に関する研究では，コブダグラス生産関数が広く用いられており，そこから全要素生産性を推計することが行われている．しかし，生産 Y と資本 K と雇用 L の関係をコブダグラス型という特定の関数形で表現できるのはなぜか．どういう場合にそれが適切なのか．そうした点にまで踏み込んで検討する研究は限られている[1]．多くの実証研究では，いくつかの生産関数の形状を試してみて，回帰の当てはまりの良さを基準に選択するという便宜的な取り扱いがなされている．

本稿の目的は，データと整合的な生産関数の形状を特定する方法を提案することである．本稿が注目するのは，企業規模の分布関数と生産関数という2つの関数の形状の間に存在する関係である．生産関数に含まれる Y と K と L はいずれも企業規模を表す変数であり，ベキ分布とよばれる分布に従うことがこれまでの研究で知られている[2]．つまり，Y と K と L の分布関数の関数形はわかっている．小学6年生の身長の頻度分布を描くと正規分布という特定の関数形になることを我々は知っているが，これと同じように，Y と K と L それぞれの分布の関数形を我々は知っているのである．一方，次節以降で詳しく述べるように，規模分布の分布関数の関数形と生産関数の関数形は密接に関連している．例えば，K と L がベキ分布に従っているという事実から出発して，仮に生産関数がレオンチェフ型であったとすれば，Y の分布はどのようになるかを解析的に求めることができる．このようにして求めた結果と現実に観察される Y の分布が一致しているか否かをみることにより，レオンチェフ型の関数形が適切か否かをチェックできる．これが本稿の提案するアプローチである[3]．

本稿の構成は以下のとおりである．第2節では数値例を用いて本稿のアプローチを説明する．第3節では，Y と K と L がそれぞれベキ分布

表 1. 企業規模分布の例

	生産 Y	雇用 L	社数
普通サイズの企業	1 億円	1 人	99,990,000 社
巨大サイズの企業	100 億円	10,000 人	9,999 社
超巨大サイズの企業	10,000 億円	100,000,000 人	1 社

に従うとき，生産関数の形状がどのように決まるかを説明する．また，生産関数の範囲をCES 型に絞った上で，K と L がベキ分布に従うことを出発点として，CES 型に含まれる様々な関数形(レオンチェフ型やコブダグラス型など)を前提としたときに，Y の分布がどのようになるかを説明する．第 4 節では，本稿の手法を，日本をはじめとする各国のデータに適用し閾値を超える巨大企業の特徴をみる．特に，Y が突出して大きい企業についてその理由がどこにあるのか――K や L の投入量が突出して大きいために Y も突出して大きいのか，それとも K や L の投入量は普通の企業とさほど変わらないのに生産性が突出して高くそれが原因で Y が突出して高くなっているのか――を調べる．第 5 節は本稿の結論である．

2. 数値例

本稿のアイディアを説明するため表 1 に示した単純な例を考える．各企業の(真の)生産関数は $Y=L^{0.5}$ である．Y は生産，L は雇用である．経済には普通のサイズの企業，巨大企業，超巨大企業というサイズの異なる 3 種類の企業が存在する．普通企業では雇用者数は 1 人で 1 億円を生産する．一方，巨大企業の雇用者数は 1 万人で生産は 100 億円である．超巨大企業では雇用者数は 1 億人で，生産は 1 兆円である．どのサイズの企業も上記の生産関数を満たすように雇用者数と生産の数字を設定してある．

企業数については，普通企業の数は 99,990,000 社，巨大企業の数は 9,999 社，超巨大企業の数は 1 社とする．つまり，普通企業のサイズ以上の企業数は 1 億社，巨大企業のサイズ以上の企業数は 1 万社，超巨大企業のサイズ以上の企業数は 1 社であり，これが企業規模の分布である．

本稿の関心は生産関数の形状をいかにして特定するかであるが，その前により単純なケースとして次の状況を想定する．いま，ある研究者が，生産関数は $Y=L^a$ の形状をしていることを知っており，未知パラメター a を推計しようとしているとする．巨大企業と普通企業を比べると，雇用者数は 1 万倍なのに対して生産は 100 倍である．同様に，巨大企業と超巨大企業を比較すると，同じく，雇用者数が 1 万倍で生産が 100 倍である．これらの事実を使えば $a=0.5$ であることを研究者は容易に知ることができる．

これは生産関数の推計で広く用いられている手法に他ならない．この方法の特徴は，普通企業，巨大企業，超巨大企業の社数の情報を一切用いていないということである．つまり，この研究者は企業の規模分布を一切無視している．では，社数の情報を用いて a を推計する方法とはどのようなものだろうか．

まず，社数と L の関係，社数と Y が，それぞれどのように関係しているかを考える．雇用については，普通企業では $L=1$，巨大企業では $L=10000$ だから L は 10^4 倍である．同様に，普通企業と超巨大企業を比較すると 10^8 倍である．一方，企業の登場頻度は，普通企業以上のサイズで 1 億社，巨大企業以上のサイズで 1 万社だから $1/10^4$ である．普通企業と超巨大企業で比べると登場頻度は $1/10^8$ である．つまり，雇用規模が x 倍になるとそういう企業の登場頻度は $1/x$ になる．生産について同様の計算を行うと生産規模が x 倍になるとそういう企業の登場頻度は $1/x^2$ 倍になることがわかる．言い換えると，生産規模が $x^{0.5}$ 倍になると企業の登場頻度は $1/x$ 倍になる．L については「x 倍になると頻度が $1/x$ になる」という規則性があり，Y については「$x^{0.5}$ 倍になると頻度が $1/x$ になる」という規則性があるということは，$a=0.5$ であることを示している．

社数を利用して a を求める方法をもう少し一般化すると以下のようになる．表 1 では規模変数である L と Y が 3 つの値しかとらないと想定したが，L と Y が連続的な値をとる場合を考える．L がある値 l 以上になる確率が

$$P(L \geq l) = l^{-\mu_L} \tag{1}$$

で決まっているとする．表1で示したのはパラメター μ_L が1のケースである．この場合には，$P(L \geq 10^8) = 1/10^8$ であり，1億人以上を雇用する超巨大企業は全体の1億分の1，つまり1社である．同様に，$P(L \geq 10^4) = 1/10^4$ だから，1万人以上を雇用する巨大企業は全体の1万分の1である．表1で示したのはこれらの数字である．これと同様に，Y についても Y がある値 y 以上になる確率が

$$P(Y \geq y) = y^{-\mu_Y} \tag{2}$$

で与えられているとする．表1に示したのはパラメター μ_Y が2のケースである．(1)式と(2)式は，ベキ分布の累積分布関数の関数形であり，L と Y がそれぞれベキ分布に従うことを意味している．(1)式と(2)式にあるパラメター μ_L と μ_Y はベキ分布を特徴づけるパラメターであり，ベキ指数とよばれている．

生産関数が $Y = L^a$ で与えられていること，そして L と Y がベキ分布に従うことを研究者が知っており，そのベキ指数 μ_L, μ_Y もデータから観察されているという想定の下では，次のようにして a の値を推計できる．(2)式に $Y = L^a$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(Y \geq y) &= P(L^a \geq y) = P(L \geq y^{1/a}) \\ &= y^{-\mu_L/a} \end{aligned} \tag{3}$$

となる．最後の等式は(1)式から得られる．(3)式と(2)式を比較すると $-\mu_Y = -\mu_L/a$ が得られる．したがって a の推計値は

$$a = \frac{\mu_L}{\mu_Y} \tag{4}$$

となる．

本稿の方法は規模の異なる企業の登場頻度を考慮に入れているという点で通常の方法と異なるが，単に a の値を知るためだけであれば，通常の方法の方がはるかに簡単である．しかし我々の方法は，生産関数の関数形がわからない場合に威力を発揮する．この点についてみるために，生産関数の一般形を $Y = F(L)$ と表記する．研究者は $F(L)$ の形状を推定したいと考えている．

(2)式に $Y = F(L)$ を代入すると次式を得る．

$$\begin{aligned} P(Y \geq y) &= P[F(L) \geq y] \\ &= P[L \geq F^{-1}(y)] \\ &= [F^{-1}(y)]^{-\mu_L} \end{aligned} \tag{5}$$

二番目の等式では $F(\cdot)$ が単調増加という性質を用いている．最後の等式は(1)式から得られる．$P(Y \geq y) = y^{-\mu_Y}$ であるから，(5)式より

$$F^{-1}(y) = y^{\mu_Y/\mu_L}$$

が成立することがわかる．したがって生産関数は

$$Y = F(L) = L^{\mu_L/\mu_Y} \tag{6}$$

となる．つまり，Y と L がベキ分布に従い，そのベキ指数が μ_Y と μ_L であるということを知るだけで研究者は生産関数の関数形とパラメターを全て推計できる．

