

相互作用型の格付変更強度モデルによる 格付変更履歴データの分析

中川 秀敏 *

* 一橋大学大学院国際企業戦略研究科

概要. アフィン・ジャンプ過程を用いて複数のタイプの相互作用型イベント発生強度モデルを構築する. 具体的には, 企業群を3つの業種カテゴリに分類して, 各カテゴリについて格下げ/格上げに対する相互作用型イベント発生強度モデルを設定して, 日本企業の格付変更履歴データを分析して, 各カテゴリの格付変更についての自己励起性および業種カテゴリ間の格付変更の相互作用性の有無を検証する.

Analyses of Records of Credit Rating Transition with Mutually Exciting Rating-change Intensity Model

Hidetoshi Nakagawa*

*Graduate School of International Corporate Strategy, Hitotsubashi University

Abstract. This paper presents a new modeling of occurrence intensities for several types of event with multivariate affine jump processes. We actually try the maximum likelihood estimation for a specific model that classifies enterprises into three categories with some historical record of downgrades and upgrades for the Japanese enterprises, so that we can examine whether some self-exciting effects and mutually exciting effects of downgrades or upgrades are observed among the three categories.

1. はじめに

本研究の目的は, 多次元アフィン・ジャンプ過程を用いて複数のタイプのイベント発生強度をモデル化し, それをポートフォリオの格付変更メカニズムの分析に応用する方法を提案することである.

導入するモデルの最大の特徴は, 各タイプのイベント発生強度が, それと同タイプのイベント発生強度だけでなく異なるタイプのイベント発生強度にも影響を及ぼす構造が取り入れられている点である. 言い換えれば, イベント発生強度に自己励起的 (self-exciting) な構造だけでなく, 相互作用 (mutually exciting) の構造も取り入れられているモデルということになる. このようなモデルの特徴だけ見ると, Hawkes [6] が取り上げている相互作用型の点過程 (mutually exciting point process) の拡張と考えることもできる^{*1}. Errais

^{*1} Hawkes [6] は定常の場合について数学的性質を論じ, 相互作用型モデルによって, 帯状疱疹のような病

et al. [4] はトップダウンの視点から、ポートフォリオのデフォルト強度モデルへのアフィン・(拡散) ジャンプ過程とその応用について論じている。

また、今回導入する強度モデルにはブラウン運動で駆動される拡散項が含まれていないので、各タイプのイベント発生強度は時間について確定的な影響とイベント発生によって瞬間的に強度がジャンプする影響のみを考えることになる。このことは、時間とともにランダムに変動する共変量の効果を考慮することができないというデメリットはあるが、その一方で、イベント発生時点とイベントに付随するジャンプ量の組の系列をマーク付き点過程のサンプル・データと見なした場合の対数尤度関数を簡潔に表現することができ、最尤法の実装が比較的容易になるという利点がある。

アフィン・ジャンプ過程を強度モデルとする点過程に対する最尤推定については、Azizpour and Giesecke [1] および Bowsher [2] で論じられている。Azizpour and Giesecke [1] は、長期にわたる米国社債市場のデフォルト履歴データ（同時点に複数のデフォルトが起こるケースも含む）を用いて、1次元の場合についてアフィン・ジャンプ過程およびアフィン・ジャンプ拡散過程で定式化されたデフォルト強度モデルに対する最尤推定に関する議論を詳細に行っている。本研究で取り組んでいる最尤推定法は彼らのアイデアを大いに参考にしている。また、Bowsher [2] は、高頻度データを用いることを前提にして、流動性のある市場における取引と中値変更のような2種類のイベントの相互作用に注目している。Bowsher [2] は、Hawkes [6] が導入した相互作用型強度モデルおよびその拡張モデルに対する最尤推定の枠組みを与えると同時に、非定常な多変量点過程の最尤推定量については、その性質が未だ示されていないと述べている。

加えて、多次元のアフィン・ジャンプ過程による強度モデルをもつ点過程の条件付き期待値に関しては、Duffie et al. [3], Errais et al. [4] によって一般的な結果が与えられている。これらはRunge-Kutta法などの常微分方程式の数値解法の枠組みで実行することができる。したがって、Nakagawa [8] で提案されているマルチ・ダウングレード・プロテクションのように、ペイオフがポートフォリオ内の特定の格付変更イベントの発生件数に依存して決まるようなデリバティブの価格評価に応用することが容易になる。

本研究で分析対象とする具体的なイベントは、日本企業の発行体格付（保険会社の償還能力を含める）の格付変更である。格付変更モデルという、個別企業がある格付からある格付に推移する確率を問題にすることが一般的である。しかし、本研究ではまず「格下げ」および「格上げ」という格付変更の方向だけを問題にする^{*2}。具体的には、日本の格付付与企業全体からなる信用ポートフォリオ内における「格下げ」または「格上げ」イベントの発生が、自己励起的および相互作用的な構造を有しているかどうか、という問題を考える。その意味で、いわゆるトップダウン的な格付変更イベントのモデル化を指向していると言える。

気が、子供・大人・動物という異なる属性間で伝播する状況を表現できるという示唆を与えている。

^{*2} リスク管理上は、格下げの方がより重要なイベントと見なされるので、本論文では「格下げ」を「格上げ」より先に取り上げることにする。

ただし、取り扱うデータの性質上、「格下げ」と「格上げ」以外に、全ての社債が償還されたため格付が付与されなくなったり、新規の社債発行によって格付を新たに取得したりというイベントも観測される。そのようなイベントの取り扱い方には工夫の余地はあるが、本研究では具体的にある格付から異なる別の格付へ変更したことが認められるものの以外は、「その他」イベントと見なすことにする。

本稿では、まず一般的に多次元アフィン・ジャンプ過程で与えられる相互作用型強度モデルの定式化を与える。

次に、分析で使用する 1998 年 4 月 1 日から 2009 年 9 月 27 日までの格付投資情報センター (R&I) による日本企業の発行体格付の変更履歴データについて概観を与え、イベント発生時点とイベントに付随して観測される何らかの数量の組の系列をマーク付き点過程のサンプル・データと見なした際のパラメータ推定方法およびモデルの適合度検定の方法について整理する。

具体的な分析にあたって、業種を Bloomberg の業種分類に基づき、Financial, Group A (Communications, Consumer-Cyclical, Industrial, Technology), Group B (Basic Materials, Consumer-Non-cyclical, Energy, Utilities) という 3 つのカテゴリに再分類して、格下げと格上げそれぞれの場合について、業種間のイベント伝播構造を見るために 3 次元相互作用型 Hawkes モデルで各カテゴリについての発生強度を与え、Azizpour and Giesecke [1] の zero factor モデルに対する最尤推定の方法を参考にしてパラメータ推定および考察を行う。

さらに、相互作用型 Hawkes モデルの拡張として、Bowsher [2] が提唱している E-HawkesE モデルと同じく、アフィン・ジャンプ過程の部分を変数部分に組み込んだ指数型モデルについて、Azizpour and Giesecke [1] の方法を応用してパラメータの最尤推定を試みる。

