信用ポートフォリオのリスク計量：金利変化見通しと個別企業価値変動を考慮したトップダウン・アプローチ

金子拓也（かねこたくや）／中川秀敏（なかがわひでとし）

要　旨

本稿では、信用ポートフォリオのリスク計量を行ううえで、景気の先行き見通しに関する情報を利用し、評価の精度を高める手法を提案する。具体的には、市場で観察可能な金利の期間構造に反映されている経済情報に応じて、企業格付けの推移確率が影響を受けるモデルを取り入れる。

その際には、CDO（collateralized debt obligation）の評価手法として発展しているトップダウン・アプローチを応用することで、経済情勢の変化がポートフォリオ全体の中で発生する格付け変更の頻度にどう影響するかを評価する。また、ポートフォリオ内の格付け変更を個別企業に割り当てる際には、従来のトップダウン・アプローチを改良し、マートン・モデルに基づき各企業の信用状態を考慮する。実証面では、仮想的な信用ポートフォリオに対し本リスク計量モデルを適用して、経済見通しを考慮する場合としない場合のリスク量を比較し、特にクレジット・イベントが発生する局面では両者の乖離が顕著に増大することを示す。さらに、応用事例として、本リスク計量モデルから得られる個別企業のデフォルト確率の期間構造を用いて、個別貸出の適正金利をプライシングする手法も示す。

キーワード：信用リスク、リスク管理、トップダウン・アプローチ、
モンテカルロ・シミュレーション

本稿は、2009 年 12 月に日本銀行金融研究所が開催した「金融危機後の金融工学の展開」をテーマとする研究ワークショップへの提出論文に加筆・修正を施したものである。青沼君明氏（三菱東京 UFJ 銀行）をはじめ、同ワークショップ参加者から貴重なコメントを頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者たち個人に属する。本稿の筆者のうち中川は、日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究（A）20241038 の補助を受けている。

金子拓也　日本銀行金融研究所（現 ドイツ証券、E-mail: takuya.kaneko@db.com）
中川秀敏　一橋大学大学院国際企業戦略研究科（E-mail: hnakagawa@ics.hit-u.ac.jp）

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

1. はじめに

米国サブプライム住宅ローン問題、リーマンショック等の金融危機を背景に、金融機関におけるリスク管理方法の高度化の必要性が議論されている。従来のポートフォリオ管理では、リスク要因のヒストリカルな分布が将来も変わらないことを前提に評価が行われることが多く、経済の先行き見通しを十分に織り込んでいない面があった。こうした問題点は、2009年4月に米国で公表された、金融監督当局による大手19銀行持ち株会社の資産評価（いわゆるストレステスト；Board of Governors of the Federal Reserve System [2009]）のプロセスなどを経てバーゼル銀行監督委員会が示したストレステストのサウンド・プラクティス（Basel Committee on Banking Supervision [2009]）でも指摘されている。本稿では、こうした課題に対し、金利の期間構造などに含まれた景気の先行き見通しに関する情報を利用してリスク評価の精度を高める手法を提案する。

景気の先行きの予測を織り込んだ信用リスク・モデルの先行研究としてはBelkin, Forest, and Suchower [1998] があり、格付け推移確率の推定に当たって、GDP等の経済指標に基づく計量分析モデルによる予測値を取り込むことが提唱されている。しかし、こうしたマクロ経済指標を用いると、指標の公表が四半期ごとあるいは月次と低頻度であるため評価に遅れが現れやすく、リスク計量の正確性が損なわれる可能性がある。逆に、損失分布の変化をより迅速に捉えることができれば、資本の増強などを適時に実施しやすくなる。したがって、時々刻々変わる先行き見通しを評価に織り込むことがモデルの実用性を高めるうえで望ましい。そこで本稿では、金融市場で日々観測可能な金利の期間構造から経済の先行きの見通しを推計して利用することにした。これにより現在の市場予測と整合的な信用リスクの判断が可能となる。

リスク計量の手法としては、Giesecke, Goldberg, and Ding [2009] 等によりCDOの評価方法として研究されてきたトップダウン・アプローチを用いる。トップダウン・アプローチを用いた信用リスク評価モデルでは、トップ部分に当たるポートフォリオでの事象としてデフォルトの発生のみを扱うことが多い（Azizpour and Giesecke [2008]、Errais, Giesecke, and Goldberg [2010]、Giesecke, Goldberg, and Ding [2009] など）。一方、信用リスク評価の実務では、個別企業の格付け推移が重視されている。そこで本稿では、Nakagawa [2008] と同様に、デフォルトの発生だけでなく企業格付けの変化にも注目して、ある将来時点におけるポートフォリオの損失額の分布を評価する。すなわち、金利の期間構造に内包された経済情報を利用しつつポートフォリオ内の格付け変更の頻度をモデル化し、次に、発生した格付け変更を個別企業に割り当てていく。

また、従来のトップダウン・アプローチでは、ポートフォリオで生じた事象は個別企業の信用状態を考慮せずに割り当てられることが多かった。一方、本稿のモデルでは、Kunisch and Uhrig-Homburg [2008] と同様に、マートン・モデル（Merton