3. 生産関数の形状と企業規模分布の関係

前節の数値例では投入要素が L のみという単純なケースを扱った．しかし生産性の計測などで広く用いられているのは L と K の2つの投入要素がある場合である．本節では2つの投入要素がある場合について，Y, L, K のそれぞれがベキ分布に従っており，そのベキ指数もわかっているという状況で生産関数の形状をいかにして特定するかという問題を考える．3.1節では Y, L, K が全領域でベキ分布に従う場合について，また3.2節では閾値を超える領域でのみベキ分布に従う場合について検討する．

3.1 全領域でベキ分布に従う場合

生産関数を

$$Y = F(K, L) \tag{7}$$

と書くことにし，K と L は互いに独立な確率変数で，ベキ分布に従うとする．K と L のベキ指数はそれぞれ μ_K, μ_L である．生産関数は一次同次と仮定し，関数 $f(\cdot)$ を

$$\frac{Y}{K} = F\left(1, \frac{L}{K}\right) \equiv f\left(\frac{L}{K}\right) \tag{8}$$

と定義する．

この設定の下で累積確率 $P(Y \geq y)$ を計算すると以下のようになる．

$P(Y \geq y)$

$$= \int_0^{\infty}\left[\int_{kf^{-1}\left(\frac{y}{k}\right)}^{\infty} P(K=k, L=l)\,dl\right]dk$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\int_{kf^{-1}\left(\frac{y}{k}\right)}^{\infty} P(L=l)\,dl\right]P(K=k)\,dk$$

$$= \int_0^{\infty}\mu_K\left[kf^{-1}\left(\frac{y}{k}\right)\right]^{-\mu_L}k^{-(\mu_K+1)}dk$$

$$= \int_0^{\infty}\mu_K\left[f^{-1}\left(\frac{y}{k}\right)\right]^{-\mu_L}k^{-(\mu_L+\mu_K+1)}dk \qquad (9)$$

ここで，2番目の等号はKとLが独立という仮定を用いており，3番目の等号はベキ分布のCDFとPDFを用いている[4]．

研究者はKとLに加えてYもベキ分布に従う(ベキ指数はμ_Y)という事実を知っている．したがって，

$$y^{-\mu_Y} = \int_0^{\infty}\mu_K\left[f^{-1}\left(\frac{y}{k}\right)\right]^{-\mu_L}k^{-(\mu_L+\mu_K+1)}dk \qquad (10)$$

が成立する．ここで(10)式のyに関する項をみると，左辺ではyは$y^{-\mu_Y}$として登場する一方，右辺ではyは$\left[f^{-1}\left(\frac{y}{k}\right)\right]^{-\mu_L}$として登場している．左辺と右辺の$y$の項が整合的なのは$f^{-1}(\cdot)$の関数形が$f^{-1}(x)=x^{\frac{\mu_Y}{\mu_L}}$の場合だけである．したがって

$$f\left(\frac{L}{K}\right) = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{\mu_L}{\mu_Y}}$$

であり，

$$F(K,L) = K^{1-\frac{\mu_L}{\mu_Y}}L^{\frac{\mu_L}{\mu_Y}} \qquad (11)$$

であることがわかる．これはコブダグラス関数に他ならない．

$F(K,L)$が(11)式のコブダグラス関数で与えられるとして，(10)式の右辺を計算すると

$$y^{-\mu_Y}\mu_K\int_0^{\infty}k^{\mu_Y-(\mu_L+\mu_K+1)}dk \qquad (12)$$

である．この積分が有限の値をとるのは$\mu_Y-(\mu_L+\mu_K+1)<-1$のときである[5]．つまり，

$$\mu_Y < \mu_L+\mu_K \qquad (13)$$

であり，μ_Y, μ_K, μ_Lが(13)式の条件を満たすとき(10)式の積分は有限であり，そのときの生産関数は(11)式のコブダグラス型である．

以上の議論は(7)式の生産関数の両辺を(8)式のようにKで割ることによって$f(\cdot)$を定義することから出発した．しかし，KとLは対称だから，(7)式の両辺をKではなくLで割り，上記の計算を繰り返すことができる．その結果，(11)式に対応する関数として

$$F(K,L) = K^{\frac{\mu_K}{\mu_Y}}L^{1-\frac{\mu_K}{\mu_Y}} \qquad (14)$$

が得られる．

(11)式にはμ_Kが登場していない．これはYの分布がKの分布に由来するものでないことを意味している．Yの分布はもっぱらLの分布によって決まっている．一方，(14)式にはμ_Lが登場していない．Yの分布はLの分布に由来しておらず，もっぱらKの分布によって決まっていることを意味している．

以上の結果は，Y, K, Lがそれぞれベキ分布に従うという設定の下で，関数Fの形状は一意にコブダグラス型と定まるが，KとLの肩にのるパラメター値は，Yの分布がLで作られているとみるか，それともKで作られているとみるかによって異なり，一意に決まらないことを示している．

3.2 閾値を超える領域でのみベキ分布に従う場合

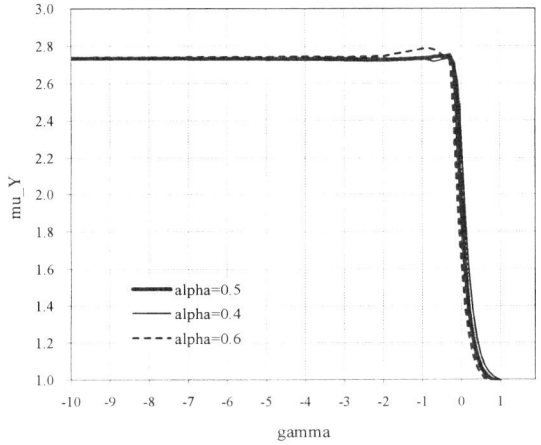
ここまでのところでは，Y, K, Lの規模変数は全ての領域でベキ分布に従うと仮定した．しかし多くの実証研究から明らかなように，規模変数がベキ分布に従うのは全領域ではなく，閾値を超える領域だけであり，規模変数が閾値より小さい値をとるときにはベキ分布から乖離する．以下では，規模変数が閾値を超える領域でのみベキ分布に従うという設定の下で生産関数の形状を特定する手法について考える．

本節で想定する状況は以下のとおりである．研究者は生産関数がCES型であることを知っているが代替の弾力性の値は知らない．つまり，生産関数が

$$Y = A[\alpha(b_K K)^{\gamma}+(1-\alpha)(b_L L)^{\gamma}]^{1/\gamma} \qquad (15)$$

という形状をしていることは知っているが，肝心のパラメターであるγの値を知らない．CESはγの値によって様々な生産関数になる．例

図1．代替の弾力性と Y のベキ指数の関係



えば，$\gamma=1$ であれば(15)式は

$$Y = A[\alpha b_K K + (1-\alpha) b_L L] \quad (16)$$

となる．これは線形の生産関数である．その反対に $\gamma=-\infty$ であれば(15)式は

$$Y = A \min\{b_K K, b_L L\} \quad (17)$$

となる．これはレオンチェフ生産関数である．さらに，γ がゼロに近づくときには(15)式は

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha} \quad (18)$$

に収束する．これはコブダグラス生産関数である．この3つの例から明らかなように，パラメター γ の値を知ることが即ち生産関数の形状を知ることである．

図1は γ と μ_Y の対応関係を示したものである．ここでは，K と L の分布は

$$P(K \geq k) = k^{-1}\ ;\ P(L \geq l) = l^{-1.8} \quad (19)$$

で与えられているとする．また，K と L の間に相関はないと仮定する[6]．さらに，(15)式に含まれるパラメターのうち γ 以外のパラメターについては

$$\alpha = 0.5\ ;\ b_K = b_L = 1\ ;\ A = 1 \quad (20)$$

とする．図1の横軸は γ であり，縦軸はそれぞれの γ の値の下での Y のベキ指数 μ_Y である．具体的には，確率変数 K と L の値を(19)式に従って10万個生成し，それを(15)式に代入して Y の値を計算する．このようにして作成された Y は全領域でベキ分布に従うわけではない．Y がベキ分布に従うのは分布の裾だけである[7]．ここでは Y の分布の裾を上位0.01%点から0.10%点と定義し，その区間の傾きから μ_Y の値を計測する．