統計学的な意味では、提案モデルのデータへの適合度が十分であるとは言えないが、上記のようなデータ分析によって、Group A カテゴリにおいてある程度強い自己励起性を認めることができる。また、相互作用性に関しては Financial カテゴリにおける格付変更イベントの発生が、Group A カテゴリの格付変更の発生強度に無視できない影響を与えていることを示唆する結果が得られる。Financial カテゴリから Group A への影響は、指数型モデルにおいても認められる。

2. 相互作用型のイベント発生強度モデル

次節以降では、相互作用型 Hawkes モデル（ただし、非定常の枠組みに拡張）を具体的な分析のためのモデルとして扱うが、この節では相互作用型 Hawkes モデルも含まれる一般的なアフィン・ジャンプ過程を用いた相互作用型のイベント発生強度モデルを導入しておく。

基本的には、デフォルト発生強度モデルを定式化するために Errais et al. [4] が導入した

アフィン・ジャンプ拡散過程型の強度モデルのアイデアに沿って定式化を行う。しかしながら, Azizpour and Giesecke [1] の中で, 1次元アフィン・ジャンプ拡散過程型のデフォルト発生強度モデルについて, ブラウン運動で記述される共変量がないモデル (zero factor model) と比べて, 共変量 (S&P500 や短期金利) を導入した場合 (one factor model) に改善があまり見られなかったことが指摘されていることや, 拡散項を含めた場合には尤度関数の表現がやや面倒になる点を考慮して, 拡散項を含めずに多次元のアフィン・ジャンプ過程の形でイベント発生強度を定式化する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間とし, $(\mathcal{F}_t)$ を適当なフィルトレーションとする。まず, ある $m \in \mathbb{N}$ に対して, $0 (= \tau_0^i) < \tau_1^i < \tau_2^i < \dots$ ($i = 1, \dots, m$) を $(\mathcal{F}_t)$ -適当な点過程 (停止時刻の増大列) とする。 τ_k^i を, タイプ i のイベントが k 回目に発生するランダムな時点と解釈する。また, $N_t^1, \dots, N_t^m$ をそれぞれ点過程 $\{\tau_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}, \dots, \{\tau_k^m\}_{k \in \mathbb{N}}$ に付随する計数過程とする。

ここで $i \neq j$ のときは $[N^i, N^j]_t = 0$ a.s. であると仮定する。要するに, ほとんど確実に, 異なるタイプのイベントは同時に起こらないものとする*3。

また, $L_t^1, \dots, L_t^m$ を $(\mathcal{F}_t)$ -適当な純ジャンプ過程で, そのジャンプ時刻はそれぞれ $N_t^1, \dots, N_t^m$ と共通しているものとする。具体的には, 各 i について, L_t^i は独立同分布の確率変数 $\eta_1^i, \eta_2^i, \dots$ を用いて

$$L_t^i := \sum_{k=1}^{N_t^i} \eta_k^i,$$

で定義される純ジャンプ過程とする。ただし, η_k^i は $\mathcal{F}_{\tau_k^i}$ -可測であるとする。

格付変更モデルでは, 例えばタイプ 1 を「格下げ」と見なし, η_k^1 が k 回目の格下げで何格分の格下げが発生したかを表すものとすると, L_t^1 は格下げイベント (タイプ 1) における時点 t までの格下げ幅の累積和を表すものと考えられる。本研究では, 次節で述べるようなデータの特徴から η_k^i を τ_k^i において同時に発生したタイプ i のイベント件数を表すものとして扱うことになる。

次に, 相互作用型のイベント発生強度モデルの定式化に移る。

$(\mathcal{F}_t)$ -発展的可測な非負値の確率過程 λ_t^i を用いて

$$M_t^i := N_t^i - \int_0^t \lambda_s^i ds$$

と定義した M_t^i が $(\mathcal{F}_t)$ -マルチンゲールになるとき, λ_t^i を N_t^i に付随する強度過程と呼ぶ。

本研究では, 強度 λ_t^i がタイプ i イベント自身の発生によって直接影響を受ける (self-exciting) だけでなく, タイプ i 以外のイベント発生からも影響を受ける (mutually exciting) 状況を表現することが可能になるように, 各タイプのイベント発生強度のモデル化を行う。

*3 ただし, 分析に用いるデータは日次でしか取得できないため, 同時点に複数のタイプのイベントが観測されるケースを排除できない。

そのため、 $d \in \mathbb{N}$ を所与として、強度を決定する状態過程ベクトルとして $X_t := (X_t^1, \dots, X_t^d)$ という d -次元確率過程を考える。 X_t は次のようなアフィン・ジャンプ過程に従うと仮定する。

$$(2.1) \quad dX_t = (K_0(t) + K_1(t)X_t)dt + \sum_{i=1}^m \Xi^i dZ_t^i, \quad X_0 \in \mathbb{R}^d$$

ただし、 $K_0(t) \in \mathbb{R}^d$ と $K_1(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は確定的な関数であり、 $\Xi^i = \text{diag}(\xi^{1,i}, \dots, \xi^{d,i})$ は d -次元対角行列で、その対角成分 $\xi^{j,i}$ は、すべての $j = 1, \dots, d$, $i = 1, \dots, m$ に対して非負の定数であるとする。また、 Z_t^i はその成分を全て L_t^i あるいは N_t^i とする d -次元ベクトルとする。

これは Hawkes [6] で取り上げられている相互作用型の点過程 (mutually exciting point processes) と呼ばれる多次元点過程についての強度過程の一般化とも見なすことができる。

この状態過程ベクトル X_t によって、タイプ i のイベント発生強度が、ある確定的な関数 $\Lambda_0^i(t) \in \mathbb{R}$ および $\Lambda_1^i(t) \in \mathbb{R}^d$ を用いて、

$$\lambda_t^i = \Lambda_0^i(t) + \Lambda_1^i(t) \cdot X_t$$

のように X_t のアフィン変換で定義されるものとする ($x \cdot y$ は 2 つのベクトル x と y の内積を表す)。ただし、 λ_t^i が非負となるように適当な制約条件を与える。

このようなアフィン・ジャンプ過程によるモデル化の特徴を簡単にまとめておく。まず、各タイプのイベント強度は、何もイベントが発生しなければ時間とともに確定的に変化する。次に、何らかのイベント、例えばタイプ i のイベントが発生すると、タイプ j のイベント発生強度が、 $\xi^{j,i}$ だけジャンプすることになる。仮に、 $\xi^{j,i} = 0$ であれば、タイプ j のイベント発生強度は、タイプ i のイベント発生の影響を受けないことになる*4。

また、イベント発生強度としてアフィン・ジャンプ型のモデルを考えた別の理由は、Duffie et al. [3] や Errais et al. [4] のアフィン・ジャンプ拡散型モデルについての議論から推察されるように、イベント発生件数によってペイオフが決まるデリバティブ*5の評価が、モンテカルロ・シミュレーションに頼らなくても Runge-Kutta 法のように実装の容易な数値計算手法で可能であるからである。

格付変更の履歴データに適合するイベント発生強度モデルの追求を優先すれば、格付変更イベントの発生強度モデルとしてアフィン・ジャンプ型以外の確率過程を選択する方が適当かもしれない。格付変更イベントの発生強度モデルとしてアフィン・ジャンプ型を用いることの妥当性については、4 節の実データを用いた分析例を通じて検討する。

