在庫ストック市場の動学的分析*

小　谷　　清

1　はじめに

本稿の目的は，時間が経つにつれて在庫ストック市場で決定される価格，各人の保有する在庫ストックの水準が連続的にか，不連続的にか，不連続的とすればどの程度不連続に変化するか検討することである。

在庫ストック市場とは，商品の製造業者と需要家との間に介在する流通段階に携わっている中間業者(もしくは，卸売業者)の間で商品の在庫を融通(売り買い)する市場のことである。中間業者は，商品の製造業者から作られた商品の搬入を受け入れると同時に，商品の需要家から商品の注文を受けている。経済全体としても，また個々の中間業者にとっても搬入と受注が常に調整されて一致しているという保証はない。ある時には，ある中間業者への搬入が注文を上回る状態が長く続き，その中間業者の保有在庫が膨大なものとなり，在庫費用に苦しむということが起りうる。一方で，同時に，他の中間業者では受注が搬入を上回りつづけ，彼の保有する在庫が払底し，もうこれ以上受注できなくなるという事態が起りうる。このような時，過剰に在庫を保有している中間業者が在庫過少の中間業者に在庫ストックを売り渡すことによって相互に利益を得ることができる。また，ある中間業者は，商品価格の上昇を予想し，他の業者は下落を予想する。このような時，在庫ストックが後者から前者へ売られる。以上のような動機から，商品の製造業者と需要家の間に介在する中間業者間で在庫ストックが売り買いされる場所が在庫ストック市場である。在庫ストック市場の需給を均衡するように在庫，すなわち商品の価格が決定される。この価格が商品の生産，消費に影響を与えてゆく。在庫ストック市場の典型的な例としては，鉄鋼製品，非鉄製品，家電製品，繊維製品についての仲間取り引きや，石油製品についての我が国の業転取り引き，欧米での石(原)油スポット市場があげられる。商品取引所の直物取り引きや，先物の当限りも在庫ストック市場の例である。冷蔵庫の発達によって生鮮食料品の市場も在庫ストック市場となっている。また，商品ではないが，債券や銀行間での外国為替取り引き(異種通貨建て銀行預金の交換)等も在庫ストック市場の例である。

私はいくつかの場所で(小谷(1978),Otani(1980, 1983))在庫ストックの市場の分析が，市場の不均衡の分析や生産・消費(生産過程での投入も含めて)の一致という意味での市場均衡が実際どのような径路を経済がたどることによって実現するかという問題の検討に極めて重要であることを指摘した。今掲げた論文の中で，私は，微分可能な集計された(もしくは，代表的中間業者の)在庫ストック需要関数を使って在庫ストック市場を定式化した。このような簡単な定式化を用いて，在庫ストック市場という概念によって市場の不均衡の分析，市場均衡(財の生産，消費の一致)が実現される過程の分析が行なえるということを簡明に示すことができた。ところが第2節でみるように，取り引き費用の存在のため中間業者の在庫ストック需要関数は不連続になる。需要関数が不連続であると，在庫市場で決まる各中間業者の保有在庫量や価格が時間を通じて連続に動くということは自明なことではなくなる。微分可能な集計的需要関数を使う小谷(1978)，Otani(1980, 1983)ではこの問題が無視されている。本稿の課題はこの問題を

＊　本稿作成にあたって，東京経済研究センター研究費，東京経済大学個人研究助成費を使用した。これらの研究費を下さった方々にお礼を申し上げたい。

検討することである。在庫ストック需要関数が不連続な時，在庫ストック市場で決定される価格，在庫市場での取り引きの結果決まる各中間業者の保有量が時間を通じて連続に動くか，でないとすれば，どの程度不連続かを本稿では検討する。

以下の本稿では，複雑化を避けるため，在庫市場の動きが経済の他の部分(特に生産，消費)に影響を与え，それがまた在庫市場自体に影響を与えるというメカニズムを無視することにする。

2 中間業者の在庫ストック需要

まず，中間業者の在庫ストックに対する需要を本節で導出する。我々の在庫需要モデルは Scarf (1960)の(S, s)政策の拡張になるのであるが，厳密な拡張とは言うことができない。というのは次の2つの点で我々の意図する拡張が容易でないからである。第1に，我々の在庫保有主体，即ち中間業者は，売り買いの両面で在庫ストックの取り引きを行なうのに対し，Scarf の論文では在庫保有者は在庫ストックについては買う取り引きしか行なわない[1]。在庫ストックの取り引きを売り買い両面で行なう場合，Scarf が使った証明方法は少なくともそのままでは使うことができない。第2に，Scarf のモデルでは，期間分析が使われているのに対し，我々のモデルでは連続時間分析を使わねばならない。というのは，我々が本稿で主に考慮したいのは，取り引きコストがあって一般には連続でないような需要関数の下で価格や，各人の保有する在庫の量が時間に対して何らかの意味で連続的に動くか否かという問題だからである。ところが，期間分析による Scarf の在庫保有モデルを連続時間分析に翻訳することも，また，容易なこととは思われない。