[1974]）により得られるデフォルト確率を各企業の信用状態として、それらの情報に基づきポートフォリオ内の格付け変更を個別企業に割り当てる。具体的には、この信用状態と付与されている格付けに対応するデフォルト確率の範囲とを比較し、その乖離度合いに応じてポートフォリオの格付け変更事象を個別企業の格付け推移に割り当てる。このように格付け推移モデルを構築したうえで、ポートフォリオの損失分布やバリュー・アット・リスク（value at risk; VaR）などの信用リスク量を計測する枠組みを示す。また、期待損失（expected loss; EL）は、個別債権の信用スプレッドによって賄われるべきという考え方に基づいて、ポートフォリオ評価の過程で得られる個別企業のデフォルトの期間構造を活用し、個別債権の適正金利をプライシングする手法を示す。これらにより、信用ポートフォリオのリスク評価と個別債権のプライシングを統一的に行うことが可能になる。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、本稿で提案するリスク計量手法の枠組みを説明する。3節では、格付け変更強度ならびに細分化過程のモデル化の具体的な方法について説明し、4節では、シミュレーションのアルゴリズムなどを示したうえで、仮想ポートフォリオに対するリスク評価を行い考察を加える。また、過去の金利データを基に景気見通しを用いたリスク量を算出し、景気見通しを用いない場合のリスク量との比較を行う。本モデルの応用事例として、個別債権のプライシング手法も示す。5節では、全体をまとめ、今後の課題などについて述べる。

2. リスク計量の枠組み

本稿で提案するリスク計量手法は、トップダウン・アプローチに基づき、景気の先行き見通しを織り込んでポートフォリオの損失分布を評価しリスク管理を行っていくものである。本節では、この計量手法の枠組みについて説明する。

一般的な信用リスク計測モデルでは、デフォルト事象をモデル化することで、損失額を計測することが多いが、本稿ではより詳細な分析が可能となるように格付け変更事象をモデル化する[1]。ポートフォリオ全体の中での格付け変更の頻度については、その大きさを表す強度（intensity）を用いてモデル化し、格付け変更強度は将来の経済見通しと整合的になるように設定する。これにより、実務的によく用いられる格付け推移行列も最終的なポートフォリオの損失分布も、経済見通しが反映されたものとなる。

本節では以下、基本的な設定を行ったうえで、経済見通しを織り込んだポートフォリオの格付け変更事象のモデル化と、その事象を個別企業の信用状態に合わせて確率的に割り当てる手法を示す。

1 格付けの推移を考えることで、将来のリスク資産の評価なども可能になる。

(1) 基本的な設定

評価対象のポートフォリオには、N 社に対する貸出債権が含まれており、各企業には格付けが付与されているものとする。格付けは、信用状態の高い順に $1,\ldots,K$ の段階があるとする。最下位の格付け K はデフォルト状態を表し、この格付けになった企業は再び格上げされることなくデフォルトの状態を続ける。企業 i $(=1,\ldots,N)$ の時点 t における格付け水準を η_t^i と表記する。ポートフォリオの中における時刻 t までの累積格上げ件数を $N_{u,t}$、累積格下げ件数を $N_{d,t}$ とするとき、次式が任意の時点でマルチンゲールとなる $\lambda_{u,t}$、$\lambda_{d,t}$ を考え、これらをそれぞれ格上げ強度、格下げ強度と呼ぶ。

$$N_{u,t}-\int_0^t \lambda_{u,s}\,\mathrm{d}s,\quad N_{d,t}-\int_0^t \lambda_{d,s}\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

すなわち、格付け変更強度 $\lambda_{u,s}$、$\lambda_{d,s}$ は、時点 s における平均的な格付け変更頻度を表している[2]。

(2) 景気の変動と格付け変更強度

トップダウン・アプローチの先行研究では、注目するポートフォリオでの事象の強度について、その事象が発生するごとに強まるものとして、自励型（self-exciting）の強度を採用することが多いが、本稿では、自励型ではなく景気の見通しと、その不確実性に応じた格付け変更強度を考える。

景気と格付け変更事象との関係を考えると、景気が悪化する状況では格下げ事象が多く発生し、景気が好転する状況では格上げ事象が多く発生すると想定される。こうした想定では、景気の悪化が見込まれる場合には格下げ強度が高まり、景気の改善が見込まれる場合には格上げ強度が高まることになる。

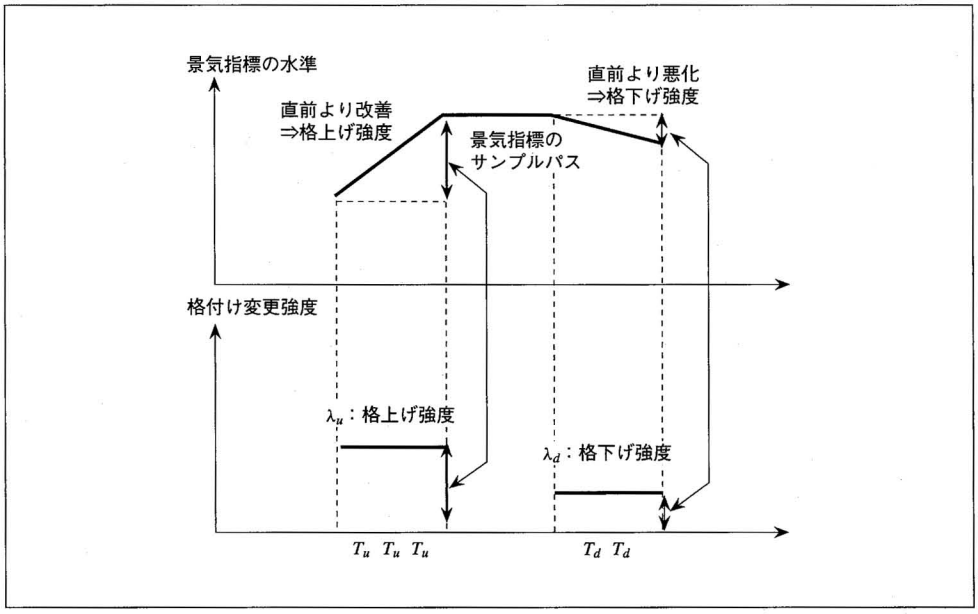
図1は、景気の先行き見通しが与えられた場合に、それに応じた格上げ強度、格下げ強度とそれら2つの強度に基づいて確率的に得られた格付け変更時刻を表している。この図では、景気の先行き見通しを表す指標が増加する量に応じて格上げ強度を定め、減少する量に応じて格下げ強度を定めることと、強度の高い部分で格付け変更事象が発生しやすいことを表している[3]。