*4 $\xi^{j,i} = 0$ であれば、タイプ i 自体が自己励起的でないことを意味する。

*5 例えば、Nakagawa [8] は、特定の格下げイベントが発生するごとに決められたペイオフが支払われるマルチ・ダウングレード・プロテクションと名付けたクレジット・デリバティブを提案し、アフィン・ジャンプ型強度モデルによる評価を議論している。

3. データとパラメータ推定方法

3.1 データの概要と加工について

本研究で相互作用型強度モデルのパラメータ推定に用いるデータは、Bloomberg の RATC コマンドから取得した格付投資情報センター (R&I) の 1998 年 4 月 1 日から 2009 年 9 月 27 日までの日本企業の発行体格付 (保険会社の償還能力含む) の変更に関するものである。特定の格付機関の格付変更データを用いて推定を行うということは、厳密に言えば、企業の真の (あるいは客観的な) 信用力ではなく、その格付機関の格付に対する特性・偏向をとらえるだけになってしまう可能性もある。しかしながら、格付機関は、格付付与の妥当性について以前よりも厳しく見られるようになってきており、R&I という特定の格付機関の格付変更が、ある程度は真の信用力の変化を近似できていると考えても良いと考える。また、本研究では、日本における信用市場の分析というよりも、今回提案するモデルおよびパラメータ推定手法の適用可能性を調査することに主眼をおいている。その意味で、今回利用した R&I の格付変更履歴データは提案モデルを例証するためのサンプルとしては十分意義のあるものとする。

取得した履歴データには、発行体、イベント発生年月日、変更後の格付、変更前の格付、業種が情報として含まれている。しかし、今回の分析では、イベント発生年月日、該当する企業の属するセクター、イベントの種類 (格下げ、格上げ、その他) だけに注目し、発行体の名称や細かい格付推移の情報は扱わない。

また、将来の格付変更を視野に入れたレーティング・モニターを表す $*/+/*-$ の記号は取り除き、変更前と変更後の格付が異なることが認められたものだけをパラメータ推定用のサンプルとして採用している。変更後または変更前の格付記号が “NR” となっているものがデータには少なからず見られ、そのほとんどが全社債の償還または債券の新規発行に対応していると考えられるが、これらは「格下げ」または「格上げ」のイベントとは区別して「その他」のイベントとして扱うことにする^{*6}。

次に、業種分類については Bloomberg のものを採用し、最終的に次の 3 つのカテゴリに再分類する。

- Financial — 金融業 (保険会社の償還能力に対する格下げも含む)
- Group A (Communications—通信, Consumer-Cyclical—消費 (景気循環型), Industrial—商工業, Technology—テクノロジー) : 景気変動の影響を受けやすいセクター
- Group B (Basic Materials—基礎資材, Consumer-Non-cyclical—消費 (非景気循環型))

^{*6} その他イベントのうち、変更後格付が NR となっているものの中には、償還直前の格付が低くて社債を再発行することが事実上困難になったケースも少なからず含まれていると考えられるので、何らかの信用事象として扱うことも考えられる。

型) , Energy—エネルギー, Utilities—公益事業) : 景気変動の影響が小さそうなセクター

以上のような業種カテゴリに分類した結果, 対象期間中の格下げは全部で 1,011 件, Financial カテゴリが 263 件, Group A カテゴリが 562 件, Group B カテゴリが 186 件である. 一方, 対象期間中の格上げは全部で 488 件, Financial カテゴリが 155 件, Group A カテゴリが 221 件, Group B カテゴリが 112 件である.

分析上, 時間を連続時間に対応させる必要があるため, 以下のような処理を行う. 東京株価指数の終値が取得できた日(営業日と見なす)だけを昇順にリストして^{*7}, 1998 年 4 月 1 日を $t = 0$ と仮定し, 1999 年以降は 4 月最初の営業日が $t = 1, 2, \dots$ となるように定め, それ以外は, 年度ごとに「1 / その年度の営業日の数」をその年度の時間幅(年度によって異なるがおよそ 1/250 程度)として連続時間に対応させた. このように調整することで, 扱ったデータにおいては, 最初の格下げは Group A で 1998 年 4 月 6 日 ($t = 0.0121$), 最初の格上げは Group B で 1998 年 5 月 29 日 ($t = 0.1579$) などと表される. また, 結果として最終時点 2009 年 9 月 27 日は $T = 11.486$ と表されることになった.

Fig. 1 は発行体格付の変更の件数の推移を, 格下げ, 格上げ, その他(償還・発行)について, 月次で表したものである. この図を見ると, 1998 年 5 月から 1999 年 8 月くらいまでの期間と, 2002 年の前半あたりに特に格下げが多くなっていることが分かる. 一方, 2006 年以降は, 格上げ件数が相対的に多くなってきている.

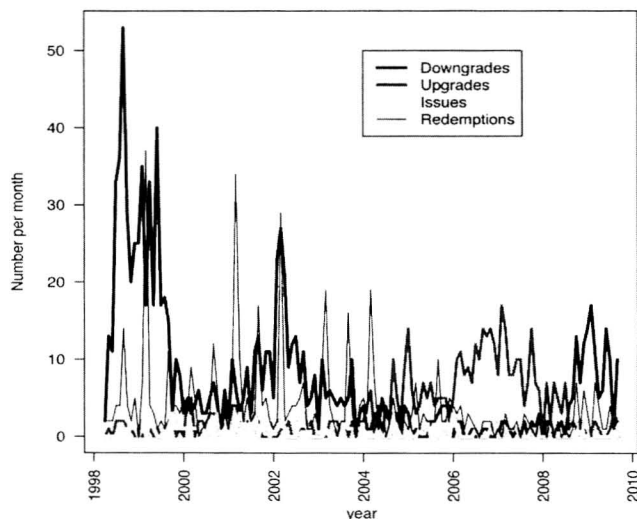


Fig. 1. Trajectory of monthly numbers of downgrades, upgrades, redemption and issues announced by R&I during April 1998 to September 2009.

^{*7} 非営業日である 2009 年 9 月 19 日(土曜日)に例外的に格下げが記録されているが, 本研究で対象とするそれ以外の全ての格付変更は営業日に記録されている. データ加工上, 2009 年 9 月 19 日の格下げは前日に発生したものとして今回は処理している.

また Fig. 2 および Fig. 3 は、それぞれカテゴリ別に月次の格下げ件数および格上げ件数の推移を表したものである。

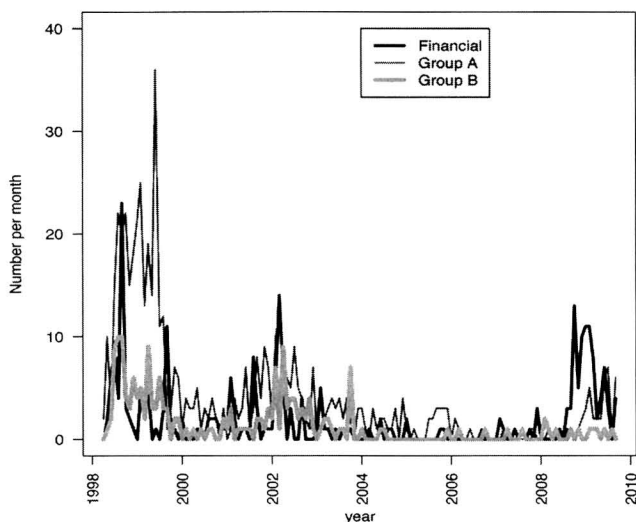


Fig. 2. Trajectory of monthly numbers of category-by-category downgrades announced by R&I during April 1998 to September 2009.

