期待効用定理：A Pedagogical Note*

鈴 村 興 太 郎

1. イントロダクション

本稿は，期待効用定理の構成的な証明を丁寧に述べ，不確実性の経済分析の基礎を初等的に教授するうえでの一助とすることを目的とする。定理の意味は，証明の本質的な部分を咀嚼してはじめて本当に判るものだから，この覚書にもなにがしかの意味はあろうと思う。条件の意味と結果の解釈などは，全部 Malinvaud[3]，Marschak[4]，酒井[6] などに委ね，本稿では殆ど述べていないことをあらかじめお断わりしておきたい。

2. モデルと仮定

われわれが念頭に置く不確実性のもとでの意思決定の問題は，次のように定式化できる。意思決定者が究極的に関心をもつ「結果(consequence)」の集合を C と書く。意思決定者の「行動(act)」a が実際にどのような結果を生むかということは，彼がコントロールできない「自然の状態(state of nature)」の実現値 θ に依存する。従って，ありとあり得べき自然の状態全体の集合を Θ と書くとき，行動 a とは，各 $\theta\in\Theta$ に対してそのもとで実現する結果 $a(\theta)\in C$ を指定する関数 $a:\Theta\to C$ に他ならないと考えられる。

われわれは，各々の自然の状態 $\theta\in\Theta$ が生起する確率 $p(\theta)$ ($p(\theta)\geqq 0$, $\sum_{\theta\in\Theta}p(\theta)=1$) に関して，意思決定者は主観的な評価――「主観確率(subjective probability)」――を形成しうるものと仮定する。そのとき，彼が行動 $a\in A$ をとるならば結果 $c\in C$ が生起する確率は

$$p^a(c)\equiv\sum_{\theta:a(\theta)=c}p(\theta)$$

で与えられることになる。(定義により，明らかに，$p^a(c)\geqq 0$, $\sum_{c\in C}p^a(c)=1$ が成立する。) 従って，意思決定者がある行動 a を選択するとき，彼は事実上，「結果 $c, c', c'', \cdots$ を，各々確率 $p^a(c), p^a(c'), p^a(c''), \cdots$ で得る」という見通し――以下これを「プロスペクト(prospect)」と呼ぶ――を選択していることになる。この意味において，不確実性のもとでの意思決定の問題は，プロスペクトの集合の中での選択の問題に他ならないのである。

表現の単純化のため，「結果 $c, c', c'', \cdots$ を各々確率 $p(c), p(c'), p(c''), \cdots$ で得る」というプロスペクトを

$$[c, c', c'', \cdots; p(c), p(c'), p(c''), \cdots]$$

と略記する。このプロスペクトは，実現する状態が全て究極的な結果であるという意味で「純粋プロスペクト(pure prospect)」と呼ばれる。これに対して，「複合プロスペクト(compound prospect)」とは，「結果 c を確率 $p(c)$ で，純粋プロスペクト L を確率 $p(L)$ で得る」というたぐいの，確率的に実現する「賞品」の中にプロスペクトが含まれるような見通しのことをいう。

プロスペクト全体の集合を $\mathscr{L}$ と書く。以下においてわれわれは，結果の集合 C とプロスペクトの集合 $\mathscr{L}$ に対して，3つの基本的な要求を課すことにする。