$Z(t)$は，ある中間業者がt時点で保有する在庫量とする。$\bar{Z}(t)$を$Z(s)$のt時点での左極限，即ち，$\lim_{s\to t-0} Z(s)=\bar{Z}(t)$とする。$Z(t)$と$\bar{Z}(t)$は必ずしも一致しない。中間業者がある時点において在庫ストック市場で在庫ストックを売り買いすれば，その業者の保有在庫量はジャンプするからである。連続時間分析では，$\bar{Z}(t)$が市場での取り引き前の在庫保有量，$Z(t)$が市場での取り引き後の在庫保有量を示し，各中間業者は与えられた$\bar{Z}(t)$の下で各時点において$Z(t)$を最適化する[2]。期間分析でのある期の期初在庫量，その期の前期の期末の在庫量に$Z(t), \bar{Z}(t)$はそれぞれ対応する。

t時点での在庫ストック市場での在庫ストックの，つまり財の価格を$P(t)$で表わす。在庫を売り買いした時の受け取り，もしくは支払い額は，この価格に売却，購入量を乗じたものではない。他に，売り買いに当って取り引き費用Kを要する。即ち，xを在庫ストックの購入量とすれば(xが負の時は，その絶対値が売却量)，在庫取り引きに伴うコストもしくは収入$C(x)$は次のように表わされる。

$$C(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x=0\\ Px+K & \text{if } x\neq 0\end{cases}$$

t時点でのある中間業者の在庫保有量が$Z(t)$であった時，その中間業者が期待できるネットでの利益の現在価値を関数$B(Z(t))$で表わす。この関数を前提として我々は本稿の議論を進める。(ただし関数$B(\cdot)$がどのようにして生ずるかの説明を全く与えないのは不適切と思われるので，各期の初めに在庫ストック市場が開かれる期間分析の場合，$B(\cdot)$に対応する関数がどのように定義されるかを本節の最後に示す。)

関数$B(Z)$を前提とすると中間業者の行動は簡単に分析することができる。中間業者は各時点で次の最適化問題を解く。

$$(1) \qquad \max_{Z}\{B(Z)-C(Z-\bar{Z})\}$$

(1)式で$Z, \bar{Z}$は$Z(t), \bar{Z}(t)$の略である。(ある時点のみを考える時，他の変数，たとえば$P(t)$についても，断りなしにtを省略して書くことにする。)$\bar{Z}$は過去の行動の結果によって決まり，現時点では所与である。(1)を解いて得られる$Z-\bar{Z}$がこの中間業者の在庫市場での在庫ストックの購入量である。

1) Scarf のモデルの在庫保有者は需要家に商品を売るが，この販売はフローの次元を持つものである。

2) t時点での在庫市場での取り引き前の在庫保有量を$Z(t)$，取り引き後の在庫量を$Z(s)$の$s=t$での右極限と考えても同じように議論をすすめることができる。

図 1　最適在庫ストック需要の決定

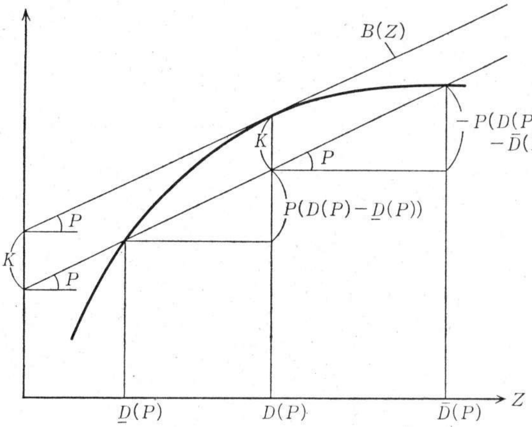
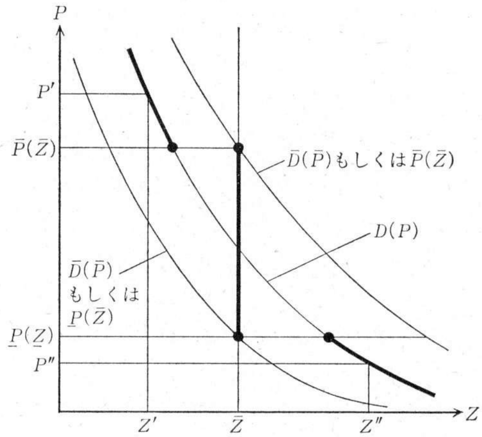


図 2　中間業者の在庫ストック需要関数



次の仮定を設ける。

仮定 1　$B'(Z)>0, B''(Z)<0$

関数 $D(P)$ を $B'(D(P))=P$ を満す関数とする。$\bar{D}(P)$, $\underline{D}(P)$ を $B(\bar{D}(P))+P(D(P)-\bar{D}(P))+K=B(\underline{D}(P))+P(D(P)-\underline{D}(P))+K=B(D(P))$, $\bar{D}(P)>\underline{D}(P)$ を満す関数とする(図1参照)。仮定1によって, $D(P), \bar{D}(P), \underline{D}(P)$ は一意に決まる。また $\underline{D}(P)<D(P)<\bar{D}(P)$ である。

中間業者の取り引き前在庫水準が $\bar{D}$ と D の間にある, 即ち $D\leqq\bar{Z}\leqq\bar{D}$ とする。そうすれば, $B'(D)=P, B''<0$ によって, 任意の $Z'\neq\bar{Z}$ について

$$B(Z')-P(Z'-\bar{Z})-K\leqq B(D)-P(D-\bar{Z})-K$$
$$=B(\bar{D})-P(\bar{D}-\bar{Z})$$

$D\leqq\bar{Z}\leqq\bar{D}$ であるから, $B''<0$ により, $B'(\bar{Z})\leqq P$。よって, $Z'\neq\bar{Z}$ であれば,

$$B(Z')-C(Z'-\bar{Z})\leqq B(\bar{D})-B'(\bar{Z})(\bar{D}-\bar{Z})\leqq B(\bar{Z})$$