2 (1) 式は、格付け変更履歴と経済情報を含む情報を $\mathcal{G}_t$ として、$(\mathcal{G}_t)$-マルチンゲールであり、時刻 t' から t での累積格上げ・格下げ件数の期待値は、次式のようにその期間の平均的な格付け変更強度と一致する。

$$\mathrm{E}[N_{u,t}-N_{u,t'}\mid\mathcal{G}_{t'}]=\int_{t'}^t \mathrm{E}[\lambda_{u,s}\mid\mathcal{G}_{t'}]\,\mathrm{d}s,\quad \mathrm{E}[N_{d,t}-N_{d,t'}\mid\mathcal{G}_{t'}]=\int_{t'}^t \mathrm{E}[\lambda_{d,s}\mid\mathcal{G}_{t'}]\,\mathrm{d}s.$$

3 景気指標の変動量が大きいほど、格付け変更強度は高まり、格付け変更時刻が得られやすくなる。このことは、本設定が景気の先行き見通しに連動して、格付け変更量を増加させる仕組みとなっていることを意味している。

図1　景気の先行き見通しシナリオと格付け変更強度



これらを厳密に整理しておく。時点 t の直前の情報に基づく景気を表す経済指標が先行き上昇する度合いを表す確率変数を X_{t-}、これに基づいて具体的に格上げ強度、格下げ強度を定める関数をそれぞれ $\varphi^u(\cdot)$、$\varphi^d(\cdot)$ とする。前段で考察したように $\varphi^u(X_{t-})$ は X_{t-} の増加関数、$\varphi^d(X_{t-})$ は X_{t-} の減少関数と想定する。$\varphi^u(X_{t-})$、$\varphi^d(X_{t-})$ をそのまま格付け変更強度とするのではなく、格付けが変化しうる状態に対してだけ適用されるように次式のように格付け変更強度を与える[4]。

$$\lambda_{u,t} = \varphi^u(X_{t-})\mathbf{1}_{\{H^1_{t-}+H^K_{t-}<N\}}, \quad \lambda_{d,t} = \varphi^d(X_{t-})\mathbf{1}_{\{H^K_{t-}<N\}}. \tag{2}$$

ただし、H^1_{t-} および H^K_{t-} はそれぞれ、時点 t の直前の最上位格付けが付与されている企業数、最下位格付けが付与されている企業数を表している。実際のリスク評価では、景気の先行きを表す確率変数 X_{t-} をどうモデル化するかが重要であるが、この点に関する具体的なモデル化は、3節で行う。

(3) 個別企業の信用状態を勘案した格付け変更事象の細分化

ポートフォリオで発生した格付け変更事象は、ポートフォリオに含まれる個別の債権の格付け変更として割り当てられる。その割当ては、確率的に行われるため、確

4 $\mathbf{1}_A$ は、事象 A が成立する場合には1、成立しない場合には0の値をとる指示関数で、これによって格付け変更できる状態を特定している。すなわち、すべての格付けが最上位かデフォルトしている場合には、格上げできる対象がなく、$\mathbf{1}_{\{H^1_{t-}+H^K_{t-}<N\}}$ は0となり、$\lambda_{u,t}=0$ となる。また、すべての格付けがデフォルトしている場合は、格下げできる対象がなく、$\mathbf{1}_{\{H^K_{t-}<N\}}=0$ となり、$\lambda_{d,t}=0$ となる。

率的細分化（random thinning）と呼ばれる。各個別債権への割り当てられやすさを示す確率は、通常は固定せず、事象が発生する直前までの情報に基づいて確率的に与えるため、確率過程となる。この確率過程は確率的細分化過程（random thinning process）と呼ばれる。

具体的には、企業 i の格上げ、格下げに関する細分化過程をそれぞれ $Z^i_{u,t}$、$Z^i_{d,t}$ と書くとき、次式が任意の時点でマルチンゲールとなるものと定義する[5]。

$$N^i_{u,t} - \int_0^t Z^i_{u,s}\lambda_{u,s}\,\mathrm{d}s, \quad N^i_{d,t} - \int_0^t Z^i_{d,s}\lambda_{d,s}\,\mathrm{d}s, \tag{3}$$