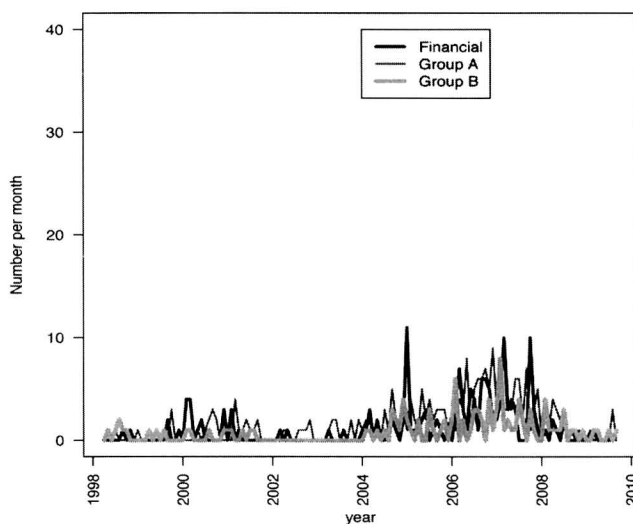


Fig. 3. Trajectory of monthly numbers of category-by-category upgrades announced by R&I during April 1998 to September 2009.

また、格付変更のアナウンスが休日（非営業日）直前に偏っているかどうか調べた結果を Table1 にまとめた。特に、格下げイベントは休日直前にアナウンスされることが多い

Table 1. The relation between the number of days before non-business days and the number of observations for each type event.

	non-business days	-1 day	-2 day	-3 day	-4 day	-5 day	total
Financial:Down	0	104	47	47	51	14	263
Group A:Down	1	278	85	92	64	42	562
Group B:Down	0	84	17	42	28	15	186
Financial:Up	0	37	32	38	22	26	155
Group A:Up	0	58	40	58	31	34	221
Group B:Up	0	26	17	30	20	19	112

ことが読み取れる*⁸。

さらに、その他イベントのうち償還に相当するものは、3月と9月に多いことが確認された。

モデル構築上は、このようなバイアスも本来盛り込むべきかもしれないが、日次でのイベントの多寡ではなく、週次・月次程度の期間で見たときの各イベントのクラスタリングを把握できればよいので、分析においては休日前であるか、特定の時期に当たっていないかどうかは特に気にしないことにする。

他にも、格下げ／格上げの起こりやすさは、その時点で格付が付与されている企業全体の格付分布（全体で AAA 格企業が何 %、AA+ 格企業が何 % という分布）にも依存すると考えるのが自然である。その意味では、格付分布と格付変更の関係という視点でも、データを詳しく調査する必要があるだろう。しかし、今回は各イベントの発生強度は格付分布とは独立であると暗に仮定して、分析を行っていくことにする。

3.2 推定モデルの特定

次に、(2.1) 式のように導入した一般的な相互作用型の強度モデルの枠組みで、格付変更イベント発生強度モデルを具体的に定式化する。 m 個のイベントタイプを考える際、状態過程ベクトルの次元も $d = m$ として、 $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^m)$ はそれ自身各タイプのイベント強度になる（すなわち $\lambda_t^j = X_t^j$ ($j = 1, \dots, m$) となる）と仮定し、さらに次のようなアフィン・ジャンプ過程（相互作用型 Hawkes モデル）に従うと仮定する。

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ \vdots \\ dX_t^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^1(c^1 - X_t^1) \\ \vdots \\ \kappa^m(c^m - X_t^m) \end{pmatrix} dt + \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} \xi^{1,i} \\ \vdots \\ \xi^{m,i} \end{pmatrix} dL_t^i,$$

*⁸ 祝日なども考慮すると、営業日の中では休日 1 日前に当たる日数が一番多くなることに注意。

ただし, $\kappa^j, c^j, \{\xi^{j,i}\}_{i=1,\dots,m}$ ($j = 1, \dots, m$) および初期値 X_0^j は全て非負値のパラメータである. (3.1) 式から, タイプ j のイベント発生強度は, 時点 t でタイプ i のイベントが発生したとき, $\xi^{j,i} L_t^i$ だけジャンプするが, イベントが発生しなければ c^j という水準に κ^j で決まるスピードに時間について確定的に回帰すると解釈することができる.

また, X_t^j は $j = 1, \dots, m$ に対して

$$(3.2) \quad X_t^j = c^j + e^{-\kappa^j t} (X_0^j - c^j) + \int_0^t e^{-\kappa^j(t-s)} \sum_{i=1}^m \xi^{j,i} dL_s^i$$

と表すことができる. この表現から L_t^i が非負のジャンプだけを許されるとすれば, その他のパラメータの非負制約から任意の時点 $t \geq 0$ において, $X_t^j \geq \min\{c^j, X_0^j\} \geq 0$ であることが容易に分かる.

ここで考えるイベント強度モデルは, Azizpour and Giesecke [1] の zero factor モデルに似ているが, デフォルトという単一タイプのイベントではなく, 複数のイベントを同時に考えている点が異なる. また, 対象となるタイプのイベントとは別のイベントの影響の可能性も考えるため, 必然的に推定するパラメータも多くなる. さらに, Azizpour and Giesecke [1] では $X_0^j = c^j$ を仮定しているが, ここではまず, 初期値 X_0^j と長期平均 c^j を別々に推定することにした^{*9}.

推定用のサンプル観測期間が, 連続時間の有限区間 $[0, T]$ で表されるとする. また, 対象とする格付変更タイプが m 種類であるとき, タイプごとにイベント発生日と発生件数の履歴データ, すなわち, $(\tilde{\tau}, \tilde{\eta}) := [(\tilde{\tau}_k^i, \tilde{\eta}_k^i)]_{k=1,\dots,\tilde{N}_T^i, i=1,\dots,m}$ というマーク付き点過程のサンプルと見なすことができる形で観測データが利用できるものとして, パラメータを推定する方法を考える. このとき, L_t^i はタイプ i の累積発生件数を表すジャンプ過程として扱われることに注意しておく.

ここで, $\Theta^j := (X_0^j, \kappa^j, c^j, \{\xi^{j,i}\}_{i=1,\dots,m})$ ($j = 1, \dots, m$) を推定すべきパラメータの組とする.

Nakagawa [8] の Appendix の議論から, $\tilde{X}_t^{j,\Theta^j}$ を観測データを入力して得られる X_t^j のパスを表すものとする, 尤度関数は次のように表すことができる.

$$(3.3) \quad \mathcal{L}((\Theta^j)_{j=1,\dots,m} | (\tilde{\tau}, \tilde{\eta})) \propto \prod_{j=1}^m \exp \left(\int_0^T \log(\tilde{X}_{s-}^{j,\Theta^j}) d\tilde{N}_s^j - \int_0^T \tilde{X}_s^{j,\Theta^j} ds \right).$$

このことから, 各 j について Θ^j は別々に最適化することで求められることがわかる.

