

書 評

D. B. Percival and A. T. Walden: Wavelet Methods for Time Series Analysis,
Camb. Ser. Stat. Probab. Math., 4, Cambridge Univ. Press, 2000 年, xxvi + 594 ページ.

田 中 勝 人

1 はじめに

ウェーブレット解析の始まりは、1980 年代初頭にフランスの石油探査技師 J. Morlet が考案した解析手法にあるとされている (文献 [3]). Morlet は、油床が存在する地層を特定化するために地中に振動を与え、人工的に作り出された地震波を解析する研究に従事していたが、実際に観測される地震波は、油床以外の地層や異質物の影響により、多くの不規則で局所的なノイズを含んでおり、伝統的なフーリエ変換による解析方法では満足いく結果が得られなかった。すなわち、規則的な三角関数の重ね合わせだけでは、ノイズを含んだ地震波を表現することに限界があった。そこで、短い波 (ウェー

レット)を局所的に拡大縮小したり, 平行移動したりすることにより, 地震波を時間と周波数の両面から解析する手法を考案したのである. これがウェーブレット解析の始まりである.

このように, ウェーブレット解析は, きわめて実用的な理由から工学の分野で生まれた手法である. したがって, 当初は, 工学的な観点から叙述された書物が多かったが, その後, Daubechies [1] らによって, 数学的な観点からウェーブレットの理論が精緻化された. ウェーブレット解析は, フーリエ解析と同様に実解析の分野において, 現在でも数学の研究対象である (文献 [2]).

他方, 本書で扱っているウェーブレットは, 統計科学におけるデータ解析の手法としてのウェーブレットであり, この分野における書物としては初めてのものである. ウェーブレットの統計的手法が応用されるデータは, 主として, 画像データと時系列データに大別することができるが, 本書では時系列データに焦点を絞って議論が進められている.

2 本書の構成と概略

本書は11の章からなっている. まず, 第1章は, ウェーブレットの基本的な考え方が連続時間確率過程の場合に説明されている. そのために, まず,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1$$

をみたすウェーブレット関数 $\psi(t)$ が導入される. 第1の条件は, $\psi(t)$ が0の周りを上下運動する様子を想起させる. 第2の条件は, その上下運動の全体が有限であることを示唆する. このとき, R 上で2乗可積分な連続時間時系列 $\{x(t)\}$ のウェーブレット変換は,

$$C_{a,b}(\psi, x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \tilde{\psi}_{a,b}(t) dt$$

で定義される. ここで, $\tilde{\psi}_{a,b}(t) = \psi((t-b)/a)/\sqrt{a}$ ($0 < a < \infty, -\infty < b < \infty$) である. パラメータ a は, 波長の拡大・縮小を制御するスケール・パラメータであり, a が小さいほど波長を縮小し, 大きくなるにつれて拡大する. この意味で, $1/a$ が周波数の役割を果たすことになる. 他方, b はシフト・パラメータであり, 波長の拡大・縮小の基準時点を調整する時間的な役割をもっている.

例えば, 最も単純なウェーブレット関数である Haar 関数

$$\psi_H(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & (-1 < t \leq 0), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & (0 < t \leq 1), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に対するウェーブレット変換は,

$$C_{a,b}(\psi_H, x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[\int_b^{b+a} x(t) dt - \int_{b-a}^b x(t) dt \right]$$

となる. これは, 時点 b で隣り合う幅 a の2つの区間上での $x(t)$ の平均 (の定数倍) の差を計算したものである. パラメータ a を大きくすれば, $x(t)$ の大局的な振る舞いを見ることができ, 小さくすれ

ば、局所的な振る舞いを見ることが可能になる。もっと一般のウェーブレット関数を使ったウェーブレット変換では、このような単純な解釈は困難であるが、基本的な役割は同じである。第1章の後半では、本書の中心である離散時間時系列のウェーブレット変換 (DWT) が説明されている。

第2章ではフーリエ解析、第3章では直交変換について、それぞれ統計学的な観点から説明されている。例えば、第2章では、時系列データに対するフーリエ変換のさまざまな性質が述べられ、第3章では、データ変換の際に有用な直交行列が詳しく説明されている。