(A_1) 任意の結果 $c, c'\in C$ と，任意の確率 p $(0<p<1)$ に対して，

$$[c, c; p, 1-p]=c; [c, c'; 1, 0]=c$$

が成立する。

(A_2) 任意の結果 $c, c'\in C$ と，任意の確率 p $(0\leqq p\leqq 1)$ に対して，

$$[c, c'; p, 1-p]=[c', c; 1-p, p]$$

が成立する。

(A_3) 任意のプロスペクト $L\in\mathscr{L}$ は，確率の乗法定理に従って，純粋プロスペクトに帰着させうる。

最後の条件 (A_3) についてだけ，その意味内容を敷衍

---

* 本稿はもともと奥野正寛氏(東京大学)との共著『ミクロ経済学』(岩波書店，近刊)の一部として準備されたが，紙幅その他の理由から，このような形で読者に供することになった。また，本稿の構成的証明と類似した論法は，既に Malinvaud[3] によっても用いられていることを後で知った。従って，本稿は Malinvaud の簡潔な論法に対する立入った注釈と看做されるべきである。準備の過程で貴重な助言を賜った奥野正寛，本多佑三(神戸商科大学)，篠塚友一(一橋大学)の諸氏に感謝したい。

しておこう。例として，純粋プロスペクト

$$L^1 \equiv [c, c'; q, 1-q]\,;\ L^2 \equiv [c, c'; r, 1-r]$$

より成る複合プロスペクト $L \equiv [L^1, L^2; p, 1-p]$ を考える。L が究極的結果 c, c' を実現するまでに経由する2段階の抽選——「L^1 ないし L^2」という第1次抽選と，「c ないし c'」という第2次抽選——が確率的に独立であると仮定するとき，結果 c および c' の究極的な生起確率は，それぞれ $pq+(1-p)r$ および $p(1-q)+(1-p)(1-r)$ で与えられる。従って，複合プロスペクト L は，単純プロスペクト

$$L^* \equiv [c, c'; pq+(1-p)r, p(1-q)+(1-p)(1-r)]$$

と同一視できる——これが (A_3) の背後にある考え方なのである。‖

次にわれわれは，不確実性のもとにおける意思決定者は，任意のプロスペクト $L^1, L^2 \in \mathscr{L}$ に対して

$L^1 \succsim L^2 \Leftrightarrow$ 意思決定者は L^1 を L^2 より選好するか，両者を無差別であると考える

によって定義される $\mathscr{L}$ 上の選好順序 $\succsim$ をもつものと仮定する。$\succsim$ に対応する厳密な選好関係 $\succ$ と無差別関係 $\sim$ は，

$L^1 \succ L^2 \Leftrightarrow L^1 \succsim L^2$ ではあるが $L^2 \succsim L^1$ ではない

$L^1 \sim L^2 \Leftrightarrow L^1 \succsim L^2$ かつ $L^2 \succsim L^1$ である

によって定義される。

以下において，結果の集合 C は有限集合 $C \equiv \{c^1, c^2, \cdots, c^s\}$ であり，$c^1 \precsim c^2 \precsim \cdots \precsim c^s$ かつ $c^1 \prec c^s$ を満足するものとする。さらに，$\mathscr{L}$ 上の選好順序 $\succsim$ は，次の4つの合理性の要求を満足するものとする。

(B_1) 任意のプロスペクト $L \in \mathscr{L}$ に対して，

$L \sim [c^1, c^s; p, 1-p]$

を満足する確率 $p\,(0 \leqq p \leqq 1)$ が存在する。

(B_2) 任意の2つのプロスペクト $L^1, L^2 \in \mathscr{L}$ と，任意の確率 $p\,(0 \leqq p \leqq 1)$ に対して，

$L^1 \sim L^2 \Longrightarrow (L^1 \sim [L^1, L^2; p, 1-p])$

が成立する。

(B_3) 任意の3つのプロスペクト $L^1, L^2, L^3 \in \mathscr{L}$ と，任意の確率 $p\,(0<p<1)$ に対して，

(1) $L^1 \succ L^2 \Longrightarrow ([L^1, L^3; p, 1-p] \succ [L^2, L^3; p, 1-p])$

(2) $L^1 \sim L^2 \Longrightarrow ([L^1, L^3; p, 1-p] \sim [L^2, L^3; p, 1-p])$

が成立する。

(B_4) 任意の2つのプロスペクト $L^1, L^2 \in \mathscr{L}$ に対して，

$$L^1 \succ L^2 \Longrightarrow \{[L^1, L^2; p, 1-p] \succ [L^1, L^2; q, 1-q] \Leftrightarrow p > q\}$$