これは、時点 t における企業 i の累積格付け変更回数（格上げ回数 $N^i_{u,t}$、格下げ回数 $N^i_{d,t}$）は、ポートフォリオの格付け変更強度（$\lambda_{u,s}$、$\lambda_{d,s}$）に、確率的細分化過程（$Z^i_{u,s}$、$Z^i_{d,s}$）をそれぞれ掛け合わせたものの累積値と平均的に等しくなることを意味している。

多くの先行研究では個別企業の信用状態を勘案せずに確率的細分化過程を決めている。これに対して、本稿では、個別企業ごとの資産状態に基づく参照デフォルト確率（以下、参照PD）と付与されている格付けが示す信用状態の上下限との乖離度合いに応じて決める。より具体的には、まず、企業の格付けは期間 T のデフォルト確率を表しているものと考える。格付け $k \in \{1, \ldots, K-1\}$ の上限デフォルト確率を q_k とする。各格付け水準の上限デフォルト確率の間には、次の順序関係があるものとする。

$$0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_{K-1} < q_K = 1. \tag{4}$$

また格付け k の下限デフォルト確率は q_{k-1} とする。すなわち、格付け水準 k は、デフォルト確率が $(q_{k-1}, q_k]$ の範囲であることを表す。各企業の格付けは、計測開始時点0でのデフォルト確率と基本的に整合性を保つように設定される。その後計測期間中には、デフォルト確率が連続的に変化する一方で、格付けは離散的かつ確率的に変化するため、この整合性が保たれないこともある[6]。すなわち、当該企業の格付け変更は、デフォルト確率の変化が直接的に反映されて生じるのではなく、ポートフォリオ内で発生した格付け変更が当該企業に割り当てられた際に生じる。その割当ては、なるべくデフォルト確率が反映されるように行う。すなわち、ポートフォリオで格付け変更が生じた時点 t における各企業 i の参照PD p^i_t を求め、それと当該時点の格付けの下限（上限）デフォルト確率 q_{k-1}（q_k）との乖離度合いが大きいほど、格上げ（格下げ）の割り当てられやすさ（潜在性）が高いと考えてモデル化

5 $0 \le t' \le t \le T$ に対して、格付け変更履歴と経済情報を含む情報を $\mathcal{G}_{t'}$ として、格上げについては $\mathrm{E}[N^i_{u,t} - N^i_{u,t'} \mid \mathcal{G}_{t'}] = \int_{t'}^t \mathrm{E}[Z^i_{u,s}\lambda_{u,s} \mid \mathcal{G}_{t'}]\,\mathrm{d}s$ という式が成立する。格下げについても同様の等式が成立する。

6 格付け変更時刻が多いほど格付け水準を調整する機会が増えるので、整合性が保たれる可能性が高い。

を行う[7,8]。

この点をより具体的に説明すると、次のとおりである。まず、格上げの潜在性、格下げの潜在性をそれぞれ $\xi^i_{u,t}$、$\xi^i_{d,t}$ で表す。これらは、時点 t で企業 i に付与されている格付け水準を η^i_t として、その下限デフォルト確率 $q_{\eta^i_t-1}$ や上限デフォルト確率 $q_{\eta^i_t}$ と参照 PD p^i_t との乖離度合いに応じて、以下のように与える。

$$\xi^i_{u,t} := \max\{q_{\eta^i_t-1} - p^i_t, 0\} \times \mathbf{1}_{\{\eta^i_t \neq 1,K\}}, \tag{5}$$

$$\xi^i_{d,t} := \max\{p^i_t - q_{\eta^i_t}, 0\} \times \mathbf{1}_{\{\eta^i_t \neq K\}}. \tag{6}$$

また、この乖離度合いの規準化のため、格上げ、格下げの潜在性の総和 $\xi_{u,t}$、$\xi_{d,t}$ をそれぞれ以下のように定義する。

$$\xi_{u,t} := \sum_{i=1}^{N} \xi^i_{u,t}, \quad \xi_{d,t} := \sum_{i=1}^{N} \xi^i_{d,t}. \tag{7}$$

格上げや格下げの確率的細分化過程は、(5)、(6) 式で定義した格付け変更の潜在性を (7) 式で規準化して定義する。ただし、参照ポートフォリオ内に格付け変更の潜在性を持つ企業がない場合、すなわち、格上げであれば $\xi_{u,t} = 0$ の状態、格下げであれば $\xi_{d,t} = 0$ の状態の場合には、格付け変更可能な企業[9]の中から、等確率で任意に選んでポートフォリオの格付け変更事象を個別企業に割り当てる。また、企業 i が格付け変更できない格付けにある場合には、その企業には割当てを行わないようにする。これらを数式で表現すると、格上げ細分化過程 $Z^i_{u,t}$、格下げ細分化過程 $Z^i_{d,t}$ はそれぞれ以下のように表現できる[10]。

$$Z^i_{u,t} = \left[\frac{\xi^i_{u,t}}{\xi_{u,t}} \mathbf{1}_{\{\xi_{u,t}\neq 0\}} + \frac{1}{\max\left\{\sum_{k=2}^{K-1} H^k_t, 1\right\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{u,t}=0\}} \right] \times \mathbf{1}_{\{\eta^i_t \neq 1,K\}}, \tag{8}$$

$$Z^i_{d,t} = \left[\frac{\xi^i_{d,t}}{\xi_{d,t}} \mathbf{1}_{\{\xi_{d,t}\neq 0\}} + \frac{1}{\max\left\{\sum_{k=1}^{K-1} H^k_t, 1\right\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{d,t}=0\}} \right] \times \mathbf{1}_{\{\eta^i_t \neq K\}}. \tag{9}$$