これらの準備の後、第4章ではDWTがフィルターの概念を使って議論されている。ここで使われているウェーブレットは、Daubechies [1] により考案された Daubechies, 対称性をもつ Symmlets, そして、モーメント消失条件を課した Coiflets などである。DWTは、データ数 T が2のべき乗の場合に、 T のオーダーで計算可能であることが示される。そのための方法は、ピラミッド・アルゴリズムと呼ばれ、計算方法が詳しく説明されている。ウェーブレットは、レベル1において最も解像度の高い、高周波の変換をもたらす。そのために、局所的な時点での計算が必要であり、その結果、最も多くの要素 $T/2$ 個を含むことになる。一般に、レベル j においては $T/2^j$ 個のウェーブレットが計算されるが、レベルが上がるにつれて、次第に解像度の低い、低周波の変換に移行するので、大局的な時点での計算となり、要素も少なくなる。

第5章では、直交しないウェーブレット変換として、Maximal Overlap DWT (MODWT) が説明されている。通常のDWTが、レベル j に $T/2^j$ 個のウェーブレットをもたらすのに対して、MODWTは、downsampling せずに、各レベルに T 個のウェーブレットをもたらす。したがって、MODWTは、変換の際に重複やムダを生じる。計算量も $T \log_2 T$ に増えることが知られている。しかし、(i) 標本サイズが2のべき乗でなくともよい、(ii) 結果が時系列の初期時点の取り方に依存しない、(iii) 原系列との位相のずれを生じない、などのDWTにない利点がある。

第6章は、離散ウェーブレット・パケット変換 (DWPT) について論じている。DWPTは、各レベルに同数の T 個の要素をもたらすし、しかも、レベル j においては周波数を 2^j 個の周波数帯に等分割した上で、各周波数帯に $T/2^j$ 個の要素を振り分ける変換である。したがって、各レベルにおいて、よりきめの細かい周波数成分を抽出する働きがあるので、季節性を含むようなデータの分析に適している。DWPTは、DWTと同様に直交ウェーブレット変換である。さらに、DWPTに対しても、downsampling せずに、各レベルの各周波数帯に T 個のウェーブレットをもたらす非直交変換として、Maximal Overlap DWPT (MODWPT) が説明されている。

第7章は、統計学と時系列解析の基礎について述べられている。時系列解析の説明では、長期記憶過程、フラクショナル・ブラウン運動 (fBm), $1/f$ ノイズをもつ確率過程などが紹介されている。これらの確率過程は、ウェーブレット変換が長所を発揮できるクラスであり、モデルの推定にとって、非常に有用である。この点については、第8章および第9章で詳述されている。

第8章では、原系列が非定常な長期記憶過程やfBmであっても、ウェーブレット変換することにより、レベルごとに、ほぼ無相関で定常な系列が実現することが示される。したがって、レベルごとの分散は時間に依存しないものとなり、それはウェーブレットから推定可能となる。この分散をウェーブレット分散という。この章では、そのような性質をもつような実際のデータを使って、ウェーブレット分散が推定される。

第9章では、ウェーブレット分散の推定を一步進めて、モデルに含まれる差分パラメータの推定が

考察されている。すなわち、次の長期記憶モデル

$$(1-L)^d x_t = u_t = \phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t \quad (t=1, \dots, T)$$

を考える。ここで、 L はラグ・オペレータ、 u_t は定常な誤差項であり、 d が推定すべき差分パラメータである。ここで、ウェーブレット・フィルターの幅 m を $m \geq 2d$ となるように取れば、DWTの各レベルごとの定常性が保証される。このとき、レベル j のウェーブレット分散は時点に依存せずに、

$$\sigma_j^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4^d} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|H_{j,m}(\omega)|^2 |\theta(e^{2\pi i\omega})|^2}{(\sin^2 \pi\omega)^d |\phi(e^{2\pi i\omega})|^2} d\omega$$

で与えられる。ここで、 $H_{j,m}(\omega)$ は、幅 m 、レベル j のウェーブレット・フィルターの伝達関数である。今、ウェーブレット・フィルターがオクターブ周波数帯 $[-1/2^j, -1/2^{j+1}]$ と $[1/2^{j+1}, 1/2^j]$ 上のバンド・パス・フィルターで近似できる場合を考えると、

$$|H_{j,m}(\omega)|^2 \approx \begin{cases} 2^j & \left(\frac{1}{2^{j+1}} \leq |\omega| \leq \frac{1}{2^j} \text{ のとき} \right), \\ 0 & \text{(その他)} \end{cases}$$