が成立する。

そのとき，結果の集合 C 上の実数値効用関数 $u: C \to \boldsymbol{R}$ が存在し，任意の2つのプロスペクト $L^1, L^2 \in \mathscr{L}$ に対して

$$L^1 \succsim L^2 \Leftrightarrow \sum_{c \in C} p^1(c)\,u(c) \geqq \sum_{c \in C} p^2(c)\,u(c)$$

が成立することが知られている。ただしここで $p^i(c)$ は，プロスペクト L^i が結果 c を生む究極的確率である。すなわち，任意のプロスペクトの効用は，それが生む結果の効用の期待値によって表現できるわけである。これが期待効用定理に他ならない。

3. 期待効用定理の証明

定理の証明に入ろう。この証明は $s=3$ という特殊ケースについてのものだが，各条件の果す役割の本質は，この証明の中に全部あらわれる。まず，補助手段として，図1の正三角形 ABC を考える。この正三角形のサイズは，各頂点から対辺へ下ろした垂線の長さを1とすることにより，定めるものとする。そのとき，正三角形内の任意の点 P から辺 BC, 辺 CA, 辺 AB へ下ろした垂線の長さを各々 p_1, p_2, p_3 と書くことにすれば，点 P とベクトル (p_1, p_2, p_3) とは明らかに1対1に対応する。そして，この方式で表現すれば，$A=(1,0,0)$，$B=(0,1,0)$，$C=(0,0,1)$ と書けることになる。点 p の「座標」$p_i\,(i=1,2,3)$ に関しては

$$p_i \geqq 0\,(i=1,2,3)\,;\ \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \tag{1}$$

という重要な性質が成立する。(1)の前半——p_i の非負

図 1: 補助正三角形の性質

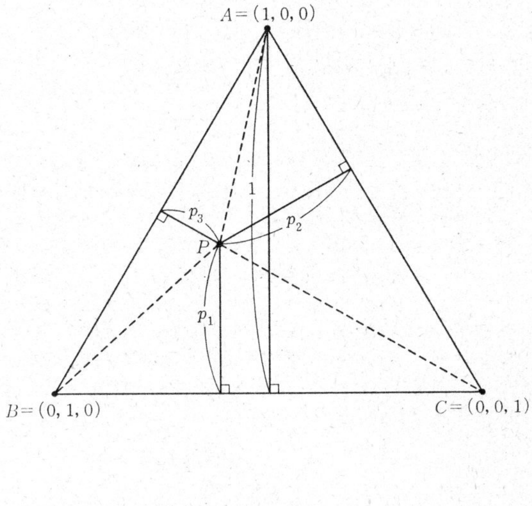


図 2：無差別線分の構成

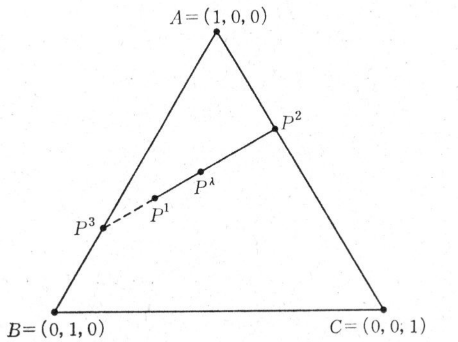
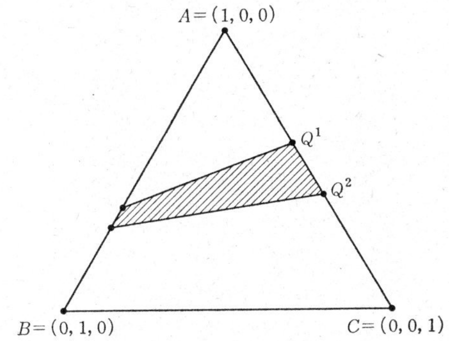