図1の太実線がこの設定の下で得られた γ と μ_Y の関係を示している．この図からわかるように，シミュレーションで得られた μ_Y の値は γ の値に応じて大きく変化している．γ が負の大きな値をとるとき(レオンチェフ型の場合)には μ_Y の値は2.8に近い大きな値をとっている．μ_Y の値が大きいということはシミュレーションで得られた Y の分布の裾が短いということであり，Y の企業間格差が小さいことを意味する[8]．γ の値が大きくなるにつれて μ_Y の値は単調に低下し，$\gamma=1$ のとき(完全代替のケース)には μ_Y の値は1にまで低下する．つまり，Y の分布の裾が長くなり，企業間格差が拡大する．

図1は特定の設定の下でのシミュレーション結果であるが，同様のことは解析的に示すことができる．まず，$\gamma=-\infty$ で生産関数が(17)式のときには μ_Y の値は次の式で決まる．

$$\mu_Y = \mu_K + \mu_L \quad (21)$$

n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ があって，それぞれがベキ分布に従い，それぞれのベキ指数が $\mu_{X_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ で与えられるとき，$\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ はベキ指数に従い，そのベキ指数は $\mu_{X_1}+\mu_{X_2}+\cdots+\mu_{X_n}$ となることが知られている(詳しくは Jessen and Mikosch(2006)を参照)．(21)式はこの性質を利用することにより得られる．実際，図1に示したケースでみると，図1では $\mu_K=1, \mu_L=1.8$ と設定したので((19)式を参照)，γ が負の大きな値のときには，1と1.8の和である2.8に近くなっていることが確認できる．

また，$\gamma=1$ で生産関数が(16)式で与えられるとき(線形の場合)には μ_Y の値は次の式で決まる．

$$\mu_Y = \min\{\mu_K, \mu_L\} \quad (22)$$

これは，ベキ分布に従う n 個の独立な確率変数の和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ はベキ分布に従い，そのベキ指数は $\min\{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \cdots, \mu_{X_n}\}$ になるという性質[9]を利用することにより得られる．図1の設定では $\mu_K=1, \mu_L=1.8$ であるから，μ_Y は小さい方の $\mu_K=1$ に一致するはずである．実

際，図1をみると，$\gamma=1$ に対応する μ_Y の値は1に近い．

さらに，γ がゼロに近く，生産関数が(18)式で与えられるとき(コブダグラス型の場合)には，μ_Y の値は次の式で決まる．

$$\mu_Y = \min\left\{\frac{\mu_K}{\alpha}, \frac{\mu_L}{1-\alpha}\right\} \tag{23}$$

確率変数 X がベキ分布に従いそのベキ指数が μ_X のとき，X のベキ乗 (X^m) もベキ分布に従い，そのベキ指数は μ_X/m になるという性質[10]と，ベキ分布に従う n 個の独立な確率変数の積 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ はベキ分布に従い，そのベキ指数は $\min\{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \cdots, \mu_{X_n}\}$ になるという性質[11]を組み合わせることにより(23)式を導出できる．図1の設定では $\mu_K/\alpha=2.0, \mu_L/(1-\alpha)=3.6$ だから，μ_Y はそのうちの小さい方の2.0となるはずである．図1の $\gamma=0$ に対応する点をみると μ_Y の値は2に近いことが確認できる．

(21)式，(22)式，(23)式の右辺をみると，そこに登場しているのは，μ_K, μ_L という2つのベキ指数と α だけであり，その他のパラメターである b_k, b_L, A は登場していない．その理由を，まず b_k についてみると，(15)式の b_kK はベキ分布に従い，そのベキ指数は μ_k である．これは，ベキ分布に従う確率変数 X に定数 m をかけた mX はベキ分布に従いそのベキ指数は X のベキ指数と同じという性質[12]から説明できる．つまり，ベキ分布に従う変数に定数をかけるという線形の変換は分布の裾の傾き(つまりベキ指数)に影響を与えない．K と b_kK の分布の裾が同じである以上，b_K の値が(15)式の左辺の Y の分布の裾に影響を及ぼすことはない．このため(21)，(22)，(23)の右辺に b_K が登場しない．b_L についても事情は同じで，b_L の値が Y の分布の裾に影響を及ぼすことはない．最後に，A についてみると，(15)式にある $[\alpha(b_KK)^\gamma+(1-\alpha)(b_LL)^\gamma]^{1/\gamma}$ はベキ分布に従う確率変数であり，A はその確率変数を線形変換しているに過ぎないので，A の値が(15)式の右辺の Y の分布の裾に影響を及ぼすことはない．

b_k, b_L, A が Y のベキ指数に影響を与えないとすると，残るパラメターは α である．つまり，μ_K と μ_L の値がデータから観測されたとき，α と生産関数の形状を表すパラメターである γ について，それぞれひとつの値を選ぶと，μ_Y の値がひとつ計算される．これをデータから観察された μ_Y の値と比較することにより，適切な γ と α のペアを探索することができる．

図1の細実線と破線は α を変化させたときに γ と μ_Y の関係がどのように変化するかを示している．細実線は $\alpha=0.4$，破線は $\alpha=0.6$ である．図からわかるように γ が小さいときには(負で絶対値が大きいときには)3本の線は重なっており，γ と μ_Y の関係が α の値に依存しないことを示している．これは，(21)式でみたように，レオンチェフ型 ($\gamma=-\infty$) のときに μ_Y の値が α に依存しないことに対応している．したがって，γ の真の値が負で絶対値が大きい場合は，研究者は，データから計測された μ_K, μ_L, μ_Y の値から γ の値を一意に特定できる．この意味で，μ_K, μ_L, μ_Y の値から生産関数の形状を推定できる．

これに対して，γ の値が0の近傍にあるときには3本の線が重なっておらず，γ と μ_Y の関係が α の値に依存することを示している．したがって，γ の真の値がゼロに近い場合には，研究者は，データから計測された μ_K, μ_L, μ_Y の値から，γ の値を一意に定めることはできない．ただしその場合でも，例えば γ の真の値がゼロ(コブダグラス型)であれば，μ_Y, μ_K, μ_L の間には(23)式の関係が存在する．これは規模変数の分布の裾に由来する関係式であり，分布の裾に関する情報を無視する通常の回帰分析では得られないものである．この関係式が実際に満たされるかどうかを調べることにより，コブダグラス型が正しい選択であったか否かを確かめることができる．

本稿の議論が Houthakker (1955) や Jones (2005) とどのように関連しているかを整理しておこう．Houthakker (1955) らの目的はコブダグラス関数にミクロ的基礎を与えることである．Jones (2005) をもとに，彼らの議論を整理すると，個々の企業の生産関数は(17)式で示したレ

オンチェフ型であるという仮定からスタートする．その上で，b_K と b_L はそれぞれ独立なベキ分布に従うと仮定する．一方，(17)式の K と L は，彼らの設定では，確率変数ではなくパラメターである．これらの仮定の下で，$\min\{b_K K, b_L L\}$ はベキ分布に従い，そのベキ指数は b_K のベキ指数と b_L のベキ指数の和になる[13]．具体的には，この設定の下では，生産 Y の CDF は

$$\begin{aligned} P(Y \geq y) &= P(b_K K \geq y, b_L L \geq y) \\ &= P(b_K K \geq y) P(b_L L \geq y) \\ &= P\left(b_K \geq \frac{y}{K}\right) P\left(b_L \geq \frac{y}{L}\right) \\ &= \left(\frac{y}{K}\right)^{-\mu_{b_K}} \left(\frac{y}{L}\right)^{-\mu_{b_L}} \\ &= K^{\mu_{b_K}} L^{\mu_{b_L}} y^{-(\mu_{b_K}+\mu_{b_L})} \end{aligned} \tag{24}$$

となる．ここで μ_{b_K} と μ_{b_L} は確率変数 b_K と b_L のベキ指数である．いま企業は技術(b_K と b_L のペア)を N 組もっているとし，それらの技術は b_K と b_L のベキ分布からランダムに抽出されたものであるとする．さらに企業は，K と L が与えられたとき，Y を最大にするように，N 組の技術の中から最適なものを選択するという行動をとるとする．このようにして決まる生産 $\tilde{Y}$ は次式を満たす．

$$\begin{aligned} &P\left[\frac{\tilde{Y}}{(NK^{\mu_{b_K}} L^{\mu_{b_L}})^{1/(\mu_{b_K}+\mu_{b_L})}} \leq \tilde{y}\right] \\ &\quad = \left(1 - \frac{\tilde{y}^{-(\mu_{b_K}+\mu_{b_L})}}{N}\right)^N \end{aligned} \tag{25}$$