つまり, $B(\bar{Z})=\max_Z\{B(Z)-C(Z-\bar{Z})\}$

同様にして, $\underline{D}\leqq\bar{Z}\leqq D$ であれば,

$$B(\bar{Z})=\max_Z\{B(Z)-C(Z-\bar{Z})\}$$

$\bar{Z}\geqq\bar{D}$ であれば, $B'(D)=P$ により, 任意の Z' について

$$B(D)-P(D-\bar{Z})-K\geqq B(Z')-P(Z'-\bar{Z})-K$$

また, $P=B'(D)>B'(\bar{D})$ より,

$$B(D)-P(D-\bar{Z})-K=B(\bar{D})-P(\bar{D}-\bar{Z})$$
$$\geqq B(\bar{D})-B'(\bar{D})(\bar{D}-\bar{Z})$$
$$\geqq B(\bar{Z})$$

従って, $\bar{Z}\geqq\bar{D}$ の時

$$B(D)-C(D-\bar{Z})=\max_Z\{B(Z)-C(Z-\bar{Z})\}$$

同様にして, $\bar{Z}\leqq\underline{D}$ の時

$$B(D)-C(D-\bar{Z})=\max_Z\{B(Z)-C(Z-\bar{Z})\}$$

以上の結果から次の命題が得られる。

命題 1　$\bar{Z}(t)\leqq\underline{D}(P(t))$ もしくは $\bar{Z}(t)\geqq\bar{D}(P(t))$ であれば, $Z(t)=D(P(t))$。$\underline{D}(P(t))\leqq\bar{Z}(t)\leqq\bar{D}(P(t))$ であれば, $Z(t)=\bar{Z}(t)$。

次に, 価格の変化が中間業者の在庫ストックに対する需要にどのような影響を与えるか検討する。議論を簡単にするため価格変化は $B(Z)$ に何ら影響を与えないと仮定する。そうすると, 仮定1により

(2)　$D'(P)=1/B''(P)<0$

また, $B(\bar{D})+P(D-\bar{D})+K=B(D)$ と $B'(D)=P$ 及び $B''<0$ によって,

(3)　$\bar{D}'(P)=(\bar{D}-D)/(B'(\bar{D})-B'(D))<0$

同様に

(4)　$\underline{D}'(P)=(\underline{D}-D)/(B'(\underline{D})-B'(D))<0$

関数 $\underline{P}(\cdot), \bar{P}(\cdot)$ をそれぞれ $\underline{D}(\cdot), \bar{D}(\cdot)$ の逆関数とする。$\underline{P}(Z)<\bar{P}(Z)$ であり，また $\underline{P}'(\cdot)<0, \bar{P}'(\cdot)<0$ である。$\underline{P}, \bar{P}$ を使うと命題1は次のように書ける。

命題1′ $P(t) \leqq \underline{P}(\bar{Z}(t))$ か $P(t) \geqq \bar{P}(\bar{Z}(t))$ であれば，$Z(t)=D(P(t))$。$\underline{P}(\bar{Z}(t)) \leqq P(t) \leqq \bar{P}(\bar{Z}(t))$ であれば，$Z(t)=\bar{Z}(t)$。

(2), (3), (4)及び命題1′によって，図2の太線が中間業者の在庫ストックに対する需要曲線を示している。取り引き費用 K の存在のために需要曲線は価格に関して不連続である。図2の横軸で $\bar{Z}$ が現有の在庫量を示している。価格が，縦軸上で $\bar{P}(\bar{Z})$ であるか，それよりも高ければ，例えば，P' であれば，図で $\bar{Z}-Z'$ だけ在庫ストックを売る。価格が，縦軸上で $\underline{P}(\bar{Z})$ であるか，それよりも低ければ，例えば，P'' であれば，$Z''-\bar{Z}$ だけ在庫ストックを買う。価格が $\bar{P}(\bar{Z})$ と $\underline{P}(\bar{Z})$ の間であれば，在庫ストック市場で取り引きを行なわない。価格が上昇するにつれて，中間業者の在庫ストックに対する需要は減少する。

$\bar{Z}(t)$ は取り引き前の在庫量を示すが，これは $Z(s)$ の $s=t$ での左極限である。従って，図2で示されるような在庫ストック需要関数の下では，在庫ストック市場で取り引きが成立する度に，中間業者の保有する在庫量は $\bar{Z}(t)$ から $Z(t)$ へジャンプし，不連続な動きを示すことになる。

期間分析を採用した時，$B(Z)$ に対応する関数がどのように定義されるかを本節の最後に示す。Foley (1975) の言う期首分析を仮定して定義する。Z の在庫を当期期初に保有している時の当期の利益 $\Gamma(Z)$ を次のように定義することができる。

$$(5) \quad \Gamma(Z)=-a(Z)-P_1\int_0^\infty xf(x)\,dx + P_2\int_0^\infty yg(y)\,dy$$