7 ここで q_k について考えるのは、CreditMetrics (Gupton, Finger, and Bhatia [1997]) の考え方を援用し、マートン・モデル (Merton [1974]) の意味でのデフォルト確率 p^i_t の水準と格付けを対応させるためである。

8 Kunisch and Uhrig-Homburg [2008] では、デフォルトする企業の組合せ A の同時デフォルト確率 $\hat{p}^A(t)$ をマートン・モデルで計算し、これのすべての組合せに対する相対的な値を用いて、細分化過程をモデル化している。すなわち、企業の組合せ A の細分化過程を Z^A_t、ポートフォリオ全体を X とするとき、$Z^A_t = \hat{p}^A(t)/\sum_{B\in \mathrm{X}} \hat{p}^B(t)$ という形でモデル化を行っている。

9 格上げであれば最上位格付けでない企業かデフォルトしていない企業を、格下げであればデフォルトしていない企業を指す。

10 このように定義されたこれらの細分化過程 $Z^i_{u,t}$、$Z^i_{d,t}$ は $[0,1]$ の値をとることをはじめ、$H^1_t + H^K_t < N$ のとき $\sum_{i=1}^N Z^i_{u,t} = 1$、$H^1_t + H^K_t = N$ のとき $Z^i_{u,t} = 0$、$H^K_t < N$ のとき $\sum_{i=1}^N Z^i_{d,t} = 1$、$H^K_t = N$ のとき $Z^i_{d,t} = 0$ などの性質を満たす。

3. 格付け変更強度と参照デフォルト確率のモデル化

本節では、前節で与えたリスク計量手法の枠組みを実用化するために、格付け変更強度や細分化過程を具体的にモデル化する。まず、先行きの景気変動を表す経済指標で格付け変更強度と関連性の深い指標について実証分析を行い、この結果を基に格付け変更強度のモデル化を行う。次に、参照PDとしてマートン・モデルに基づく推計値を用いることにより、確率的細分化過程の具体的なモデル化を行う。

(1) 金利の変化と格付け変更強度の実証分析

先行きの景気変動を表す経済指標で格付け変更強度を決める際に利用するものとしては、(1)格付け変更頻度と指標の変化の間に高い相関があること、(2)指標の先行きについてシナリオ分析が容易に行えること、(3)高頻度で指標の更新が行われることなどの条件を満たしたものが望ましい。(1)は格付け変更強度を決める景気変動の指標として望まれる条件である。(2)はポートフォリオのリスク分析を行っていくうえで望まれる条件である。モデルを用いて将来の指標の予測値が得られれば、それを格付け変更強度を決める関数に適用してリスク分析を行うことができる。(3)は最新の情報に基づいた迅速なリスク評価に必要な条件である。市場データなど、高頻度で更新される指標を用いれば、最新の市場参加者の予測に基づいて、リスク評価の更改も高頻度で行える[11]。(2)、(3)の条件を満たす市場指標としては、例えば、株価指数や金利を挙げることができる。そこで、2000年2月から2009年3月末の日経平均株価、日本国債10年物利回り、12ヵ月円LIBORを対象にして、各指標の月中平均値の前月差の正の差分と当月の格上げ率の相関係数、各指標の月中平均値の前月差の負の差分と格下げ率の相関係数を求めてみると[12]、表1のようになった。ここで、格付けについては、日本国内の企業カバレッジが最大であるR&I（格付投資情報センター）のデータを用いている。