また, 対数尤度関数 $\ell(\Theta^j | (\tilde{\tau}, \tilde{\eta})) := \log \mathcal{L}(\Theta^j | (\tilde{\tau}, \tilde{\eta}))$ の最大化問題は,

$$\int_0^T \log(\tilde{X}_{s-}^{j,\Theta^j}) d\tilde{N}_s^j - \int_0^T \tilde{X}_s^{j,\Theta^j} ds.$$

の最大化問題に帰着することが分かる.

^{*9} $X_0^j = c^j$ のときは, Hawkes [6] の相互作用型過程そのものになる.

さらに, (3.2) 式を用いると, タイプ j イベントに対する最尤推定の問題は, 以下の目的関数の最大化問題として考えることができる.

$$(3.4) \quad \sum_{k=1}^{\tilde{N}_j^i} \log \{ c^j + e^{-\kappa^j \tau_k^j} (X_0^j - c^j) + \sum_{i=1}^m \xi^{j,i} \sum_{\tau_p^i < \tau_k^j} \tilde{\eta}_p^i e^{-\kappa^i (\tau_k^j - \tau_p^i)} \} \\ - c^j T - \frac{X_0^j - c^j}{\kappa^j} (1 - e^{-\kappa^j T}) - \frac{1}{\kappa^j} \sum_{i=1}^m \xi^{j,i} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_j^i} \tilde{\eta}_k^i (1 - e^{-\kappa^i (T - \tau_k^j)}).$$

パラメータの最尤推定は, 統計分析ソフトウェア R の `optim` 関数^{*10}によって, (3.4) 式で定義された関数を最大化するという実装を行った^{*11}. 初期値は, 強制的にパラメータ値を固定しない限り, 計 12 個のセットを用意して最適化し, 各 j について目的関数 (3.4) が最大となる場合の推定値を取り出す.

ただし, 本モデルにおける最尤推定量の標準誤差を与える厳密な方法は分からないので^{*12}, R の `optim` 関数のアウトプットで得られる Hesse 行列の逆行列の対角成分の平方根を標準誤差と見なして算出した^{*13}.

また, 推定したモデルのデータへの適合度を, Azizpour and Giesecke [1] が適用している Kolmogorov-Smirnov 検定および Prah1 の検定を通じて検討する.

どちらの適合度検定においても, 各タイプのイベント発生時刻 $\{\tau_k^j\}$ の系列を事後推定された強度 $\hat{\lambda}^j$ を用いて

$$\hat{A}_k^j := \int_0^{\tau_k^j} \hat{\lambda}_s^j ds$$

と変換すると, $\{\hat{A}_k^j\}$ が標準 Poisson 過程のジャンプ時刻と見なせる性質を利用する. ただし, 本研究ではこの積分値を, データの時間幅 ($\frac{1}{250}$ 程度) で時間軸を分割して得られる長方形分割による近似計算で算出する.

そして, $\{\hat{A}_k^j - \hat{A}_{k-1}^j\}_{k=1, \dots, \tilde{N}_T^j}$ は独立同分布であり, 指数 1 の指数分布に従うということを帰無仮説と設定し, これが棄却されない場合に, モデルが適合していることの目安とする.

Kolmogorov-Smirnov 検定は, R で `ks.test(***, "pexp", rate=1)` (***) には, 上記で変換した $\{\hat{A}_k^j - \hat{A}_{k-1}^j\}_{k=1, \dots, \tilde{N}_T^j}$ 系列のベクトルを指定) を実施し, 5% を有意水準と見る

^{*10} `optim(initial_values, obj_fun, method = "L-BFGS-B", lower = numeric(m), control=list(fnscale=-1), hessian=TRUE)`

^{*11} Azizpour and Giesecke [1] では, 最適化に関して, 離散化したパラメータ空間上でグリッド検索を行ったと記述されている.

^{*12} Bowsher [2] は, 1 次元の定常点過程についての最尤推定量の漸近的性質については Ogata [9] が一貫性や漸近正規性などを証明しているが, 多次元点過程に対する最尤推定量の性質について触れている統計分野あるいは計量経済分野の文献は見あたらないと記述している. Bowsher [2] は, モンテカルロ・シミュレーションを用いて最尤推定量の性質を分析例を紹介している.

^{*13} 制約付きで最適化を行っているが, `optim` 関数の仕様では非拘束条件下での Hesse 行列を算出するということである.

ことにする.

一方, Azizpour and Giesecke [1] によると, Prah1 の検定は, 次で定義される統計量 M^j が漸近的に平均 $\mu_M^j \approx e^{-1} - 0.189/\tilde{N}_T^j$, 標準偏差 $\sigma_M^j \approx 0.2427/\sqrt{\tilde{N}_T^j}$ の正規分布に従うという性質に注目する方法である.

$$M^j := \frac{1}{\tilde{N}_T^j} \sum_{k: \hat{A}_k^j - \hat{A}_{k-1}^j < \mu} \left(1 - \frac{\hat{A}_k^j - \hat{A}_{k-1}^j}{\mu}\right), \quad \mu := \frac{1}{\tilde{N}_T^j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_T^j} (\hat{A}_k^j - \hat{A}_{k-1}^j)$$

統計量 M^j が区間 $(\mu_M^j - \sigma_M^j, \mu_M^j + \sigma_M^j)$ に含まれないときに, 帰無仮説は棄却されと考えることにする.

なお, 業種を区別しないで「格下げ」および「格上げ」に対して発生強度を一定とする Poisson 過程モデルについて適合度検定を実施したところ, 格下げの場合に強度一定モデルは Kolmogorov-Smirnov 検定でも Prah1 の検定でも棄却されたが, 格上げの場合には Kolmogorov-Smirnov 検定では棄却されたが, Prah1 の検定では棄却されなかった. ただし, 比較的新しい時期の格上げデータだけを用いて Prah1 の検定を実施すると棄却されたので, 少なくとも最近については強度を一定とするモデルの適用は適当ではないと考えられる.

また, 業種を先に述べた 3 つのカテゴリに分類して格下げと格上げそれぞれについて強度を一定とするモデルを仮定した場合は, いずれの場合も両検定で強度一定モデルは棄却された.

4. 業種カテゴリ別の格下げ／格上げの強度モデルのパラメータ推定

ここでは, 3.2 節で $m = 3$ として, 3 つに分類した業種カテゴリごとの格下げ (格上げ) 発生強度モデルを (3.1) 式で与える. そして, 3.1 節で述べたように 1998 年 4 月 1 日を $t = 0$ と仮定して営業日ベースで 1 年を単位として, 業種カテゴリごとに件数をまとめた格下げ／格上げの履歴データを用いて, (3.4) 式の最大化問題の解としてパラメータの最尤推定値を求める. 変数の右上の数字は, 1 が “Financial” を, 2 が “Group A” を, 3 が “Group B” を示すものとする.

ただし, 全期間の格上げ履歴データを用いて, 提案モデルのパラメータ推定を行ったところ最適化の際にエラーが生じた. (3.1) 式で与えられるモデルが不適当であることも考えられるが, Fig. 3 で見る限り, 少なくとも 2006 年～2007 年にかけて Financial カテゴリと Group A カテゴリで格上げにクラスタリングらしい状況が見られるので, 直近のところでは (3.1) 式で与えられる強度モデルが適用できる可能性があると考えた. そこで, 格上げモデルの推定では, 使用するデータ期間を 2001 年 4 月 1 日以降に変更する.