ここで，$a(Z)$ は，$Z>0$ の時，当期の倉庫費用等のキャリングコスト，$Z<0$ の時，今迄満されなかった受注の累積に対する今期払うペナルティコストとする。$f(x), g(y)$ は，商品の製造業者からの商品の搬入 x，需要家からの注文 y の主観的分布の密度関数である。また，P_1, P_2 はそれぞれ製造業者からの商品買い入れ値，需要家への商品売り渡し価格を示す。当期期初に在庫 Z を保有することから生じる当期の利益 $\Gamma(Z)$ は，当期の需要家への販売収入から製造業者への支払い代金とキャリングコストを差し引いたものである。$h(w)$ を $w=x-y$，つまり今期の在庫変動の分布の密度関数とする。中間業者が今期末(次期の在庫ストック市場が開かれる直前)に $\bar{Z}$ の在庫を保有していた時，今期末に期待できる将来利益の今期末で測った現在価値を $\Pi(\bar{Z})$ で表わす。今期期初に Z の在庫を保有することから生じる利益の現在価値 $\tilde{B}(Z)$ は，今期に生じる利益と今期期末に残った在庫から期待できる利益の合計であるから，利子率を i で表わせば $\tilde{B}(Z)$ は $\Pi(\bar{Z}), \Gamma(Z)$ によって次のように定義される。

$$(6) \quad \tilde{B}(Z)=\Gamma(Z) + (1+i)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(Z+w)h(w)\,dw$$

f, g, P_1, P_2, P が定常的であるという仮定の下で，$\tilde{B}(Z)$ は，$\Pi(Z)$ を定義する。つまり，$\Pi(Z)$ の定義から

$$(7) \quad \Pi(\bar{Z})=\max_{Z}\{\tilde{B}(Z)-C(Z-\bar{Z})\}$$

が成立せねばならない。(7)は次のことを意味している。f, g 等が定常的であるという仮定の下では，前期末(今期の在庫ストック市場が開かれる直前)に持っている在庫 $\bar{Z}$ から期待される利益の現在価値を示す関数は，今期末でのそれを示す関数 $\Pi(Z)$ と一致せねばならない。そうすると，$\Pi(\bar{Z})$ は，在庫市場で $\bar{Z}$ の一部を売却する(もしくは，在庫を買って在庫を積み増す)ことによる収入(支出)と在庫ストック市場での取り引き後今期期初に残った在庫から得られる利益の合計を最大化したものと等しくなければならない。

(5), (6), (7)を満足する $\tilde{B}(Z)$ が，f, g, P_1, P_2, P が定常的であるという条件の下で，期間分析で $B(Z)$ に対応する関数である。

3 価格，在庫保有量の時間を通じての動き

前節の図2で典型的に示されるような在庫ストック需要関数を持った中間業者が相い対する場所が在庫ストック市場である。在庫ストック市場では，中間業者の在庫ストックの需要の合計が現在存在する，つまり現在各中間業者に保有されている在庫ストックの合計に等しくなるように財の価格が決まる。この節では在庫市場で決定される価格を特に動学的に検討する。前節でみたように，取り引き費用の存在によって在庫ストック需要関数は価格に対して連続にならない。このことによって幾つかの問題が生じる。第1の問題は，言うまでもなく，在庫ストック市場の均衡は存在するかという問題である。第2に，価格がある中間業者の $\bar{P}(\bar{Z})$ 以上であるか，$\underline{P}(\bar{Z})$ 以下である時には中間業者の在庫保有量はジャンプすることになるが，ジャンプはどの程度頻繁に起るのであろうか。どの時点でもジャンプが起って各中間業者の保有する在庫水準が定義できないといった事態が生じたり，時間を追っての各中間業者の在庫保有量を示すグラフが全くでたらめな動きをすることはないであろうか。更に，需要関数が不連続な時でも在庫ストック市場で決まる価格は，何らかの意味で，時間に対して連続な動きを示すであろうか。それとも全く不連続な動きを示すのであろうか。第1の問題は，中間業者の continuum を仮定することによって解決できるかもしれないが，本稿では立ち入らない。本稿では，在庫ストック市場の均衡を仮定した上で，上の第2，第3の問題，中間業者の保有在庫水準や価格の動きの連続性，不連続性を検討する。

この節では，前節で考えたような中間業者が m 人存在するとする。各人の在庫保有水準を区別するために $Z_k(t)$ で t 時点での k 番目の中間業者の在庫保有量を示す。第2節で導入された他の変数，記号についても，同様に，添字 k を付して，各中間業者の変数，関数であることを示す。関数 $Z_k(P, \bar{Z}_k)$ は，命題1または1′で特徴化された k 番目の中間業者の在庫ストック需要関数を示す。即ち，

$$Z_k(P,\bar{Z}_k)=\begin{cases} D_k(P) & (\bar{P}_k(\bar{Z}_k)<P \text{ の時}) \\ D_k(P) \text{ または，} \bar{Z}_k & (\bar{P}_k(\bar{Z}_k)=P \text{ の時}) \\ \bar{Z}_k & (\underline{P}_k(\bar{Z}_k)<P<\bar{P}_k(\bar{Z}_k) \text{ の時}) \\ D_k(P) \text{ または } \bar{Z}_k & (\underline{P}_k(\bar{Z}_k)=P \text{ の時}) \\ D_k(P) & (\underline{P}_k(\bar{Z}_k)>P \text{ の時}) \end{cases}$$

この関数を使うと t 時点での在庫市場の均衡は，

$$(8)\qquad \sum_{k=1}^{m} Z_k(P(t),\bar{Z}_k(t)) \ni \sum_{k=1}^{m}\bar{Z}_k(t)$$ [3]

で定義される。t 時点の価格 $P(t)$ は，(8)が成立するように決まる。(8)式を成立させるような価格は必ずしも一意ではない。そこで，t 時点での均衡価格の集合を $E(t)$ で表わす。即ち，$E(t)$ を

$$E(t)=\left\{P \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} Z_k(P,\bar{Z}_k(t)) \ni \sum_{k=1}^{m}\bar{Z}_k(t)\right\}$$