図 3：「厚み」をもつ無差別点集合



性――は明らかなので，後半を証明するものとし，この正三角形の一辺の長さを $2a$ と置く[1)]。任意の三角形 XYZ の面積を簡潔に $S(XYZ)$ と書くことにすれば，明らかに

$$S(ABC)=S(APB)+S(BPC)+S(CPA) \tag{2}$$

が成立する。ここで $S(ABC)=a$, $S(APB)=p_3a$, $S(BPC)=p_1a$, $S(CPA)=p_2a$ が成立することに注意すれば，(2)から首尾よく(1)の後半が従うことになる。

もうひとつの準備として，(A_1)，(A_2) および (A_3) の簡単な，しかし有用な帰結に注意しておくことにしよう。これらの条件を繰り返して適用すれば，例えば

$$\begin{aligned}[c^1, c^2, c^3; p_1, 0, p_3] &= [c^1, [c^2, c^3; 0, 1]; p_1, p_3]\\ &= [c^1, [c^3, c^2; 1, 0]; p_1, p_3]\\ &= [c^1, c^3; p_1, p_3]\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}[c^1, c^2, c^3; 1, 0, 0] &= [[c^1, c^2; 1, 0], c^3; 1, 0]\\ &= [c^1, c^3; 1, 0]\\ &= c^1\end{aligned}$$

というように，生起確率が0である結果は，プロスペクトの表現から省略して差しつかえないというのがそれである。以下の考察において，この事実は特に断わることなく自由に利用されることになる。

さて，任意のプロスペクト $L^1\in\mathscr{L}$ をとろう。(A_3) により，L^1 は適当な純粋プロスペクト

$$[c^1, c^2, c^3; p_1{}^1, p_2{}^1, p_3{}^1],\ \ p_i{}^1 \geqq 0\,(i=1,2,3),\ \ \sum_{i=1}^{3} p_i{}^1 = 1 \tag{3}$$

に帰着できるため，L^1 は正三角形 ABC 内の点 $P^1\equiv(p_1{}^1, p_2{}^1, p_3{}^1)$ と1対1に対応する（図2を参照）。ところで，(B_1) によれば，この L^1 に対して

$$L^1 \sim [c^1, c^3; p_1{}^2, p_3{}^2],\ \ p_1{}^2 \geqq 0,\ \ p_3{}^2 \geqq 0,\ \ p_1{}^2+p_3{}^2=1$$

を満足する $p_1{}^2, p_3{}^2$ を見出すことができる。こうして定まる $p_1{}^2, p_3{}^2$ を用いて

$$P^2 \equiv (p_1{}^2, p_2{}^2, p_3{}^2),\ \ p_2{}^2 \equiv 0$$

とおけば，点 P^2 は辺 AC 上に位置し，点 P^1 と点 P^2 は，意思決定者にとって無差別となるのである。

さて，線分 t^1t^2 上の任意の点 $P^\lambda\equiv(p_1{}^\lambda, p_2{}^\lambda, p_3{}^\lambda)$ をとれば，$\overline{P^1P^\lambda}:\overline{P^\lambda P^2}=\lambda:1-\lambda$ とおくとき[2)]

$$p_i{}^\lambda = (1-\lambda)p_i{}^1+\lambda p_i{}^2\ \ (i=1,2,3) \tag{4}$$

が成り立つことは明らかである。点 P^2 および点 P^λ に対応する純粋プロスペクトを

$$L^2 \equiv [c^1, c^2, c^3; p_1{}^2, p_2{}^2, p_3{}^2];$$
$$L^\lambda \equiv [c^1, c^2, c^3; p_1{}^\lambda, p_2{}^\lambda, p_3{}^\lambda]$$