この式の右辺は N が大きいときにはフレシェ分布に従うことがわかる．したがって，$\tilde{Y}$ は $(NK^{\mu_{b_K}} L^{\mu_{b_L}})^{1/(\mu_{b_K}+\mu_{b_L})}$ にフレシェ分布に従う確率変数を乗じたものに等しい．(25)式の $K^{\mu_{b_K}} L^{\mu_{b_L}}$ はコブダグラスの形をしており，これがコブダグラス生産関数の基礎づけと主張されている．

Houthakker(1955)や Jones(2005)の発想は，ベキ分布の密度関数がベキ乗の形をしていることを利用することにより，同じくベキ乗の形をしているコブダグラス関数を導出するという点にある．変数の分布関数の形状と生産関数の形状の関係を論じるという点では本稿の発想と共通している．しかし，Houthakker(1955)と Jones(2005)は，b_K や b_L で表される技術がベキ分布するという点を強調する一方，K や L がベキ分布するという事実については注意を払っていない．本稿では，Y のベキ分布は K や L のベキ分布から来ていると考えており，その関係を表すものとして生産関数を捉えている．この点で本稿のアプローチは Houthakker (1955)や Jones (2005)と大きく異なっている．

4. 応用例

本節では日本を含む25カ国について，各企業の売上(Y)，雇用者(L)，有形固定資産(K)のデータを用いて生産関数を推計する．使用するデータは Bureau van Dijk 社によって提供されているものである．

4.1 Y, K, L のベキ指数の計測

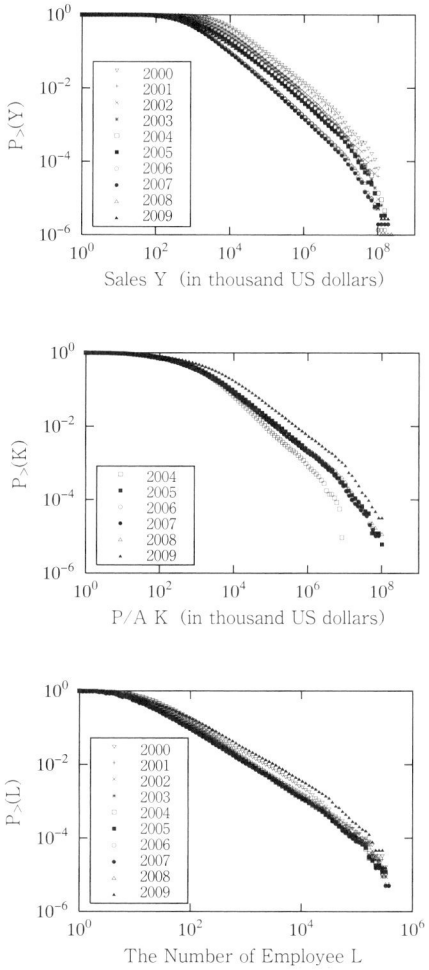
まず日本の企業について Y, K, L のベキ指数の推計を行う．売上 Y がベキ分布に従い，ベキ指数が μ_Y のとき Y の累積分布関数は $P(Y \geq y) = y^{-\mu_Y}$ である．したがって

$$\log P(Y \geq y) = -\mu_Y \log y \tag{26}$$

が成立する．つまり，累積確率 $P(Y \geq y)$ の対数値と y の対数値の間には線形の関係があり，その傾きが $-\mu_Y$ である．図2の上段の図では，売上 y の対数値を横軸に，累積確率 $P(Y \geq y)$ の対数値を縦軸にとってある．図からわかるように，売上の値が 10^3 より小さいところでは直線ではないが，それより大きいところでは右下がりの直線になっている．つまり，ある閾値を超えるところでは(26)式が示す関係が観察されており，ベキ分布に従っていることを示唆している．図2の中段の図は K について，また下段の図は L について同様の図を描いている．どちらも閾値を超えると直線になっており，ベキ分布である可能性を示唆している．

ベキ分布に関する多くの実証研究では図2のような累積密度を描き，それが直線になっているかを目で確認し，その上である種の回帰分析によりベキ指数を推計するという手順をとってきた．しかし，この手順には，直線かどうかの

図2. 売上，有形固定資産，雇用者数のCDF(日本，2000-2009年)



判断が容易ではないという問題があった．とりわけ，直線の領域に入る閾値がいくつなのかを知るのが難しい．Malevergne *et al.*(2009)はDel Castillo and Puig(1999)の結果を応用して，閾値を求める方法を提案している．彼らの方法では，閾値より小さいときには対数正規分布に従い，閾値を上回るときにベキ分布に従うと考え，仮説検定を行う．具体的には，値の大きい方からn個のデータを取り出し，その分布がベキ分布に従うか(帰無仮説)，それとも下側切断対数正規分布に従うか(対立仮説)という検定を行う．値の大きい方から順にこの検定を行い，帰無仮説が棄却できない範囲はベキ分布，帰無仮説が初めて棄却された点を閾値とする．

本稿ではMalevergne *et al.*(2009)の方法に改良を加えた上で閾値を求め，ベキ指数の推定を行った[14]．Malevergne *et al.*(2009)の方法を実際にデータに適用する際の問題点は，観測値の数が有限であるという点であり，そのため，分布の右端では分布が直線に乗らない(これを有限サイズ効果という)．Malevergne *et al.*(2009)の方法はこのような有限サイズ効果を勘案していないので閾値の誤判定がしばしば起きる．これを回避するために，本稿では，観測値を間引くことにより有限サイズ効果を抑えるという工夫を施す．その上で，ベキ分布に従う範囲(上限値と下限値)を特定し，その範囲の観測値に対してOLSでフィットしてベキ指数を求める．

図3では，このようにして計算されたベキ指数を2004年から2009年の6年分について示してある．まずμ_Yについてみると，2004年は1.06と1をやや上回る水準であった．Yの推計誤差(図には示していない)は0.01だから，2004年のμ_Yは1を有意に上回っているといえる．その後μ_Yは，0.93(2005年)→0.93(2006年)→0.92(2007年)→0.90(2008年)→0.94(2009年)と0.92の前後で安定的に推移している(ただし各年の指数の差は推計誤差を上回っており統計的に有意である)．次に，μ_Kについてみると，1.00(2004年)→0.80(2005年)→0.80(2006年)→0.80(2007年)→0.80(2008年)→0.75(2009年)となっており，μ_Yと同様に2004年の値が大きめになっているものの，その他の年は0.80の近傍で安定している．最後にμ_Lについてみると，1.13(2004年)→0.99(2005年)→0.98(2006年)→0.98(2007年)→0.97(2008年)→0.94(2009年)となっており，ここでもやはり2004年の値が高めであることを除けば安定的に推移している．

図3の結果はY, K, Lのそれぞれのベキ指数が各年で安定していることを示しており，本稿で採用した推計方法が適切に機能していることを示唆している．より重要な点は，μ_Y, μ_K, μ_Lの相対的な大きさである．前節でみたように，3つのベキ指数の大小関係は，生産関数の形状を決める際に重要な役割を果たす．3つの中で最

図3. 諸変数のベキ指数(日本, 2004-2009年)

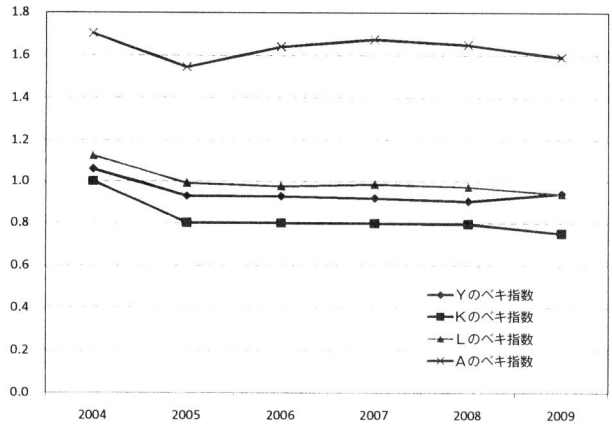
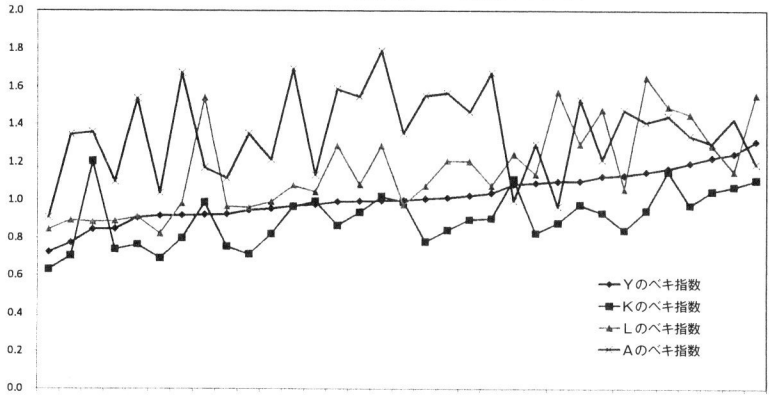


図4. 各国における諸変数のベキ指数(2007年)



注) JP日本, FRフランス, ESスペイン, CAカナダ, ITイタリア, RUロシア, GBイギリス, PTポルトガル, KR韓国, CN中国, UAウクライナ, NOノルウェー, DEドイツ, SEスウェーデン, BEベルギー, FIフィンランド, CZチェコ, PLポーランド, BGブルガリア, EEエストニア, ATオーストリア, LVラトビア, DKデンマーク, HUハンガリー, HRクロアチア, GRギリシャ, NLオランダ, IEアイルランド, SKスロバキア, SIスロベニア, RSセルビア.