と定義する。先に述べたように $E(t)$ は空でありうるが，本稿では次のように仮定する。

仮定 2 $E(t)$ は常に空でない。

各中間業者の保有する在庫量 $Z_k(t)$ は次の(9)，(10)，(11)，(12)，(13)式に従って動く。まず定義により，

$$(9)\qquad \lim_{s\to t-0} Z_k(s)=\bar{Z}_k(t)$$

が成り立つ。市場均衡の定義から，当然，

$$(10)\qquad Z_k(t)\in Z_k(P(t),\bar{Z}_k(t)) \text{ で}$$

$$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t)=\sum_{k=1}^{m}\bar{Z}_k(t)$$

が成立する。k 番目の中間業者への t 時点での商品の純流入(製造業者からの財の搬入から需要家からの注文を差し引いたもの)を $\zeta_k(t)$ で表わす。$\zeta_k(t)$ は t について連続であると仮定する。次の関係が成立する。

$$(11)\qquad \lim_{h\to+0}\frac{Z_k(t+h)-Z_k(t)}{h}=\zeta_k(t)$$

$$(12)\qquad \lim_{h\to+0}\frac{Z_k(t-h)-\bar{Z}_k(t)}{-h}=\zeta_k(t)$$

---

3) ある k について $P(t)=\underline{P}_k(\bar{Z}_k(t))$ もしくは，$P(t)=\bar{P}_k(\bar{Z}_k(t))$ が成立する時，$Z_k(P(t),\bar{Z}_k(t))$，従って，$\sum_{k=1}^{m} Z_k(P(t),\bar{Z}_k(t))$ は多価関数となるので，(8)のように等式でなく包含関係として均衡を定義する。

(11), (12)は，在庫市場で中間業者が在庫を売り買いする直前，直後の在庫の変動が，製造業者，需要家からの商品の純流入率に等しいことを意味する。商品が$\zeta_k(t)$の率で流入するため，中間業者の在庫保有量は$\zeta_k(t)$の率で増加する傾向を持つ。しかしながら，中間業者が在庫の取り引きを行なえば，(9), (10)によって明らかなように，その時点での在庫の変化率$dZ_k(t)/dt$は定義することができない。その場合，在庫取り引きの直前，直後の在庫の変化率は$\zeta_k(t)$に等しい。各中間業者の在庫の変化率は定義できなくとも，経済全体としての在庫の変化率は常に定義できて

$$(13) \qquad d\left(\sum_{k=1}^{m} Z_k(t)\right)\Big/ dt=\sum_{k=1}^{m}\zeta_k(t)$$

が成り立つ。

仮定1, 2に加えて次の2つの仮定を置く。

仮定 3　任意のkについて，$P\to\infty$であれば，$D_k(P), \bar{D}_k(P), \underline{D}_k(P)\to 0$。また，$P\to 0$であれば，$D_k(P), \bar{D}_k(P), \underline{D}_k(P)\to\infty$。

この仮定によって，価格が無限大になれば，在庫需要はゼロになり，価格がゼロになれば，在庫需要は無限大になる。

仮定 4　任意の$t\geqq 0$に対して

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \zeta_k(s)\,ds+\sum_{k=1}^{m} Z_k(0)>0$$

(13)と合せれば，この仮定は，経済全体に存在する在庫が有限の時間の内に枯渇することはないことを意味する。

$E(t)$が単一の要素からなる保証はない。そうすると，(8), (9), (10), (11), (12), (13)で定義される各中間業者の保有量の動学的な変化は，$E(t)$のうちからどの価格を選ぶかによって左右されるという恣意性が生じる可能性がある。しかしながら，$E(t)$が単一要素から成るのでない時には，全ての中間業者が売り買いしない時である。誰かが取り引きをしていれば，$E(t)$は単一要素からなる。従って，$E(t)$が必ずしも単一要素から成らなくとも，(8), (9), (10), (11), (12), (13)で決まる$Z_k(t)$の動きは一意に決まる。このことは，次の命題によって示される。

命題 2　もし$E(t)$が相異なる2要素を含めば，任意の$P\in E(t)$，全てのkについて，$\bar{Z}_k(t)=Z_k(P, \bar{Z}_k(t))$である。

証明）$E(t)\ni P', P''$で$P'<P''$とする。(10)により$Z_k'\in Z_k(P', \bar{Z}_k)$, $Z_k''\in Z_k(P'', \bar{Z}_k)$, $\sum_{k=1}^{m} Z_k'=\sum_{k=1}^{m} Z_k''=\sum_{k=1}^{m}\bar{Z}_k$となる$Z_k', Z_k''$が存在する。ここである$i$について$\bar{Z}_i\neq Z_i'$とする。命題1′と(2)によって，任意の$k$について，$Z_k'\geqq Z_k''$。但し，$\bar{Z}_i\neq Z_i'$であるような$i$については，この不等式は強い意味で成立する。従って，

$$\sum_{k=1}^{m} Z_k'>\sum_{k=1}^{m} Z_k''$$

これは仮定に反する。

あるiについて$\bar{Z}_i\neq Z_i''$が成立するとしても同じようにして矛盾を導びくことができる。▌

在庫市場で決まる価格は，有限時間のうちに無限大になったり，ゼロになったりしない。これは次の命題によって示される。

命題 3　仮定3, 4の下で，任意の$t(\geqq 0)$について$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t)>0$。$t_n\geqq 0$, $P(t_n)\in E(t_n)$で$\{t_n\}$が有界とすれば，$\{P(t_n)\}$も有界であり，$\{P(t_n)\}$のどの部分列もゼロに収束することはない。

証明）(13)式及び仮定4から$t\geqq 0$で$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t)>0$は明らか。