となる。バンド・パス・フィルターは、いわば理想的なフィルターであり、有限幅のフィルターでは実現不可能であるが、現実にはフィルターの幅 m を大きくすることで上の近似式が正当化される。さらに、各オクターブ周波数帯上で $|\theta(e^{2\pi i\omega})|^2/|\phi(e^{2\pi i\omega})|^2$ を定数とみなすことができれば、次の近似式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \sigma_j^2 &\approx \frac{2^{j+1}\sigma_\varepsilon^2}{4^d} \int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j} \frac{|\theta(e^{2\pi i\omega})|^2}{(\sin^2 \pi\omega)^d |\phi(e^{2\pi i\omega})|^2} \approx K_1 2^j \int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j} \omega^{-2d} d\omega \\ &= K_2 4^{jd}. \end{aligned}$$

この近似式において、未知のウェーブレット分散 σ_j^2 を、与えられたデータの DWT から得られる各レベルの標本分散 $\hat{\sigma}_j^2$ で置き換えることにより、レベルごとの対数線形回帰式

$$\log \hat{\sigma}_j^2 = a + d \log 4^j + e_j \quad (j = j_0, j_0 + 1, \dots, j_1)$$

が得られる。これから、差分パラメータ d を最小 2 乗推定により求めることができる。ただし、ウェーブレット回帰では、近似 $\sin^{-2d} \omega \approx \omega^{-2d}$ を使っており、レベル 1 では無効なので、 j_0 は少なくとも 2 である。第 9 章では、最尤推定も行っており、最小 2 乗推定よりも精度がよいことが示されている。

第 10 章は、シグナルに雑音加わった観測値から、シグナルを抽出する問題を扱っている。基本的な考え方は、ウェーブレットの中で、絶対値が閾値を超えないものを取り除いたあとで、ウェーブレット逆変換することにより、シグナルを推定しようとするものである。その際、閾値の設定が問題となり、さまざまな方法が議論されている。

最後の第 11 章は、ウェーブレットの数学理論を論じた章であり、多重解像度解析による関数の近似方法や Daubechies のウェーブレットの導出方法などが説明されている。

3 本書の長所

本書の長所としては、まず、説明が丁寧であり、self-containedである点が挙げられる。ウェーブレットの数学理論に関しても、また、統計学の理論に関しても、わかりやすく、きちんと述べられており、他の書物を参照することは不要である。読者の理解を第一義に考えており、本文で述べている事実についても、読者の理解を深めるために多くの問題が本文の間にはさまれ、それらの完全な解答が巻末に載せられている。そして、各章末にも、発展的な練習問題が提供されている。さらに、筆者らは、次の URL に本書のためのサイトを作っている。

<http://faculty.washington.edu/dbp/wmtsa.html>

このサイトでは、本書を講義用を使用する際のノート、実際に使われたデータのファイル、ウェーブレット解析のためのソフトウェアの紹介、章末の練習問題の解答などが入手できる。これらの便宜を図っている著者らの姿勢は、本書の内容と相まって、極めて教育的であり、非常に高く評価されると考える。

本書は、ウェーブレット解析を従来の時間解析やフーリエ解析と比較しつつ、その有効性を統計学的に丹念に解き明かしたものであり、理論と応用が絶妙のバランスで配置されている。ウェーブレットの理論に興味をもつ読者と応用に興味を持つ読者双方にとって、非常に貴重な書物である。欲を言えば、多次元時系列のウェーブレット解析にも触れてほしかったという気がするが、それはウェーブレット解析の今後の課題でもあろう。

文 献

[1] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **61**,

SIAM, Philadelphia, 1992.

[2] 猪狩惺, 実解析入門, 岩波書店, 1996.

[3] 榊原進, ウェーブレット ビギナーズガイド, 東京電機大学出版局, 1995.

(2007年12月21日提出)

(たなか かつと・一橋大学大学院経済学研究科)