しかし今度はLのときとは逆に，Kの裾は長すぎるという問題がある．Kの裾を「調整」する可能性としては，(23)式に示したコブダグラス関数のケースのように，μ_Kではなくμ_K/αがμ_Yと一致するということが考えられる．このように考えると，(27)式の不等式は生産関数が$\gamma=0$(コブダグラス関数)の近傍の形状をしていることを示唆している．

図4では日本を含む25カ国について同様の計測を行った結果を示している．ここではμ_Yの低い順にアイルランドを先頭に国を並べている．Yのベキ指数，Kのベキ指数，Lのベキ指数を比べると，国によって多少の変動はあるものの，各国に共通する特徴として(27)式が成立していることがわかる．なお，ここでは代表的な年として2007年を選んであるが同様の傾向は他の年についても確認できる．

も値が小さいのはμ_Kであり，企業間でKの格差が非常に大きいことを示している．次に小さいのはμ_Yであり，3つの中で最も大きいのはμ_Lである．つまり，

$$\mu_K < \mu_Y < \mu_L \tag{27}$$

という関係にある．このことから，Yの分布の裾がLの分布の裾から来ている可能性を排除できる．μ_Lが大きいということはLの分布の裾が短いということを意味しており，その短い裾が相対的に長いYの裾を作り出すことはあり得ないからである．そうなると，Yの裾を作る可能性があるのはKの裾である．μ_Kはμ_Yより小さいのだから，Kの裾はYの裾より長く，Yの裾を作り出す可能性は十分にある．

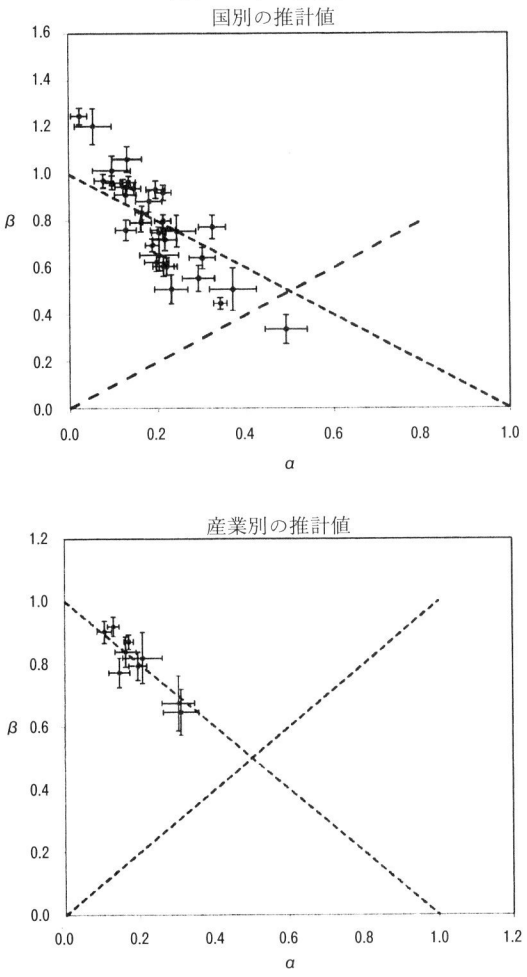
4.2 コブダグラス生産関数の推計

図3と図4に示した結果は生産関数の形状として$\gamma=0$(コブダグラス関数)あるいはその近傍が適切であることを示唆している．そこで以下では，次のステップで分析を進める．まず，コブダグラス関数$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$を仮定して，データからαとβを推計する(前節では説明の便宜上，一次同次($\alpha+\beta=1$)を仮定したがここでは制約を緩めている)．それらの推計値は最終的に

$$\mu_Y = \min\left\{\frac{\mu_K}{\alpha}, \frac{\mu_L}{\beta}\right\} \tag{28}$$

を満たす必要がある．そこで，実際に(28)式が満たされているか否かをみることにより，コブ

図5. αとβの推計値



ダグラス関数という形状を仮定することが妥当であったかどうかをチェックする．

第3節ではKとLに相関がないものとして議論を進めてきたが両者は相関している可能性が高い．実際，データをみると，KとLには強い相関が存在する．そこでコブダグラス関数の推計を始める前にKとLの2変数を相関のない2変数に変換する作業を行う．具体的には(K, L)を以下のように定義される(Z_1, Z_2)に変換する．

$$Z_1 \equiv L^{\frac{1}{\sigma_L}} K^{\frac{1}{\sigma_K}} ; \quad Z_2 \equiv L^{\frac{1}{\sigma_L}} K^{-\frac{1}{\sigma_K}}$$

ここでσ_Kとσ_Lはそれぞれ$\log K$と$\log L$の標準偏差である．容易に確認できるように，このようにして定義されたZ_1とZ_2は無相関である．さらにZ_1とZ_2を使って$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$を書き換えると

$$Y = AZ_1^{\theta_1} Z_2^{\theta_2} \tag{29}$$

となる．ただしθ_1とθ_2は以下のように定義されるパラメターである．

$$\theta_1 \equiv \frac{\alpha\sigma_K + \beta\sigma_L}{2} ; \quad \theta_2 \equiv \frac{\alpha\sigma_K - \beta\sigma_L}{2}$$

この変数変換の下で(28)式は

$$\mu_Y = \min\left\{\frac{\mu_{Z_1}}{\theta_1}, \frac{\mu_{Z_2}}{\theta_2}\right\} \tag{30}$$

となる．ここでμ_{Z_1}とμ_{Z_2}はそれぞれZ_1とZ_2のベキ指数である．Y, K, Lがコブダグラス型の生産関数に従って生成されているとすれば，(30)式が満たされるはずであり，これが最終的なチェック式である．

(29)式を推計する際には，ベキ分布する範囲の観測値を用い，そこから得られたθ_1とθ_2の値をもとに，αとβの値を算出した[15]．日本のαの推計値は2007年で0.13であり，βの推計値は0.91である．βの値が大きく，また2つの和は1をやや上回っている．図5の上段の図では，日本を含む各国について，そのようにして得られたαとβの推計値を示している．βがαより大きいという点は各国で共通している．しかし，αとβの和については，国によって区々であり，1を下回る国も少なくない．図5の下段の図では，2004年の日本について産業別の推計結果を示している．ここでもβがαより大きいことが確認できる一方，αとβの和はほぼ1に等しい．

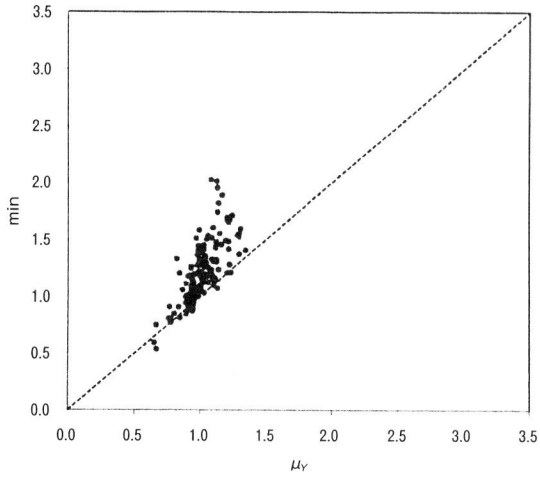
(30)式の右辺と左辺を日本の各年について比較すると以下のとおりである．

	$\min\left\{\frac{\mu_{Z_1}}{\theta_1}, \frac{\mu_{Z_2}}{\theta_2}\right\}$	μ_Yの実績値
2004年	1.25	1.06
2005年	0.97	0.93
2006年	0.96	0.93
2007年	0.96	0.92
2008年	0.93	0.90
2009年	0.88	0.94