$\{t_n\}$が有界で$\{P(t_n)\}$が有界でないとする。一般性を失うことなく，$\lim_{n\to\infty} P(t_n)=\infty$，またある$t'>0$に対して$\lim_{n\to\infty} t_n=t'$と仮定できる。命題1によって任意の$k$について$\bar{D}_k(P(t_n))\geqq Z_k(t_n)$。仮定3，及び$P(t_n)\to\infty$によって，$\bar{D}_k(P(t_n))\to 0$であるから$Z_k(t_n)\to 0$。従って，$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t_n)\to 0$。一方，$t_n\to t'$であるから，(13)及び仮定4によって，

$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t_n) \to \sum_{k=1}^{m} Z_k(t') = \sum_{k=1}^{m} Z_k(0) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^{t'} \zeta_k(s)\,ds >$ 0。これは矛盾である。

次に，$t_n \to t', P(t_n) \to 0$ とする。命題1によって，$\underline{D}_k(P(t_n)) \leqq Z_k(t_n)$。仮定3によって，$\underline{D}_k(P(t_n)) \to \infty$ となるから $Z_k(t_n) \to \infty$。つまり，$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t_n) \to \infty$。一方，$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t)$ は連続だから，$\sum_{k=1}^{m} Z_k(t_n) \to \sum_{k=1}^{m} Z_k(t') = \sum_{k=1}^{m} Z_k(0) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^{t'} \zeta_k(s)\,ds$ となる。これは矛盾である。∎

次の命題4, 5が本稿の目的である。これらの命題は，それぞれ，時間が経つにつれ，中間業者の在庫保有量と在庫ストック市場で決まる価格がどのように変化するかを特徴づける。命題4, 5の直観的な説明，及び図解は，命題の提示，証明の後に行なう。

命題 4　$Z_k(t)$ は，(8), (9), (10), (11), (12), (13)に従って動くものとする。仮定1, 2, 3, 4が成立するものとする。この時，$Z_k(t)$ が不連続になるような時点 t は有限区間の内には有限個しかない。

証明）ある時点 t^* で $Z_i(t)$ が不連続で，t^* のどんな右近傍にも $Z_i(t)$ の不連続点があったとする。そうすれば，命題1により $s_n > s_{n+1}, s_n \to t^*$ となる点列 $\{s_n\}$ があって，$\bar{Z}_i(s_n) \leqq \underline{D}_i(P(s_n))$ もしくは，$\bar{Z}_i(s_n) \geqq \bar{D}_i(P(s_n))$ が成立する。$\{s_n\}$ のある部分列では，2つの不等式のどちらか一方のみが成立している。前者の不等式がそのような部分列で常に成立しているとする。記号を簡略化するためこの部分列も $\{s_n\}$ で表わすことにする。取り引きには売り手と買い手が存在しなければならないから，各 n にある j があって，$\bar{Z}_j(s_n) \geqq \bar{D}_j(P(s_n))$ が成立する。n は無限個あるのに対し，j は有限個しかないから，一般性を失うことなく，ある j について任意の n で $\bar{Z}_j(s_n) \geqq \bar{D}_j(P(s_n))$ と仮定できる。

$\bar{Z}_i(t)$ の定義によって，$s_{n+1} < s_n' < s_n$ となるある s_n' をとれば，$Z_i(s_n') - 1/n \leqq \underline{D}_i(P(s_n))$，且つ $Z_j(s_n') + 1/n \geqq \bar{D}_j(P(s_n))$。命題3によって，一般性を失うことなく，$P(s_n)$ はある正の値 P^* に収束すると仮定できる。そうすると，(11)により，$Z_k(t)$ は右連続であり，また $s_n' \to t^*$ が成立するから，$Z_i(t^*) \leqq \underline{D}_i(P^*), Z_j(t^*) \geqq \bar{D}_j(P^*)$。

$Z_i(t)$ は t^* で不連続であるから，命題1によって，

$$\underline{D}_i(P(t^*)) < Z_i(t^*) = D_i(P(t^*)) < \bar{D}_i(P(t^*))$$

$Z_j(t)$ は t^* で必ずしも不連続ではないから，命題1によって

$$\underline{D}_j(P(t^*)) \leqq Z_j(t^*) \leqq \bar{D}_j(P(t^*))$$

この2つの不等式を先の不等式と合せると，$\underline{D}_i(P(t^*)) < \underline{D}_i(P^*), \bar{D}_j(P(t^*)) \geqq \bar{D}_j(P^*)$ が成立せねばならない。(3), (4)により，$P(t^*) > P^*$ 及び $P(t^*) \leqq P^*$。これは矛盾である。$\{s_n\}$ のある部分列で $\bar{Z}_i(s_n) \geqq \bar{D}_i(P(s_n))$ が常に成立すると仮定しても同じように矛盾に導びくことができる。以上から，$Z_k(t)$ が $t = t_1$ で不連続であれば，t_1 からある $t_2 (> t_1)$ まで $Z_k(t)$ は連続であり，t_2 で初めて不連続となる。このようにして点列 $\{t_n\}$ を定義することができる。

命題1によって，$Z_k(t_n) = D_k(P(t_n))$ であり，また $\bar{Z}_k(t_n) \geqq \bar{D}_k(P(t_n))$，もしくは $\bar{Z}_k(t_n) \leqq \underline{D}_k(P(t_n))$ が成立する。従って，(9), (10), (11), (12)によって

$$(14)\qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \zeta_k(s)\,ds = \bar{Z}_k(t_{n+1}) - Z_k(t_n) \geqq \bar{D}_k(P(t_{n+1})) - D_k(P(t_n))$$