表1より、格上げ率については12ヵ月物のLIBORとの相関が高いことがわかる。金利の変化と信用リスクの関連性が高いことは、図2でも確認することができる。

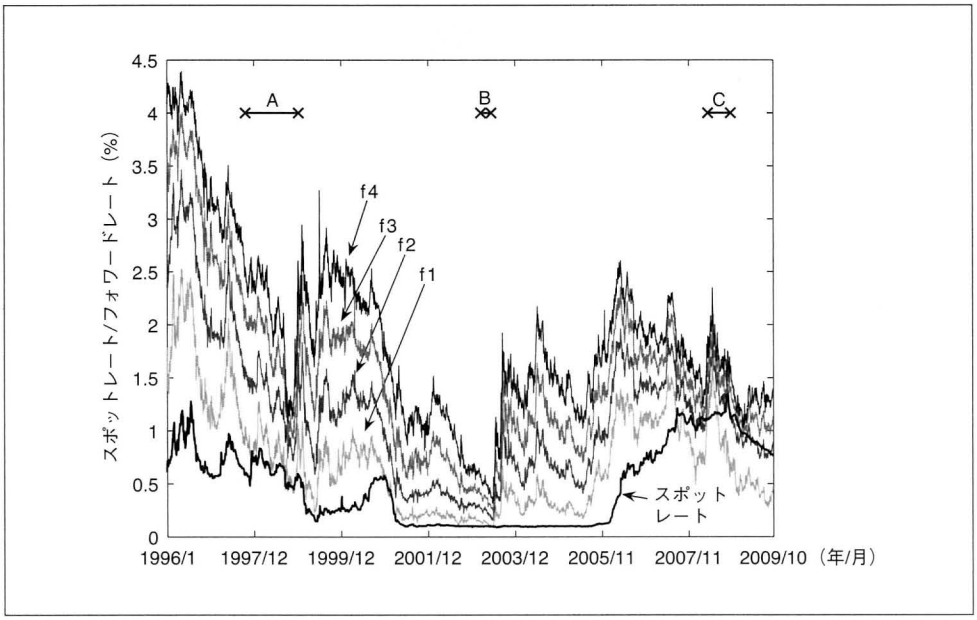
表1　各種経済指標と格付け変化率との相関係数

指標名	日経平均	国債利回り	LIBOR
格上げ率	15.7%	−5.5%	32.2%
格下げ率	−4.2%	−3.6%	−5.4%

11 更新頻度が低い指標を用いる場合、急な指標の変化によってポートフォリオの評価結果にも急な変化が起こり、特に損失分布の裾に大きな影響が及ぶ可能性が考えられる。

12 各指標のある月 t の月中平均値を Y_t とすると、$\max\{Y_t - Y_{t-1}, 0\}$ と格上げ率との相関係数、$\max\{-(Y_t - Y_{t-1}), 0\}$ と格下げ率との相関係数が求められる。

図２　インプライド・フォワードレートの推移



備考：f1、f2、f3、f4 は、それぞれ 1、2、3、4 年後スタートで期間 1 年のフォワードレートを表す。

図 2 は、1996 年 1 月から 2009 年 10 月までの 1 年スポットレートと 1、2、3、4 年後スタートの 1 年間のインプライド・フォワードレートの推移を表している。図からは、以下に述べる主要なクレジット・イベントの発生時期 A、B、C と、金利のスプレッドがタイトニングしている時期が重なっていることがわかる。図の A、B、C 期間に発生した主要なクレジット・イベントは次のとおりである。

- A 期間（1997 年 11 月～1998 年 12 月）：三洋証券、山一証券、北海道拓殖銀行、日本長期信用銀行、日本債券信用銀行等のデフォルト
- B 期間（2003 年 3 月～2003 年 5 月）：りそなグループの救済等
- C 期間（2008 年 3 月～2008 年 9 月）：ベアスターンズ、リーマンブラザーズの経営破綻など米国サブプライム住宅ローン問題関連のデフォルト

この中でも特に、C 期間では、インプライド・フォワードレートがスポットレートを下回ることもあるなど、金利市場での景気の先行き見通しが顕著に悪化している様子が窺われる。

ここでもう一度表 1 を見直すと、格上げ率については 12 ヵ月金利の LIBOR との相関が高いが、格下げ率についてはいずれの指標も相関が低く、逆相関になってしまっていることがわかる。この要因として、12 ヵ月金利については、ゼロ金利政策の影響などから、2001 年後半から 2006 年初まで 0% 近傍でほぼ一定であったこと

が挙げられる[13]。この期間は名目金利の変化で景気の変化を捉えることが難しかったことを示唆している。

そこで、名目金利より的確に景気の変化を捉えうる指標として、潜在金利の考え方（Black [1995]）を導入する。すなわち、経済のファンダメンタルな要因で潜在的な短期金利 z_t が定まり、その値は負にもなりうるが、名目の短期金利 r_t は負の値をとらず次の関係を満たす。

$$r_t = \max\{0, z_t\}. \tag{10}$$

この考え方に基づけば、時点 t で観測される満期 $(t+T)$ のスポットレート s_t^T や、満期 $(t+T)$ の無リスク割引債の価格 p_t^T は、潜在金利を用いて、

$$p_t^T = \exp(-s_t^T \times T) = \mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_t^{t+T} \max\{0, z_s\}\,\mathrm{d}s\right)\right], \tag{11}$$

と表される[14]。本稿では以下、この潜在的な短期金利 z_t は、次に示す Vasicek モデル（Vasicek [1977]）に従って変動すると仮定する。

$$\mathrm{d}z_t = \alpha(\theta - z_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{12}$$

ただし、α は平均回帰速度、θ は平均回帰水準、σ はボラティリティで、いずれも正の定数であり、W_t はブラウン運動とする。

2000 年 3 月から 2010 年 1 月までの 3、6、9、12 ヵ月 LIBOR の月中平均値を用いて、(11) 式の関係から、

$$\{\hat{\alpha}_t, \hat{\theta}_t, \hat{\sigma}_t\} = \underset{\alpha_t, \theta_t, \sigma_t}{\mathrm{argmin}} \sum_{m=1}^{4} \left| p_t^{T_m} - \mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_t^{t+T_m} \max\{0, z_s\}\,\mathrm{d}s\right)\right]\right|, \tag{13}$$

という最適化によりパラメータ $\hat{\alpha}_t$、$\hat{\theta}_t$、$\hat{\sigma}_t$ を決定し[15]、その結果に基づき、各満期（3、6、9、12 ヵ月）の潜在金利を求め、その推移を名目金利とともに図示すると[16]、

13 このことは図 2 の太線のスポットレートの推移でも確認することができる。また、2001 年 6 月から 2005 年末までの日次の 12 ヵ月円 LIBOR は、平均が 0.096%、標準偏差が 0.0065% と、2009 年前半の平均金利である 0.94% と比較しても極めて低い水準で推移していたことが確認できる。

14 (11) 式の期待値は (12) 式の潜在金利の確率過程をリスク中立測度での確率過程と考えた際の期待値であるが、本稿では現実の確率測度とリスク中立測度は一致しているものとして以下の分析を行う。