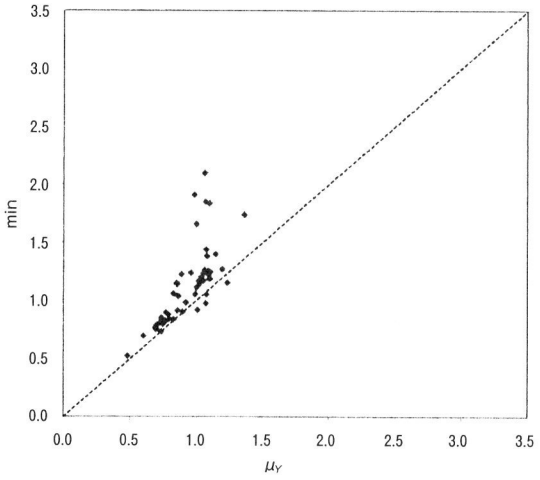
2004年については理論からの予測値に比べ実績値が低いもののそれ以外の年では両者がほぼ一致していることがわかる．代替の弾力性γ

図6. Yのベキ指数の予測精度

(a)25カ国×6年分



(b)7業種×6年分



注) 各図の横軸はYのベキ指数の実績値を，縦軸は$\min\left\{\frac{\mu_{Z_1}}{\theta_1}, \frac{\mu_{Z_2}}{\theta_2}\right\}$で定義される$Y$のベキ指数の理論値を表す．

の値が0近傍にあり，コブダグラス型が適合していることを示している．

次に，図6(a)では日本を含む25カ国の6年分の推計結果を用いて，(30)式が成立するか否かを調べている．25カ国の6年分の推計結果を用いて，(30)式の右辺を計算し，それを縦軸にとり，横軸には各国の各年のYの分布から直接計測したμ_Yの値をとっている．45度線の近辺に多くの点が集中しているものの，45度線を大きく上に越える((30)式の右辺が左辺より大きい)点も少なくない．45度線を大きく上に越える点の多くはポーランド，ベルギー，セルビアの3カ国のものであり，これら3カ国ではコブダグラス型が不適切であることを示している．

図6(b)では日本のデータを7業種に分類し，業種別に6年分の生産関数を推計した結果を示している．ここでも多くの点が45度線近辺に集まっているが45度線を大きく越える点がいくつかある．大きく乖離しているのは個人向けサービスに関連する業種であり，これらの業種ではコブダグラス型が不適切であることを示している．

4.3 全要素生産性の推計

4.3.1 全要素生産性の分布

ここまでの議論では(29)式にあるAはパラメターとして扱ってきた．しかしAは企業間で異なる値をとり得る．その意味でAは確率変数であり，しかもKやL(あるいはZ_1やZ_2)とは無相関である．

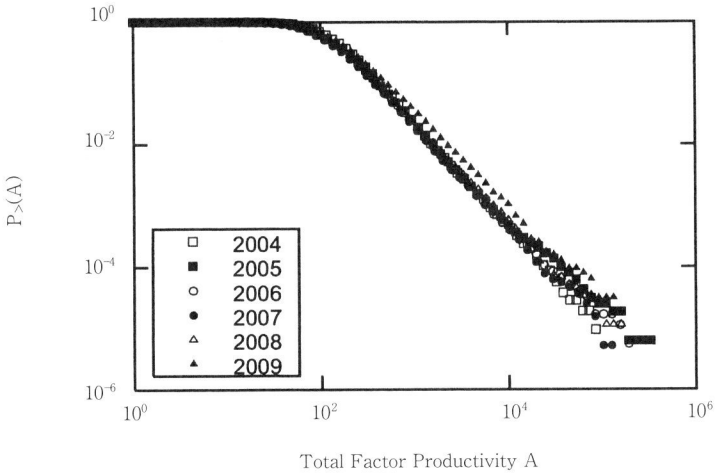
仮に確率変数Aがベキ分布に従うとすれば，μ_Yの決定式は(30)ではなく

$$\mu_Y = \min\left\{\mu_A, \frac{\mu_{Z_1}}{\theta_1}, \frac{\mu_{Z_2}}{\theta_2}\right\} \tag{31}$$

となる．ここでμ_AはAのベキ指数である．この式が意味するのは，Aの裾が非常に長い場合には(つまり全要素生産性の企業間格差が非常に大きい場合には)，μ_Aが最小になり，μ_Aがμ_Yの決定因になることがあり得るということである．つまり，Yが突出して大きい企業があったとして，その原因が，KやLの投入量が突出して大きいためではなく，Aが突出して大きいためということがあり得る．もしそうであれば，(30)式の右辺にある$\min\left\{\frac{\mu_{Z_1}}{\theta_1}, \frac{\mu_{Z_2}}{\theta_2}\right\}$は$Y$の分布から直接計測される$\mu_Y$よりも大きくなるはずである．図5で45度線を大きく越える点が観測されたのはこのためかもしれない．

この点について詳しくみるために，Yの実績値をYの推計値で割ることにより各企業のAを計測し，図7でその累積分布を示している．この図の横軸はAの対数値，縦軸は累積

図7. 全要素生産性のCDF(日本, 2004-2009年)



確率の対数値であり，図2と同じく，Aがベキ分布に従っていれば右下がりの直線が観察されるはずである．図7からわかるように，各年におけるAの分布は閾値を超えると直線になっており，ベキ分布の可能性を示唆している．

この結果を踏まえて，4.1節で行ったのと同じ手順でμ_Aの推計を行った．日本の結果は図3の×印の線で示してある．μ_Aの値は1.7の近辺で安定的に推移しており，推計が適切に行われていることを示唆している．より重要なのは，Aのベキ指数とそれ以外の変数(Y, K, L)との相対的な大小関係である．図3からわかるように，Aのベキ指数は他の3つのベキ指数を大きく上回っており

$$\mu_K < \mu_Y < \mu_L < \mu_A \qquad (32)$$

という関係が成立している．つまり，Aは他の3変数と同じくベキ分布に従うものの，その裾は他の3変数と比べると非常に短い．このことから，Yの裾を決めているのはAではないことがわかる．つまり，突出して大きなYが突出して高い生産性Aによってもたらされることはない[16]．

図4の×印の線は各国についてAのベキ指数を推計した結果を示している．Aのベキ指数の水準は国によって区々であるが多くの国で他の3変数のベキ指数よりも大きく，(32)式が日本以外でも成立していることを示している．

最後に，図8では，コブダグラス関数の適切性のチェックとして，推計されたAの分布がKやLから独立であるか否かを調べている．図8の上段の図は横軸にK，縦軸にLをとったときの散布図である(データは2008年の日本)．この散布図で点の集中している領域をブロックに細分化し，区分けされたブロック毎にAの分布を描くということを行った．図8の下段の図がその結果を示している．例えば，"block 1"とあるのは，(K, L)のペアが上段の図のblock 1の領域にあるときのAの分布を示している．この図から，(K, L)のペアが異なるブロックに属していても分布はほぼ同一であることがわかる．つまり，コブダグラス関数を前提として推計されたAは(K, L)から独立であり，その意味でコブダグラス関数は適切な関数形といえる．

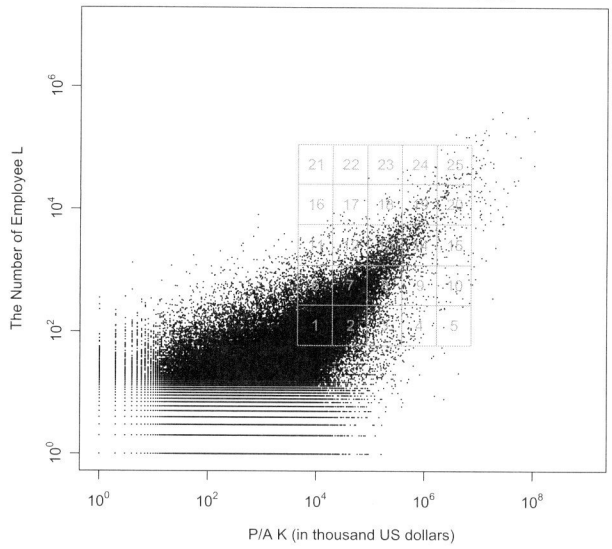
4.3.2 日中比較

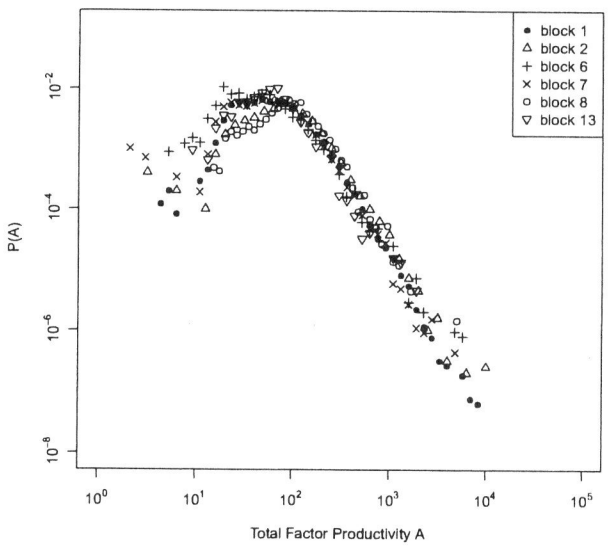
図9ではA, Y, K, Lの累積分布からどのようなことがわかるのかを例示するために，日本と中国の機械産業(電気機械，一般機械，輸送用機械，精密機械)の2007年における比較を行っている[17]．