もしくは，

$$(15)\qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \zeta_k(s)\,ds = \bar{Z}_k(t_{n+1}) - Z_k(t_n) \leqq \underline{D}_k(P(t_{n+1})) - D_k(P(t_n))$$

が成立する。(14), (15)のうち少なくともどちらか1つが無限個の n について成立する。(14)が無限個の n について成立するとする。一般性を失うことなく，(14)が任意の n について成立すると仮定できる。$\zeta_k(t)$ は連続であるから $t_n \leqq t_n' \leqq t_{n+1}$ であるある t_n' をとれば，(14)は

$$(16)\qquad \zeta_k(t_n') = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \zeta_k(s)\,ds / (t_{n+1} - t_n) \geqq [\bar{D}_k(P(t_{n+1})) - D_k(P(t_n))] / (t_{n+1} - t_n)$$

t_n が有限の値 t' に収束するとする。命題3に

図 3　各中間業者の保有在庫の動き

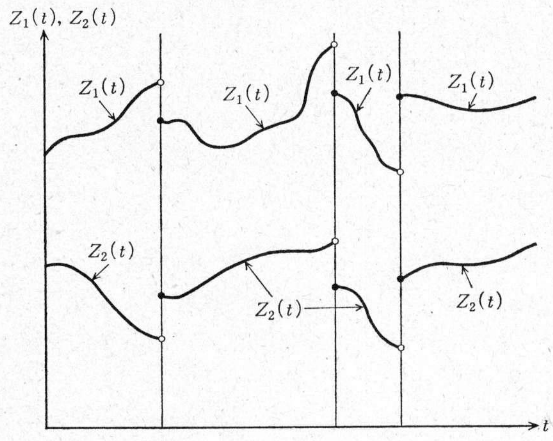
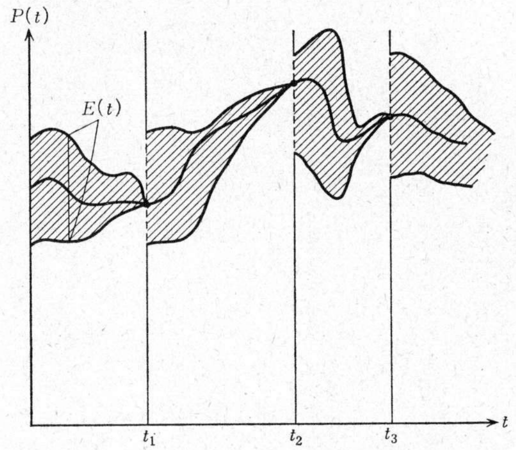


図 4　在庫ストック市場での価格の動き



より，$P(t_n)$はある値$P'(>0)$に収束すると仮定できる。そうすると，$\bar{D}_k, \underline{D}_k$は連続であり，$\bar{D}_k(P)>\underline{D}_k(P)$であるから，(16)の最後の辺は，$n\to\infty$ の時無限大になる。しかしながら，(16)の最初の辺は$\zeta_k(t')$に収束する。これは矛盾である。

(15)が無限個のnについて成立すると仮定しても同じように矛盾に導びくことができる。

以上から$t_n\to\infty$ でなくてはならない。即ち，有限区間には$Z_k(t)$の不連続点は有限個しか存在しない。▌

命題 5　$Z_k(t)$は(8)，(9)，(10)，(11)，(12)，(13)に従って動き，仮定1, 2, 3, 4が成立しているとする。この時，$E(t)$は下半連続である。

証明）命題4によって，$k=1, 2, \cdots, m$の少なくともどれか1つについて$Z_k(t)$が$t\geqq 0$で不連続になる時点は，$t_n<t_{n+1}$である点列$\{t_n\}$で表わされる。$t_n\to\infty$であるか，$\{t_n\}$は有限列である。

$P\in E(t)$とする。命題1によって任意のkについて$\underline{D}_k(P)\leqq Z_k(t)\leqq \bar{D}_k(P)$。よって，任意の$k$及び任意の$t$で

(17)　　$\underline{P}_k(Z_k(t))\leqq P\leqq \bar{P}_k(Z_k(t))$

$t_n\leqq t<t_{n+1}$であるtで(17)式の不等号が全てのkについて両方とも強い意味で成立したとする。$\underline{P}_k(\cdot), \bar{P}_k(\cdot)$は連続関数であり，$Z_k(s)$は$t_n<s<t_{n+1}$で連続であるから，$t$に十分近い$s(>t_n)$では

$$\underline{P}_k(\bar{Z}_k(s))=\underline{P}_k(Z_k(s))<P<\bar{P}_k(Z_k(s))$$
$$=\bar{P}_k(\bar{Z}_k(s))$$

つまり，$P\in E(s)$。従って，$E(t)$は$t_n<t<t_{n+1}$で下半連続，$t=t_n$で右から下半連続である。

次に$t_n\leqq t<t_{n+1}$であるtで，あるiについて(17)式のどちらかの不等式が等号で成立したとする。$\underline{P}_i(Z_i(t))=P$とする。そうすれば

$$P=\max_k \underline{P}_k(Z_k(t))$$

$\underline{P}(s)$を$\underline{P}(s)=\max_k P_k(Z_k(s))$と定義する。$t_n<s<t_{n+1}$で$Z_k(t)$は連続，$s=t_n$で右から連続であるから，$\underline{P}(s)$は$t_n\leqq t<t_{n+1}$で(右)連続。よって$s>t_n$とする時，$\lim_{s\to t}\underline{P}(s)=P$。