さらに, 格上げ履歴データの予備分析では, 全ての業種カテゴリで c^j の推定値が 0 に

なった。そこで、回帰水準を $\alpha = 0.001$ と固定して、残りのパラメータについて最尤推定を行うことにする。

格下げについて業種カテゴリ別にパラメータ推定した結果は、Table 2 に、格上げについて業種カテゴリ別にパラメータ推定した結果を Table 3 にまとめている。ここでは、特に自己励起性および相互作用性に着目して考察を行う。

業種カテゴリ別の格下げについては、 $\xi^{1,1}, \xi^{2,2}, \xi^{3,3}$ の推定値の水準だけを見ると、いずれもある程度の自己励起性が認められるが、推定値の絶対値が標準誤差の 2 倍（約 95% 信頼区間）より大きい場合を有意であると判断する場合、Group A カテゴリだけが有意な水準と見なされ、Financial カテゴリおよび Group B カテゴリの自己励起性は有意とは認められないことになる。

また、相互作用性については、 $\xi^{2,1}$ の推定値と標準誤差の関係から、Financial カテゴリの格下げが Group A カテゴリの格下げに対して一方向的に比較的強い影響を及ぼしていることが示唆される。しかしながら、その他には強い相互作用性は認められない。

一方、業種カテゴリ別の格上げについては、 $\xi^{2,2}$ の推定値と標準誤差の関係から、Group A カテゴリには有意とは判断できないまでもある程度強い自己励起性があることが示唆される。また $\xi^{1,2}$ と $\xi^{2,1}$ の推定値と標準誤差の関係から Financial カテゴリと Group A カテゴリの間の格上げに相互作用性があることが示唆される。しかし、その他には目立った自己励起性および相互作用性は認められない。

Table 2. The maximum likelihood estimates of the parameters of (3.2) for downgrades of each category. The standard errors, which are given by the square roots of diagonal elements of the inverse of Hessian matrix that is numerically computed, are given in parentheses.

Financial	X_0^1	κ^1	c^1	$\xi^{1,1}$	$\xi^{1,2}$	$\xi^{1,3}$
	19.11 (13.35)	4.08 (6.33)	3.18 (1.10)	1.51 (1.26)	0.00 (0.24)	0.00 (1.21)
Group A	X_0^2	κ^2	c^2	$\xi^{2,1}$	$\xi^{2,2}$	$\xi^{2,3}$
	42.09 (18.67)	3.26 (0.97)	3.17 (1.80)	1.17 (0.32)	1.00 (0.43)	0.82 (0.86)
Group B	X_0^3	κ^3	c^3	$\xi^{3,1}$	$\xi^{3,2}$	$\xi^{3,3}$
	24.47 (19.12)	4.34 (1.71)	1.01 (0.86)	0.38 (0.25)	0.44 (0.39)	1.22 (0.66)

Table 3. The maximum likelihood estimates of the parameters of (3.2) for upgrades of each category (using only the samples after March, 2001). The standard errors, which are given by the square roots of diagonal elements of the inverse of Hessian matrix that is numerically computed, are given in parentheses.

Financial	X_0^1	κ^1	c^1 (Fixed)	$\xi^{1,1}$	$\xi^{1,2}$	$\xi^{1,3}$
	2.52 (4.18)	3.60 (1.15)	0.001 (-)	0.17 (0.58)	1.35 (0.56)	0.00 (0.84)
Group A	X_0^2	κ^2	c^2 (Fixed)	$\xi^{2,1}$	$\xi^{2,2}$	$\xi^{2,3}$
	19.63 (10.39)	3.43 (1.12)	0.001 (-)	2.53 (0.87)	1.34 (0.70)	0.00 (1.08)
Group B	X_0^3	κ^3	c^3 (Fixed)	$\xi^{3,1}$	$\xi^{3,2}$	$\xi^{3,3}$
	4.56 (4.42)	2.44 (0.91)	0.001 (-)	0.84 (0.54)	0.33 (0.47)	0.22 (0.79)

また、Fig. 4 は、Table2 および Table3 のパラメータ推定値および履歴データを (3.1) 式に代入して得られる、業種カテゴリ別の格下げおよび格上げについての事後的な強度パスを表している。特に、Financial および Group A の強度パスからは、パラメータ推定値の考察を通じて期待される自己励起性および相互作用性の影響をある程度視覚的にも確認することができる。また、Fig. 2 および Fig. 3 で示された月次の業種別格下げ／格上げ件数の推移と比較しても整合的な強度のパスが得られていることが確認できる。

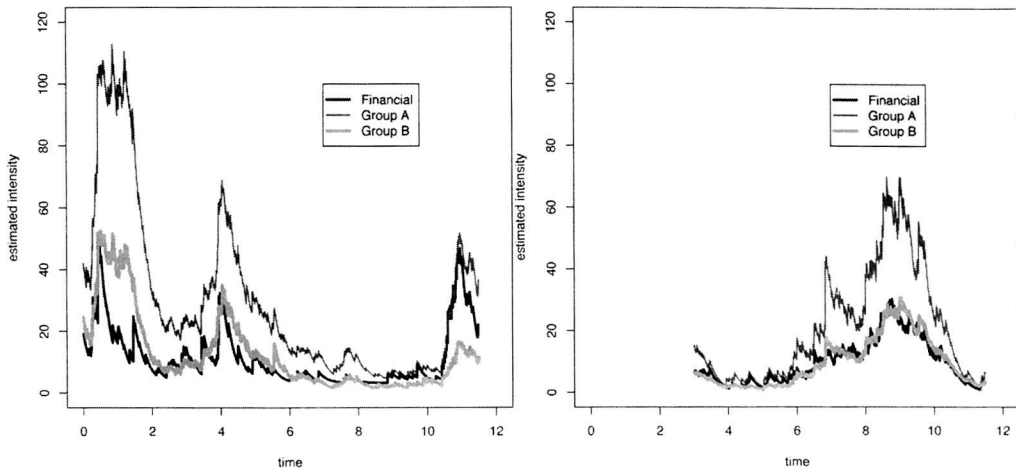


Fig. 4. The estimated paths (obtained after April 2001) of the downgrade intensity (Left) and the upgrade intensity (Right) for the three categories obtained by substituting the estimates in Table 2 and the observation into (3.2).