第1に，右上に示した従業員数の累積分布をみると，中国では従業員規模の小さい企業はあまり存在しないのに対して日本では従業員数の少ない零細企業がかなりある．しかし累積分布の直線部分をみると，日本の方が傾きが緩く，従業員数の面での企業間格差が大きいことを示している．つまり，中国は，日本との対比では，従業員数の少ない企業の数が限られているが，同時に従業員数の非常に大きな企業の数も限られており，その結果，従業員数でみた企業間の格差が小さくなっている[18]．

第2に，左下の有形固定資産をみると，日本の方が直線部分の傾きが緩やかで，有形固定資産でみた企業間の格差が大きいことを示している．これは資本蓄積の段階の違いを反映してい

図8. サブサンプルにおける全要素生産性の推計値





ると解釈できる．

第3に，右下の全要素生産性をみると，直線部分の傾きは日中でほぼ同じであり，日本は中国を右に平行移動したような位置にある．これは，ある程度 A の水準が高い企業同士で比べると日中の差はほとんどないことを示すと同時に，中国には A の非常に低い企業が数多く存在しており，それが日中の差となっていることを示している．

最後に左上に示した売上の分布をみると，直線部分の傾きは日本の方が緩やかになっており，売上でみても日本の方が企業間格差が大きいことを示している．これは有形固定資産の企業間格差を反映している．

5. おわりに

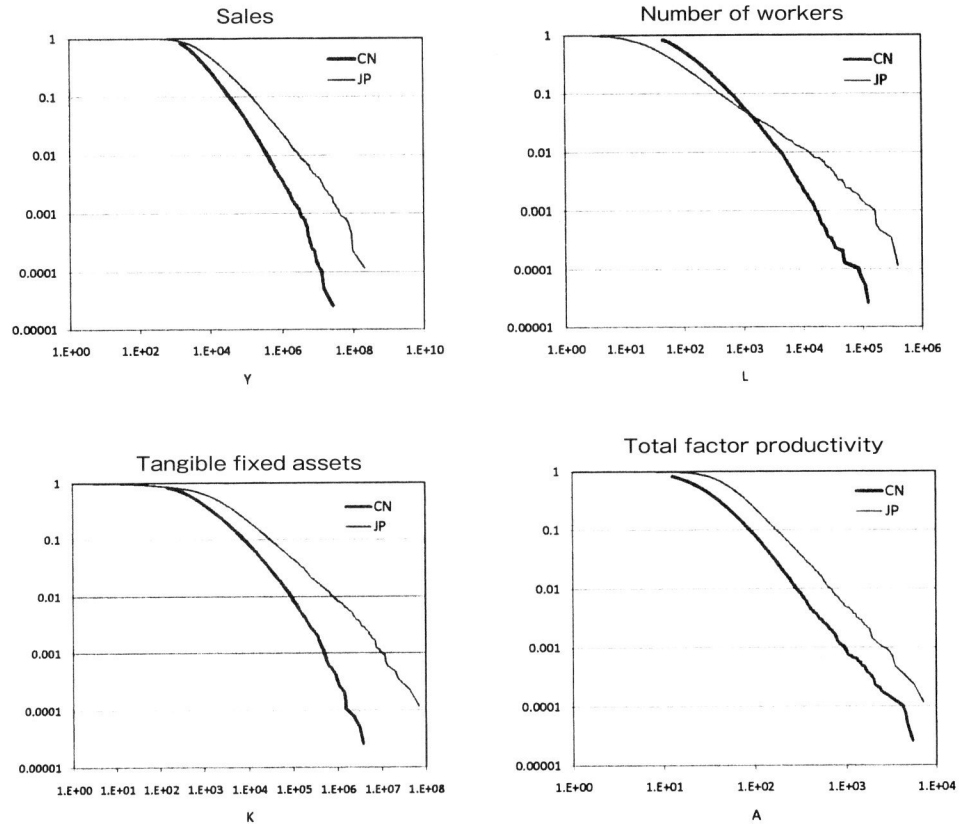
世の中には数人の従業員で営まれる零細企業から数十万人の従業員を擁する超巨大企業まで様々な規模の企業が存在する．どの規模の企業が何社存在するかを表したものが企業の規模分布であり，企業の規模を示す変数である Y(生産)と K(資本)と L(労働)のそれぞれはベキ分布とよばれる分布に従うことが知られている．本稿では，企業規模の分布関数と生産関数という2つの関数の間に存在する関係に注目し，それを手がかりとして生産関数の形状を特定するという手法を提案した．

企業の規模変数の分布関数と生産関数という2つの関数が関係するという発想はHouthakker(1955)が半世紀以上前に提示したものであり，彼はその発想を出発点として，コブダグラス関数にミクロ的な基礎づけを行った．本稿では，同じ発想を出発点として，生産関数の形状を実証的に特定する方法について検討した．

K と L がベキ分布に従っているという事実から出発して，仮に生産関数がレオンチェフ型であったとすれば，Y の分布の形状(特に Y の分布のベキ指数で特徴づけられる分布の裾の形状)がどのようになるかを解析的に求めることができる．同様にして，生産関数が仮に線形であった場合の Y の分布の形状や，生産関数が仮にコブダグラス型であった場合の Y の分布の形状を求めることができる．このようにして求めた結果と現実に観察される Y の分布の形状が一致しているか否かをみることにより，どの関数形が適切かを知ることができる．これが本稿で提案したアプローチである．

日本を含む25カ国にこの手法を応用した結果，大半の国や産業でコブダグラス型が生産関

図9. 日本と中国のCDF(機械産業, 2007年)



数の形状として適切であるとの結果が得られた．また，Yの分布の裾を形成する企業，つまり巨大企業について，KやLの投入量が突出して大きいためにYも突出して大きいのか，それともKやLの投入量は普通の企業とさほど変わらないのに全要素生産性が突出して高くそれが原因でYが突出して高くなっているのかを調べた結果，対象国のほとんどで前者を支持する結果が得られた．この結果は，生産性の向上が企業成長をもたらすという考え方と矛盾する面がある．

(一橋大学経済研究所，東京大学大学院経済学研究科・筑波大学大学院システム情報工学研究科・金沢学院大学経営情報学部・金沢学院大学経営情報学部)

注

＊ 本稿の作成に際しては楡井誠，阿部修人，大西立顕，吉川洋の各氏から有益なコメントを頂戴した．記して感謝したい．本稿は学術創成研究プロジェクト「日本経済の物価変動ダイナミクスの解明」(JSPS 18GS0101)の一環として作成されたものである．石川は科学研究費(20510147)の助成を，また水野は文部科学省特別経費「大規模情報コンテンツ時代の高度ICT専門職業人育成」事業の助成を受けた．

1) 生産関数の形状にミクロ的な基礎づけを与える研究としてはHouthakker(1955)やRosen(1978)，Jones(2005)などがある．Houthakker(1955)は個々の企業の生産関数がレオンチェフ型であり，生産要素がベキ分布に従うときには，マクロの生産関数がコブダグラス型になることを示した．佐藤(1975)は企業の生産関数が要素比率可変の場合でもこの結果が成立することを示した．また，Jones(2005)は生産技術に関する企業経営者のアイディアがベキ分布に従うという仮定からコブダグラス生産関数を導出した．これらの研究は生産要素などの分布と生産関数の形状との間に存在する関係に注目するという点で本稿と共通している．これらの研究と本稿の関係については第3節で説明する．

2) 世の中には数人の従業員で営まれる零細企業から数十万人の従業員を擁する超巨大企業まで様々な規模の企業が存在する．どの規模の企業が何社存在するかを表したものが企業の規模分布である．これまでの多くの研究で確認されてきたように，企業の規模分布はある閾値までは対数正規分布に従っているが，それ