によって定義すれば，(A_3) および(4)により，L^λ は複合プロスペクト

$$[L^1, L^2; 1-\lambda, \lambda]$$

と同一視されることになる。L^2 の定義によって $L^1\sim L^2$ であるから，(B_3) により，$L^\lambda\sim L^1$ を結論することができる。こうして，線分 P^1P^2 上の任意の点は，すべて点 P^1（および点 P^2）と無差別であることが知られたわけである。

次に，線分 P^1P^2 を P^1 の方向へ延長し，辺 AB との交点 $P^3\equiv(p_1{}^3, p_2{}^3, p_3{}^3)$，$p_3{}^3\equiv0$ を定める。いま，純粋

1）容易に確認しうるように，$a=\sqrt{3}/3$ が成立する。

2）ただし，ここで例えば $\overline{P^1P^\lambda}$ は，点 P^1 と点 P^λ を結ぶ線分 P^1P^λ の長さである。

プロスペクト

$$L^3 \equiv [c^1, c^2, c^3 ; p_1{}^3, p_2{}^3, p_3{}^3]$$

に対して仮に $L^3 \succ L^1$ が成立したとすれば，$(B_3)(1)$ により，任意の $\mu(0<\mu<1)$ に対して

$$[L^3, L^2 ; 1-\mu, \mu] \succ [L^1, L^2 ; 1-\mu, \mu]$$

が従うことになる。この右辺は，既に見たように L^1 と無差別なので，これより

$$\forall\mu(0<\mu<1) : [L^3,\ L^2 ; 1-\mu, \mu] \succ L^1 \qquad (5)$$

を得ることになる。しかしながら，特に $\mu^* \equiv \overline{P^1P^3}/\overline{P^2P^3}$ に対しては，(A_3) により

$$\begin{aligned}&[L^3, L^2 ; 1-\mu^*, \mu^*]\\ &= [c^1, c^2, c^3 ; (1-\mu^*)p_1{}^3+\mu^*p_1{}^2,\ (1-\mu^*)p_2{}^3+\mu^*p_2{}^2,\\ &\qquad (1-\mu^*)p_3{}^3+\mu^*p_3{}^2]\\ &= [c^1, c^2, c^3 ; p_1{}^1, p_2{}^1, p_3{}^1]\\ &= L^1\end{aligned}$$

が成り立つので，(5) は矛盾を生んでしまう。同じ論法により，$L^1 \succ L^3$ という可能性もまた排除され，$\succsim$ の完備性により $L^1 \sim L^3$ が結論されることになる。このことから，図2中の線分 P^2P^3 上の点は，すべて点 P^1 と無差別であることが従う。

次に，正三角形 ABC 内の無差別点集合は，互に交わることのない線分を成すという事実を示そう。いま仮に，あるひとつの無差別点集合が，図3に描かれたように厚みをもてば，ある辺上に2つの無差別点が存在することになる。図3の点 $Q^\tau \equiv (q_1{}^\tau, q_2{}^\tau, q_3{}^\tau)$，$q_2{}^\tau = 0\,(\tau=1, 2)$ が例えばそれである。点 Q^τ に対応する純粋プロスペクト

$$L_*^\tau \equiv [c^1, c^2, c^3 ; q_1{}^\tau, q_2{}^\tau, q_3{}^\tau] \qquad (\tau=1, 2)$$

は，定義により互に無差別であるが，$q_2{}^\tau = 0\,(\tau=1, 2)$ と $q_1{}^1 > q_1{}^2$ に注意すれば，これは(B_4)と矛盾する。従って，図3内の斜線を付された領域のような無差別点集合が存在することは，ありえないのである。このことからまた，正三角形 ABC 内で2つの無差別線分が交わるという，図4に描かれた状況も生じえないことが知られる。なぜならば，$\succsim$ の推移性および「任意の2つの無差別点を結ぶ線分上の点は全てまた無差別である」という既に得られた結果から，図4に描かれた状況においては，実のところ四角形 $R^1R^2R^3R^4$ は無差別点集合となってしまい，事態は結局のところ，図3に描かれた状況に帰着してしまうからである。