15 (13) 式では T_1、T_2、T_3、T_4 はそれぞれ 3 ヵ月、6 ヵ月、9 ヵ月、12 ヵ月を示す。

16 時点 t での満期 T_m の潜在金利 $z_t^{T_m}$ は、求められたパラメータ $\hat{\alpha}_t$、$\hat{\theta}_t$、$\hat{\sigma}_t$ を用いて、z_t にその時点の 1 週間物 LIBOR を用いて、(12) 式に基づいて次式で与えられる。

$$z_t^{T_m} = \mathrm{E}\left[\int_t^{t+T_m} z_s\,\mathrm{d}s\right] = \int_t^{t+T_m} \{\hat{\theta}_t + (z_t - \hat{\theta}_t)\mathrm{e}^{-\hat{\alpha}_t(s-t)}\}\,\mathrm{d}s = \hat{\theta}_t T_m + (z_t - \hat{\theta}_t)(1 - \mathrm{e}^{-\hat{\alpha}_t T_m})/\hat{\alpha}_t.$$

図 3　潜在金利の推移

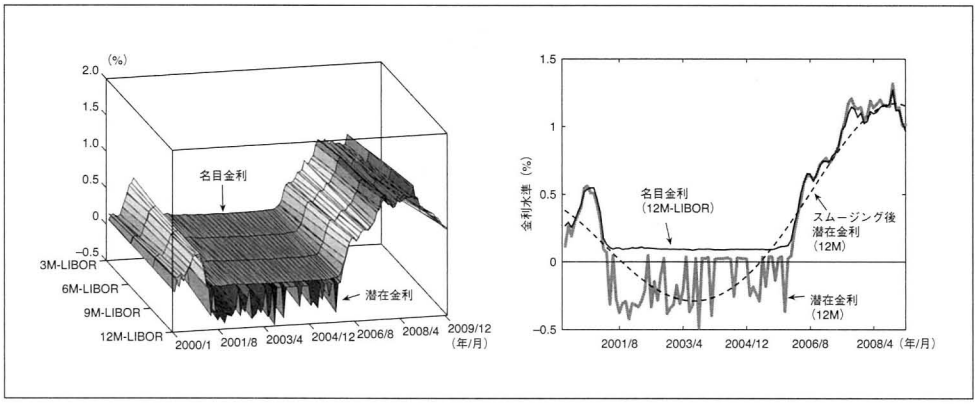


表 2　潜在金利の変化と格付け変化率との相関係数

指標名	潜在金利	スムージング後潜在金利
格上げ率	12.9%	75.3%
格下げ率	6.9%	55.5%

図 3 左図のようになった。金利がほぼゼロとなる期間においては負の符号を持つ潜在的な金利が得られるが、それ以外の期間では、潜在金利と名目金利がほぼ一致していることを確認できる。図 3 右図では、格付け変化との関連性を調べるに当たり利用する 12 ヵ月の潜在金利と、潜在金利をスムージングしたものの推移を示している[17]。

このようにして得られた 12 ヵ月潜在金利とそれにスムージングを施したデータを用いて、表 1 と同様に 2000 年 2 月から 2009 年 3 月末について前月差分の正の部分と格上げ率、前月差分の負の部分と格下げ率の相関係数を求めると、表 2 のようになった。

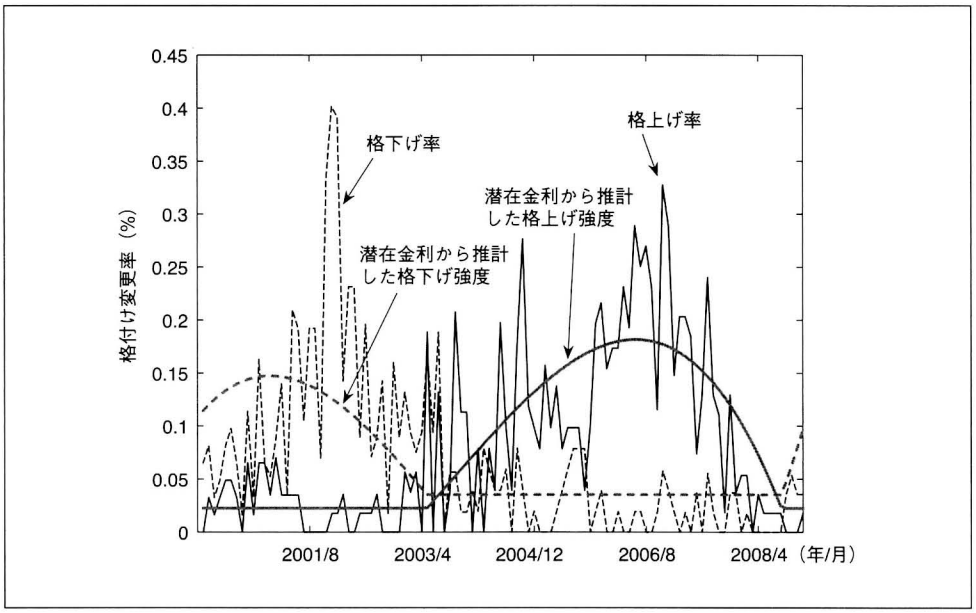
表 1 と表 2 を比較すると、格上げ率との関連性の強かった短期金利は、潜在金利で捉え直しスムージングすると、格下げ率との関連性もかなり高くなることがわかる。そこで、以下のモデル化では、潜在金利を景気指標として用いることにする。名目金利と同様、潜在金利も日々データを更新できる指標であるほか[18]、名目の短期金利がゼロに近づいていない状況では、潜在金利は名目金利と一致していると考えることが可能である。