を超える領域では(つまり企業サイズが閾値を超える巨大企業については)ベキ分布とよばれる分布に従っている．ベキ分布は確率変数の密度関数が正規分布のような指数型の関数ではなくベキ関数になっているところにその名前が由来する分布であり，Pareto(1896)が個人の所得や富の分布を描写する分布として考案したことからパレート分布ともよばれている．パレート分布は分布の裾がゆっくりと落ちていく性質をもち，個人の所得や富が大きな格差を伴う状況を的確に描写できる．個人の所得や富と同じように企業の規模にも大きな格差が存在する．

3)　Ohnishi *et al.*(2010)は，住宅の価格がその専有面積とどのように関連するかを示す住宅関数を推計した．その際，住宅価格のクロスセクション分布はベキ分布に従う一方，住宅の専有面積のクロスセクション分布は指数分布であるという事実をもとに，住宅価格の対数値と専有面積(の真数)が線形に関係していることを見出した．分布の関数形を用いて住宅関数の形状を特定するという発想は本稿の発想と同じである．

4)　確率変数 X がベキ指数 μ_X のベキ分布に従うとき PDF は $P(X=x)=\mu_X x^{-(\mu_X+1)}$ であり，CDF は $P(X\geq x)=x^{-\mu_X}$ である．

5)　ここでは k の値が正であることを用いている．

6)　実際には K と L の間には強い相関が存在するのでこの仮定は現実的でないが，本節では簡便化のために無相関と仮定する．なお，次節で実際のデータを扱う際にはこの仮定を緩め K と L の相関を考慮した分析を行う．

7)　3.1節で説明したように生産関数がコブダグラス型であれば(つまり γ の値が十分ゼロに近ければ) Y は全領域でベキ分布に従う．しかしそれ以外の場合には，Y がベキ分布に従うのは分布の裾だけである．

8)　ベキ指数 μ とジニ係数 G の間には $G=1/(2\mu-1)$ という関係がある．したがって，ベキ指数が大きくなるとジニ係数は低下する．

9)　詳しくは Jessen and Mikosch(2006)を参照．

10)　詳しくは Jessen and Mikosch(2006)を参照．

11)　詳しくは Jessen and Mikosch(2006)を参照．

12)　詳しくは Jessen and Mikosch(2006)を参照．

13)　既に述べたように，n 個の独立な確率変数 $X_1, X_1, \cdots, X_n$ があって，それぞれがベキ分布に従い，それぞれのベキ指数が $\mu_{X_i}(i=1,2,\cdots,n)$ で与えられるとき，$\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ はベキ分布に従い，そのベキ指数は $\mu_{X_1}+\mu_{X_2}+\cdots+\mu_{X_n}$ である．

14)　本稿で用いた方法の詳細については藤本(2011)を参照．

15)　$\log Y$ を $\log Z_1$ に回帰し θ_1 を，また $\log Y$ を $\log Z_2$ に回帰し θ_2 を推計する．具体的には，$\log Y$ の $\log Z_1$ への回帰は以下の手順で行った．
(1) Z_1 に関して上下1%のデータをカットする．
(2) Z_1 に関して対数目盛で等間隔のビンに分ける．
(3)それぞれのビン毎に対応する Y の値について幾何平均をとる．
(4)ビン毎の Z_1 と Y のペアに対して OLS を適用しその傾きとして θ_1 の推計値を得る．$\log Y$ の $\log Z_2$ への回帰も同様の手順で行った．

16)　Aoyama *et al.*(2009, 2010)は労働生産性(Y を L で除したもの)がベキ分布に従うことを示し，その理由を説明するモデルを提示している．Ikeda and Souma(2009)は労働生産性の分布の日米比較を行っている．

17)　図9で用いている A は，25カ国の機械産業に属する企業をプールし，国籍を無視して α と β を推計した結果に基づいている．

18)　従業員数のメディアン(縦軸の0.5に対応する横軸の値)は中国の方が大きい．しかし上位1%分位，上位0.1%分位(縦軸の0.01または0.001に対応する横軸の値)でみると中国の方が小さい．

参考文献

藤本祥二(2011)「日本企業の従業員数・売上にみられる冪指数の関係」統計数理研究所共同研究リポート259，経済物理とその周辺(7)，2011年3月．

石川温・藤本祥二・水野貴之・渡辺努(2011)「企業サイズの冪分布とコブダグラス型生産関数」統計数理研究所共同研究リポート259，経済物理とその周辺(7)，2011年3月．

佐藤和夫(1975)『生産関数の理論』創文社．

Aoyama, H., H. Yoshikawa, H. Iyetomi and Y. Fujiwara (2009) "Labor Productivity Superstatistics," Progress of Theoretical Physics: Supplement, No. 179, pp. 80-92.

Aoyama, H., H. Yoshikawa, H. Iyetomi and Y. Fujiwara (2010) "Productivity Dispersion: Fact, Theory and Implications," *Journal of Economic Interaction and Coordination*, Vol. 5, No. 1, pp. 27-54.

Castillo, Enrique (1988) *Extreme Value Theory in Engineering*, London: Academic Press.

Del Castillo, J. and P. Puig (1999) "The Best Test of Exponentiality Against Singly Truncated Normal Alternatives," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 94, No. 446, pp. 529-532.

Gabaix, Xavier (2009) "Power Laws in Economics and Finance," *Annual Review of Economics*, Vol. 1, pp. 255-293.

Houthakker, Hendrik S. (1955) "The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis," *Review of Economic Studies*, Vol. 23, No. 1, (1955-1956), pp. 27-31.

Ikeda, Y. and W. Souma (2009) "International Comparison of Labor Productivity Distribution for Manufacturing and Non-Manufacturing Firms," Progress of Theoretical Physics: Supplement, No. 179, pp. 93-102.

Jessen, Anders Hedegaard and Thomas Mikosch (2006) "Regularly Varying Functions," *Publ. de l. Inst. Math.*, Vol. 94, pp. 171-192.

Jones, Charles I. (2005) "The Shape of Production Functions and the Direction of Technical Change," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 120, No. 2, May 2005, pp. 517-549.

Kortum, Samuel S. (1997) "Research, Patenting, and Technological Change," *Econometrica*, Vol. 65, No. 6, (1997), pp. 1389-1419.

Malevergne, Y., V. Pisarenko and D. Sornette (2009) "Gibrat's Law for Cities: Uniformly Most Powerful Unbiased Test of the Pareto against the Lognormal," Swiss Finance Institute Research Paper Series, (09-40): 12.

Ohnishi, Takaaki, Takayuki Mizuno, Chihiro Shimizu and Tsutomu Watanabe (2010) "On the Evolution of the House Price Distribution," Research Center for Price Dynamics Working Paper Series No. 61, August 2010.

Pareto V. (1896) *Cours d'Economie Politique*, Lausanne: F. Rouge.

Rosen, S. (1978) "Substitution and the Division of Labor," *Economica*, Vol. 45, No. 179, pp. 235-250.

農業経済研究 第83巻第1号 (発売中)

食品摂取の時代・年齢・世代効果……藤本高志
——共変動最大化によるコウホート分析——
恐慌ショックに対する農家の経済行動……藤栄 剛・仙田徹志
——昭和恐慌下における農家の対処行動を中心として——
不完全競争市場における米作農家の借地行動……草苅 仁・中川聡司
——取引費用と不確実性の影響分析——

《研究動向》
農業金融研究の動向と展望……森 佳子
——農業経営向け融資を対象として——

《談話室》
中村 徹『森林学への招待』(筑波大学出版会，2010年5月刊)について……逸見謙三

《書 評》
木南莉莉著『中国におけるクラスター戦略による農業農村開発』……阿久根優子
泉谷眞実編著『エコフィードの活用促進：食品循環資源飼料化のリサイクル・チャネル』……小沢 亙
田中裕人・岩本博幸・北田紀久雄・新部昭夫編著『バイオマス利活用における住民の認知と経済評価』……松田浩敬
佐藤章夫著『農業水利と国家・ムラ』……岡部 守
柘植徳雄著『西欧資本主義国の共生農業システム：イギリスを中心にみた共生原理と農業の関係』……内山智裕
日韓畜産研究会編『貿易体制の変化と日韓畜産の未来』……李 哉泫
佐藤真弓著『都市農村交流と学校教育』……大江靖雄

《会 報》
編集委員会だより

B5判・72頁・定価1280円(本体1219円) 日本農業経済学会編集・発行/岩波書店発売