また，(17)によって$\underline{P}_k(Z_k(s))\leqq \underline{P}(s)<\bar{P}_k(Z_k(s))$が成立し，また，$t_n<s<t_{n+1}$では$Z_k(s)=\bar{Z}_k(s)$が成立するから，

$$\underline{P}_k(\bar{Z}_k(s))\leqq \underline{P}(s)\leqq \bar{P}_k(\bar{Z}_k(s))$$

従って，命題1′により，$t_n<s<t_{n+1}$で$\underline{P}(s)\in E(s)$。

以上から$t_n\leqq t<t_{n+1}$で$\underline{P}_i(Z_i(t))=P$があるPで成立する時も，$E(t)$は$t_n<t<t_{n+1}$で下半連続，$t_n=t$で右から下半連続である。$\bar{P}_i(Z_i(t))=P$があるPについて成立するとしても同様に$t_n\leqq t<t_{n+1}$

で $E(t)$ が(右)下半連続であることを示すことができる。

次に $E(t)$ が t_n で左から下半連続であることを示す。t_n では，命題2によって $P(t_n)$ は $E(t_n)$ の唯一の要素である。また，ある i, j について $\bar{Z}_i(t_n) < Z_i(t_n)$, $\bar{Z}_j(t_n) > Z_j(t_n)$ である。命題1′により，

$$(18)\qquad \bar{P}_j(\bar{Z}_j(t_n)) \leqq P(t_n) \leqq \underline{P}_i(\bar{Z}_i(t_n))$$

が成立せねばならない。

$t_{n-1} < \tau_q < t_n (q=1, 2, \cdots)$ で $\tau_q \to t_n$ となる点列 $\{\tau_q\}$ を考える。$P(\tau_q) \in E(\tau_q)$ とする。命題3によって $P(\tau_q)$ はある正数 P に収束すると仮定できる。$P \notin E(t_n)$, 従って $P \neq P(t_n)$ とすれば，(18)より，$\bar{P}_j(\bar{Z}_j(t_n)) < P$ もしくは $P < \underline{P}_i(\bar{Z}_i(t_n))$。$\bar{P}_j(\cdot)$, $\underline{P}_j(\cdot)$ は連続関数であり，$\lim_{t \to t_n - 0} Z_k(t) = \bar{Z}_k(t_n)$ であるから，十分大きな q をとれば，

$$P(\tau_q) > \bar{P}_j(Z_j(\tau_q))$$

もしくは

$$P(\tau_q) < \underline{P}_i(Z_i(\tau_q))$$

が成立。ところが，$t_{n-1} < t < t_n$ では，$Z_k(t)$ は連続であるから命題1′により $\underline{P}_k(Z_k(\tau_q)) = \underline{P}_k(\bar{Z}_k(\tau_q)) \leqq P(\tau_q) \leqq \bar{P}_k(\bar{Z}_k(\tau_q)) = \bar{P}_k(Z_k(\tau_q))$ となるから矛盾である。

よって，$P(\tau_q)$ は $P(t_n)$ に収束せねばならない。命題2によって $P(t_n)$ は $E(t_n)$ の唯一の要素であるから，結局，$E(t)$ は $t=t_n$ で左から下半連続である。▌

図3, 4が命題4, 5をそれぞれ図解している。図3で示されるように，各中間業者の保有する在庫量は，間歇的にしかジャンプしない。各人の保有する在庫水準は常に不連続になるわけでなく，また中間業者は常に在庫ストック市場で取り引きを行なっているわけでなく，間歇的にしか行なわない。在庫ストック市場で取り引きを行なう時点と時点の間は，製造業者からの商品の流入，需要家への流出によって保有在庫水準は上下するのみである。

図4で斜線で影をつけた帯の各時点での幅が，$E(t)$，つまり在庫市場をクリアーする均衡価格の集合を示している。在庫ストック市場では，常に在庫の売り買いがされるわけではない。実際に在庫の売り買いがされた時(図4では t_1, t_2, t_3 時点)には，図4で示されるように価格は一意に決まる。在庫ストック市場で決まる価格が時間の経過に対して連続に動くように均衡価格を選ぶことができる(例えば図4の斜線の帯の中の太線のように)。取り引き費用の存在によって中間業者の在庫ストックに対する需要関数は不連続となり，各中間業者の保有する在庫の水準は時々不連続な動きを示すが，在庫市場を均衡させる価格の動きは連続でありつづけることができる。

(東京経済大学)

参考文献

[1] Arrow, K. J., S. Karlin, and H. Scarf, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford, California: Stanford University Press, 1958.

[2] Foley, D. K., "On Two Specifications of Asset Equilibrium in Macroeconomic Models," *Journal of Political Economy*, Vol. 83, No. 2 (April, 1975), pp. 303–324.

[3] Otani, K., "A Framework for the Problem of Disequilibrium Analysis," presented at Econometric Society World Congress held at Aix-en-Provence, August-September 1980.

[4] ＿＿＿＿, "The Price Determination in the Inventory Stock Market: A Disequilibrium Analysis," *International Economic Review*, Vol. 24, No. 3 (October, 1983), pp. 709–719.

[5] Scarf, H., "The Optimality of (S, s) Policy in the Dynamic Inventory Problem," in K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes, ed., *Mathematical Methods in Social Sciences* (Stanford, California: Stanford University Press, 1960), pp. 176–202.

[6] 小谷　清「市場経済分析の新たな枠組」『現代経済』30 (Spring, 1978), pp. 162–179.