適合度検定についても触れておく。方法は、3.2 節で述べている方法である。Kolmogorov-Smirnov 検定を格下げの場合に適用した結果は、Financial(p 値 0.3866), Group A(p 値 0.0011), Group B(p 値 0.0558) となった。また、格上げの場合には、Financial(p 値 0.3777), Group A(p 値 0.2233), Group B(p 値 0.8769) となった。格下げの場合の Group A カテゴリ以外は、帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないことになる。

一方、Prahl の検定では、格下げの場合には、Financial($0.337 \notin (0.345, 0.388)$), Group A($0.328 \notin (0.354, 0.380)$), Group B($0.309 \notin (0.347, 0.387)$) となり、格上げの場合には、Financial($0.353 \in (0.339, 0.392)$), Group A($0.344 \notin (0.349, 0.385)$), Group B($0.359 \in (0.339, 0.392)$) となり、格上げの場合の Financial カテゴリ, Group B カテゴリでは帰無仮説が棄却されないが、その他の場合では帰無仮説が棄却されることになる。

両者の結果を合わせると、格上げの場合の Financial カテゴリ, Group B カテゴリでは理論通りにモデルがデータに適合していると考えられるが、格上げの場合の Group B カテゴリに対する推定値と推定誤差を見る限り、Group B カテゴリに対して相互作用型 Hawkes モデルを適用することは妥当とは言えない可能性があり、提案モデルには依然として改良の余地があると考えられる。

5. 指数型モデルに対するパラメータ推定

(3.1) で与えられる X_i に対して, 各イベントの発生強度が $\lambda_i^j = \exp(X_i^j)$ というアフィン・ジャンプ型過程の指数形で表されるモデルを考える. これによって, 強度自体のアフィン・ジャンプ構造は崩れるが, パラメータ値によらず強度は常に正の値をとるので, 全てのパラメータについて非負制約を取り除くことが可能になる. そこで, R の `optim` 関数で選択できる “Nelder-Mead”, “BFGS”, “CG”, “SANN” 法 (いずれも制約条件を加えられない) を用いて, 同じ初期値で最適化を実行し, 結果や収束状況を比較する^{*14}. ただし, $X_0^j = c^j$ という制約を課して^{*15}, 初期値は $X_0^j (= c^j) = \kappa^j = 3, \xi^{j,i} = 0 (\forall j, i)$ とする.

また, 実際には営業日間の時間幅は年度によって異なるが, 仮に Δ 一定として, 観測期間の最終時点 T が $T = M\Delta$, $\Delta > 0$ で与えられるとすると, タイプ j に対する対数尤度関数は以下のような近似表現が得られる.

$$\begin{aligned} l(\Theta^j | (\tilde{\tau}, \tilde{\eta})) &= \int_0^T \tilde{X}_{s-}^{j,\Theta^j} d\tilde{N}_s^j - \int_0^T e^{\tilde{X}_s^{j,\Theta^j}} ds \\ &= \sum_{k=1}^{\tilde{N}_T^j} \left\{ c^j + \sum_{i=1}^m \xi^{j,i} \sum_{\tilde{\tau}_p^j < \tilde{\tau}_k^j} \tilde{\eta}_p^j e^{-\kappa^j(\tilde{\tau}_k^j - \tilde{\tau}_p^j)} \right\} \\ &\quad - \int_0^T \exp \left\{ c^j + \sum_{i=1}^m \xi^{j,i} \sum_{\tilde{\tau}_p^j < s} \tilde{\eta}_p^j e^{-\kappa^j(s - \tilde{\tau}_p^j)} \right\} ds \\ &\approx \sum_{k=1}^{\tilde{N}_T^j} \left\{ c^j + \sum_{i=1}^m \xi^{j,i} \sum_{\tilde{\tau}_p^j < \tilde{\tau}_k^j} \tilde{\eta}_p^j e^{-\kappa^j(\tilde{\tau}_k^j - \tilde{\tau}_p^j)} \right\} \\ &\quad - e^{c^j} \Delta \sum_{k=0}^{M-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \xi^{j,i} \sum_{\tilde{\tau}_p^j < k\Delta} \tilde{\eta}_p^j e^{-\kappa^j(k\Delta - \tilde{\tau}_p^j)} \right\} \end{aligned}$$

上記の近似式に基づいて, 「格下げ／格上げ」の2方向の変化イベント×3つの業種カテゴリ区分で得られる合計6種類のイベントタイプについての自己励起性およびイベント間の相互作用性をとらえることができるように多次元アフィン・ジャンプ過程で表される部分を拡張して推定を実施 ($m = 6$ として2001年4月1日以降のデータのみ使用) し, さらに R の `optim` 関数の最適化手法のオプションとして “Nelder-Mead”, “BFGS”, “CG”, “SANN” 法のそれぞれについて最尤推定を行う.

結果的には, BFGS 法が全てのケースで最適化計算が収束したと判断され, また目的関数の値も4つの手法の中で最大であったので, 以下では BFGS 法についてのみ結果を示

^{*14} 各最適化法の詳細については, <http://www.is.titech.ac.jp/~mase/mase/html.jp/optim.jp.html> を参照のこと.

^{*15} これは, Bowsher [2] の E-HawkesE(3) モデルに相当する.

す*¹⁶.

Table 4 には、合計 6 つのカテゴリに対する推定結果をまとめている。

$\xi^{1,1}$ の推定値と標準誤差の関係を見ると、Financial カテゴリの格下げについて比較的強い自己励起的な状況が認められる。それ以外の $\xi^{i,j}$ ($i = 2, \dots, 6$) については有意性は認められない。この結果は、4 節で考察した自己励起性についての結果とは傾向が異なっていることに注意しておく*¹⁷。

また、相互作用性については、 $\xi^{2,1}, \xi^{5,1}, \xi^{2,4}, \xi^{5,4}$ の推定値と標準誤差の関係を見ると、格下げと格上げの両方について、Financial カテゴリから Group A カテゴリという一方での伝播について有意性が示唆されている。

このように、「格下げ／格上げ」の 2 方向の変化イベント×3 つの業種カテゴリ区分で得られる合計 6 種類のイベントタイプについての指数型モデルに対するパラメータ最尤推定によって、ある程度予想された自己励起性および相互作用性が認められる結果が得られた。しかし、個別のイベント強度に注目すると解釈が難しい結果も含まれている。指数型モデルの適用法には工夫や改善が必要であると考えられる。

Fig. 5 は、Table 4 のパラメータ推定値および履歴データを (3.1) 式に代入して $\lambda_t^i = \exp(X_t^i)$ として得られる、指数型モデルにおける業種カテゴリ別の格下げおよび格上げについての事後的な強度パスを表したものである。格上げの強度パスは、Fig. 4 と強度パスの様相が似通って見える。一方、格下げの強度パスは、同時点で比較したときに、Fig. 4 の強度パスと様相が大きく異なる。これは 4 節のときと異なり、1998 年～1999 年において多数発生した格下げが推定結果に反映されていないことが大きな要因と考えられる。

6. まとめ

本稿では、多次元アフィン・ジャンプ型過程により、相互作用性（あるタイプのイベント発生がその他のイベント発生強度に影響を与える効果）が見込まれる複数のタイプのイベント発生強度をモデル化し、10 年強の期間における R&I による日本企業の発行体格付に対する格付変更履歴データの分析を行った。

業種を 3 つのカテゴリに分類して、多次元アフィン・ジャンプ型過程を格下げ／格上げイベント強度モデルとして用いて格付変更履歴データを分析した結果、Group A（消費（景気循環型）や商工業などの業種を含む）で特に格下げの自己励起性が認められた。また相互作用性については、格下げ／格上げの両方に関して、Financial カテゴリの格付変更イベント発生が、Group A の発生強度に強く影響を及ぼすことを示唆する結果が絵得られた。Financial カテゴリから Group A という方向での相互作用性は、指数型モデルに対す

*¹⁶ optim 関数による最適化の結果は BFGS 法が全体的に安定していたが、BFGS 法が必ずしも最善であるという保証はできない。

*¹⁷ 2001 年 4 月 1 日以降のデータを利用したために、2000 年頃までの多数の格下げが推定に考慮されていないことが一因であると考えられる。

Table 4. The maximum likelihood estimates of the parameters of exponential-form model for both downgrades and upgrades of each category (using only the samples after March, 2001). The optimization method is “BFGS” in `optim` function of R. The super-indices 1,2 and 3 correspond to downgrade of Financial, Group A and Group B, respectively. The super-indices 4,5 and 6 do upgrade of Financial, Group A and Group B, respectively. The standard errors are given in parentheses.