最後に，無差別線分は全部平行になるという事実を示そう。いま仮に，図5内の線分 S^1S^3, S^2S^4 のように，2つの平行でない無差別線分が存在したとしてみよう。点 S^1 を通り，線分 S^2S^4 に平行線をひき，辺 AC との交点 S^5 を定める。ここで

$$S^\tau \equiv (s_1{}^\tau, s_2{}^\tau, s_3{}^\tau) \ (\tau=1, 2, \cdots, 5) ;$$

$$L_{**}^\tau \equiv [c^1, c^2, c^3 ; s_1{}^\tau, s_2{}^\tau, s_3{}^\tau] \ (\tau=1, 2, \cdots, 5)$$

とおけば，定義により $L_{**}^2 \sim L_{**}^4$ なので，$(B_3)(2)$ を援用して $L_{**}^1 \sim L_{**}^5$ を結論することができる。しかるに，$s_1{}^3 > s_1{}^5$ なので，(B_4) より $L_{**}^3 \succ L_{**}^5$ が従う。$\succsim$ の推移性により，これらの2つの事実から $L_{**}^3 \succ L_{**}^1$ が従うが，これは定義により $L_{**}^1 \sim L_{**}^3$ であるという事実に矛盾してしまう。こうして，図5に描かれたような状況は生じえないことが判明するわけである。

これまでの考察により，正三角形 ABC 内の無差別点集合は，平行な線分を成すことが確認された。次のステップは，この事実を用いて，プロスペクトの集合 $\mathscr{L}$ 上の実数値効用関数を構成することである。図6は，正三角形 ABC を $\boldsymbol{R}_+{}^3$ の中に埋め込んだものである。(1)の

図 4: 交叉する無差別線分

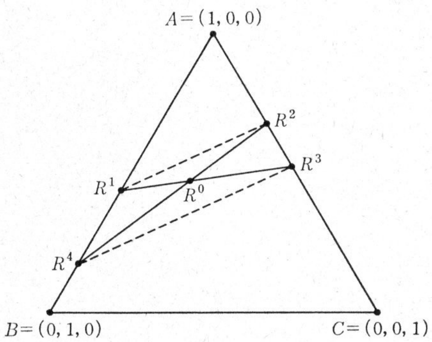


図 5: 無差別線分の平行性

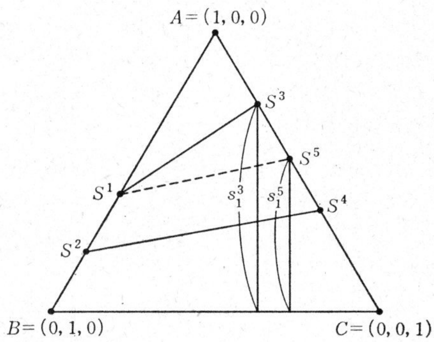
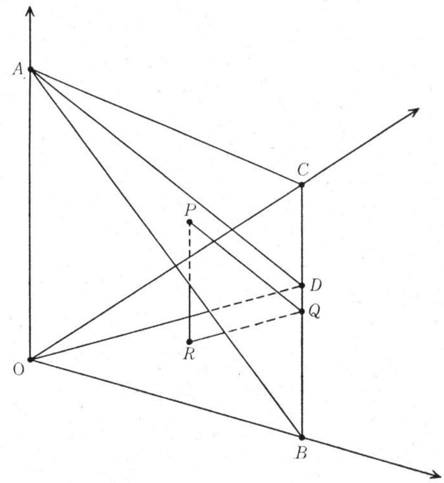