Fin. Down.	$X_0^1 = c^1$	κ^1	$\xi^{1,1}$	$\xi^{1,2}$	$\xi^{1,3}$	$\xi^{1,4}$	$\xi^{1,5}$	$\xi^{1,6}$
	2.410 (0.368)	6.460 (1.991)	0.093 (0.027)	0.036 (0.046)	-0.099 (0.084)	-0.101 (0.109)	-0.269 (0.150)	0.230 (0.134)
Gr.A Down	$X_0^2 = c^2$	κ^2	$\xi^{2,1}$	$\xi^{2,2}$	$\xi^{2,3}$	$\xi^{2,4}$	$\xi^{2,5}$	$\xi^{2,6}$
	3.895 (0.233)	0.218 (0.674)	0.028 (0.010)	-0.013 (0.026)	-0.013 (0.048)	-0.120 (0.046)	0.025 (0.036)	0.086 (0.084)
Gr.B Down	$X_0^3 = c^3$	κ^3	$\xi^{3,1}$	$\xi^{3,2}$	$\xi^{3,3}$	$\xi^{3,4}$	$\xi^{3,5}$	$\xi^{3,6}$
	1.831 (0.495)	4.104 (1.778)	-0.014 (0.026)	0.111 (0.044)	-0.037 (0.061)	-0.056 (0.112)	-0.051 (0.113)	-0.069 (0.171)
Fin. Up	$X_0^4 = c^4$	κ^4	$\xi^{4,1}$	$\xi^{4,2}$	$\xi^{4,3}$	$\xi^{4,4}$	$\xi^{4,5}$	$\xi^{4,6}$
	1.576 (0.703)	2.205 (1.514)	-0.052 (0.031)	0.043 (0.046)	-0.105 (0.070)	-0.013 (0.046)	0.065 (0.041)	0.025 (0.070)
Gr.A Up	$X_0^5 = c^5$	κ^5	$\xi^{5,1}$	$\xi^{5,2}$	$\xi^{5,3}$	$\xi^{5,4}$	$\xi^{5,5}$	$\xi^{5,6}$
	2.949 (0.306)	2.997 (1.510)	-0.059 (0.025)	-0.009 (0.044)	-0.025 (0.054)	0.083 (0.030)	-0.020 (0.033)	0.022 (0.054)
Gr.B Up	$X_0^6 = c^6$	κ^6	$\xi^{6,1}$	$\xi^{6,2}$	$\xi^{6,3}$	$\xi^{6,4}$	$\xi^{6,5}$	$\xi^{6,6}$
	2.725 (0.499)	2.550 (0.881)	-0.005 (0.020)	-0.020 (0.044)	-0.287 (0.137)	0.015 (0.045)	0.061 (0.041)	-0.089 (0.078)

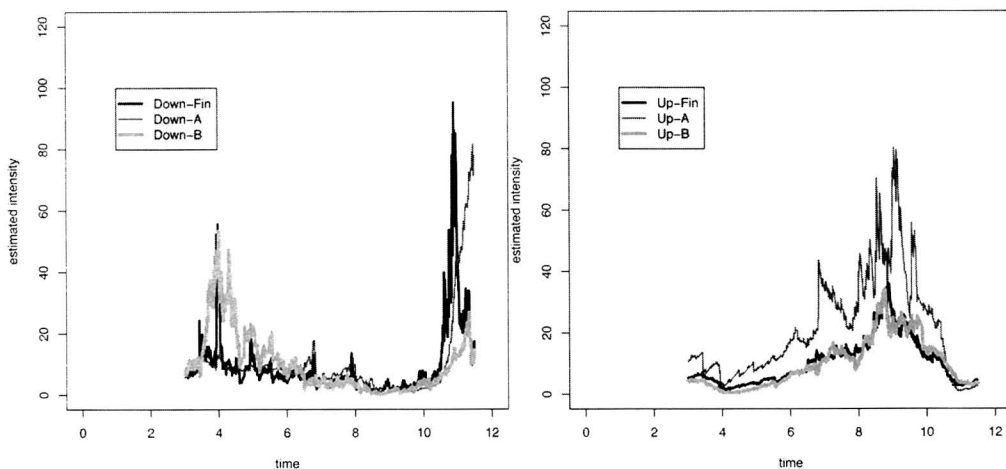


Fig. 5. The estimated paths $\lambda_t^i = \exp(X_t^i)$ (obtained after April 2001) for exponential-form model of the downgrade intensity (Left) and the upgrade intensity (Right) for the three categories obtained by substituting the estimates in Table 4 and the observation into (3.2).

る推定結果においても認めることができる。しかし、適合度検定のような統計的な見地からは、今回提案した相互作用性を見込んだイベント発生強度モデルの妥当性を主張するには不十分である。

また、強度モデルの定式化に限らず、データの加工法、業種カテゴリのまとめ方、パラメータ推定法（最適化手法）など、いずれの点でも改善の余地があり、今後の課題としたい。

謝辞 本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (A) 20241038 の補助を受けて実施されている。

参考文献

- [1] Azizpour, S. and K. Giesecke, “Self-exciting corporate defaults: contagion vs. frailty,” *Working paper, Stanford University* (2008).
- [2] Bowsher, C. G., “Modelling security market events in continuous time: Intensity based, multivariate point process models,” *Journal of Econometrics*, **141** (2007), 876-912.
- [3] Duffie, D., J. Pan and K. Singleton, “Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions,” *Econometrica*, **68** (2000), 1343-1376.
- [4] Errais, E., K. Giesecke and L. R. Goldberg, “Pricing credit from the top down with affine point processes,” to appear in *SIAM Journal on Financial Mathematics* (2010).
- [5] Giesecke, K., L. R. Goldberg and X. Ding, “A top down approach to multi-name credit,” to appear in *Operations Research* (2009).
- [6] Hawkes, A. G., “Spectra of self-exciting and mutually exciting point processes,” *Biometrika*, **58** (1971), 83-90.
- [7] Liptser, R. S. and A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes, 2nd. ed.: I & II*, Springer, 2001.
- [8] Nakagawa, H., “Modeling of contagious rating changes and its application to multi-downgrade protection,” *JSIAM Letters*, **2** (2010), 65-68.
- [9] Ogata, Y., “The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimators for stationary point processes,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **30** (1978), 243-261.
- [10] Protter, P. E., *Stochastic integration and differential equations, 2nd. ed.*, Springer, 2004.

中川 秀敏 (正会員) 〒101-8439 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2

2000 年東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻博士課程修了, 博士 (数理科学)。

現在，一橋大学大学院国際企業戦略研究科准教授。他に，日本金融・証券計量・工学学会，日本オペレーションズ・リサーチ学会などに所属。

(2009年10月29日受付)

(2010年8月3日最終稿受付)