図 6: 期待効用定理



証明に際して定めたように，正三角形の一辺の長さを $2a$ とおき，また $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}\equiv 2b$ とおこう[3)]。点 A から辺 BC に垂線を下し，その足を点 D とすれば，定義により $\overline{AD}=1$ である。また，正三角形 ABC 内の任意の点 P より辺 BC に下した垂線の足を点 Q，軸 $\overrightarrow{OB}$ と軸 $\overrightarrow{OC}$ が定める平面に下した垂線の足を点 R とし，

$$\overline{PQ}=p_1\,;\overline{PR}=q_1$$

とおくことにする。図の混雑を避けるために書き入れてないが，p_2, p_3, q_2, q_3 の定め方は，読者にとり自明の筈である。作図法から明らかに，三角形 ADO と三角形 PQR は相似なので

$$\overline{PQ}:\overline{PR}(=p_1:q_1)=\overline{AD}:\overline{AO}(=1:2b)$$

が成立する。これより $q_1=2bp_1$ が従うことは明らかである。全く対称的な議論により

$$q_i=2bp_i\ \ (i=1,2,3)$$

を得ることができる。こうして点 P の直交座標表示が得られたことになる。

さて，点 $P=(q_1,q_2,q_3)$ を通る $\boldsymbol{R}^3$ 内の直線は，α,β,γ を勾配を定めるパラメーター，K を原点よりの距離を示すパラメーターとするとき

$$\alpha q_1+\beta q_2+\gamma q_3=K$$

と表現される。特に，正三角形内の無差別点集合は平行な線分なので，勾配ベクトル (α,β,γ) はどの点 P に対しても共通である。右辺の K の値は点 P に依存するが，これまでの議論によって，K が大きい程――従って無差別線分が点 A に近い程――点 P に対応するプロスペクトはそれだけ望ましいものになっている。ここで $q_i=2bp_i\,(i=1,2,3)$ を援用すれば，任意のプロスペクト $L\in\mathscr{L}$ の「効用」は，線型の効用関数

$$u(L)\equiv\alpha p_1{}^L+\beta p_2{}^L+\gamma p_3{}^L \tag{6}$$

によって表現できることが判明したことになる。ただしここで，$p_1{}^L, p_2{}^L, p_3{}^L$ は L を純粋プロスペクトに帰着させたときの，結果 c^1, c^2, c^3 の発生確率である。関係式 (6) を特に

$$c^1=[c^1,c^2,c^3\,;1,0,0]\,;c^2=[c^1,c^2,c^3\,;0,1,0]\,;$$
$$c^3=[c^1,c^2,c^3\,;0,0,1]$$

というプロスペクトに対してそれぞれ適用してみれば

$$\alpha=u(c^1)\,;\beta=u(c^2)\,;\gamma=u(c^3)$$

であることが知られる。そこで (6) は

$$u(L)\equiv\sum_{i=1}^{3}p_i{}^L u(c^i) \tag{7}$$

と書き直される。期待効用定理の主張は，これで論証できたことになるのである。‖

（一橋大学経済研究所）

3) 容易に確認しうるように，$b=\sqrt{6}/6$ が成立する。

参考文献

[1] Herstein, I. N., and J. Milnor, "An Axiomatic Approach to Measurable Utility," *Econometrica*, Vol. 21, 1953, pp. 291–297.

[2] Machina, M. J., "The Economic Theory of Individual Behavior Toward Risk: Theory, Evidence and New Directions," Technical Report, No. 433, IMSSS, Stanford University, 1983.

[3] Malinvaud, E., *Leçons de Théorie Microéconomique*, Quatrieme edition, Bordas, 1978 (林敏彦訳『ミクロ経済理論講義』創文社，昭和 56 年)。

[4] Marschak, J., "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility," *Econometrica*, Vol. 18, 1950, pp. 111–141.

[5] von Neumann, J., and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Third edition, Princeton University Press, 1953 (銀林浩・橋本和美・宮本敏雄監訳『ゲームの理論と経済行動』東京図書，昭和 47 年)。

[6] 酒井泰弘『不確実性の経済学』有斐閣，昭和 57 年。