より詳細に潜在金利の変化と 2000 年 2 月から 2009 年 5 月までの格上げ率や格下

17 潜在金利のスムージングは、得られた 12 ヵ月潜在金利を 4 次スプライン関数にフィッティングさせることによって得た。

18 ただし、スムージングについては、リアルタイムで実行した場合と事後的なデータを十分に含めて行った場合とで、相応に異なる結果となることが知られている。このため、日々データを更新する場合には、リアルタイムのリスク評価の精度に課題が残る。例えば、図 3 右図をみると、特にゼロ金利に入る前後や出る前後の局面で、名目金利が急な変化を示しているのと対照的にスムージング後の金利は、円滑な変化にとどまっており、両者の乖離が大きくなってしまっている。

図４　格付け変化率と潜在金利（スムージング後）から推計した格付け変更強度との関係



げ率の推移を比較すると、図４のようになる。格上げ率および格下げ率は、R&Iの格付けについてブルームバークにより得られる格付け変更情報を月ごとに集計し、格付け付与総数で除することにより計算している。この格付け変化率を示す折れ線に重なるように描かれている曲線は、潜在金利の変化に基づく回帰式で求められた格付け変更強度である。具体的には、４次スプライン関数で表現されるスムージングされた潜在金利から、その前月差を求め、格上げについてはその正の値を説明変数、格下げについてはその負の値を説明変数として、格上げ強度および格下げ強度を被説明変数とする回帰式を推計した。この図からも、潜在金利の回帰モデルに基づく格付け変更強度と実際の格付け変更率が相応の関係を持っていることがわかる。

以上の分析を踏まえ、本稿では以下、潜在金利に着目し、そのフォワードレートを利用して将来の格付け変更強度をモデル化する。これにより、日々の金利市場での客観的な情報を反映したリスク評価が可能となるほか、市場リスクとも整合的な信用リスクの評価が可能となる。

(2) 金利モデルを用いた格付け変更強度のモデル化

２節(2)で考察したように、格上げ強度 $\lambda_{u,t}$ や格下げ強度 $\lambda_{d,t}$ はそれぞれ、(2)式のように関数 $\varphi^u(X_{t-})$、$\varphi^d(X_{t-})$ を用いてモデル化される。格上げ強度を定める関数 $\varphi^u(X_{t-})$ は景気の先行き見通し X_{t-} に対して増加関数、格下げ強度を定める関数 $\varphi^d(X_{t-})$ は景気の先行き見通し X_{t-} に対して減少関数となる。ここでは、本節(1)

での実証結果を踏まえ、景気の先行き見通し X_{t-} として潜在金利の変化を採用し、$\varphi^u(X_{t-})$ や $\varphi^d(X_{t-})$ の具体的な関数形を定める。

まず、景気の先行き見通し X_{t-} としては、時点 t での情報 $\mathcal{F}_t$ に基づいた瞬間的な潜在金利の条件付き期待変化幅を考える。すなわち、

$$X_{t-} = \frac{\mathrm{E}[\mathrm{d}z_t \mid \mathcal{F}_t]}{\mathrm{d}t}, \tag{14}$$

とする。潜在金利の瞬間的変化幅 $\mathrm{d}z_t$ については、(12) 式の Vasicek モデルにおける平均回帰水準 θ と t の関数 θ_t に一般化した、次のハル＝ホワイト・モデル（Hull and White [1994]）を適用する。

$$\mathrm{d}z_t = \alpha(\theta_t - z_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{15}$$

ただし、(12) 式と同様、α、σ は正の定数であり、θ_t は評価時点の金利の期間構造に基づく平均回帰水準とする。このとき、時点 t での景気の先行き見通し X_{t-} は、

$$X_{t-} = \alpha(\theta_t - z_t), \tag{16}$$

と整理できる。実装上は、リスク計測期間 $[0, T]$ について、$t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T$ という分点をとって離散化する[19]。すなわち、時点 $t \in (t_j, t_{j+1}]$ では、潜在金利は一定値 z_{t_j} であるとする。このとき、時点 $t \in (t_j, t_{j+1}]$ での景気の先行き見通し X_t は、(14)、(15) 式より

$$X_t = \frac{\mathrm{E}[z_{t_{j+1}} - z_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_j}]}{t_{j+1} - t_j} = \alpha(\theta_{t_j} - z_{t_j}), \tag{17}$$

と表せる。ここで、金利変化と格付け変更の関連性について改めて考えると、図 4 からは、潜在金利の上昇時に実際の格上げ率が高く、潜在金利の低下時に実際の格下げ率が高くなるという関係が看守される。一方で、相対的には少ないものの、金利低下時での格上げや、金利上昇時での格下げも発生している。以上の点を考慮し、時点 $t \in (t_j, t_{j+1}]$ で格上げ変更強度を定める関数 $\varphi^u(X_t)$ と格下げ変更強度を定める関数 $\varphi^d(X_t)$ を、それぞれ、(17) 式で定められる景気見通しの変化量 X_t に基づいて、以下のような関数で与える。

$$\varphi^u(X_t) = b^u + s^u \cdot \max\{X_t, 0\}, \quad \varphi^d(X_t) = b^d + s^d \cdot \max\{-X_t, 0\}. \tag{18}$$

潜在金利（スムージング後）を用いて、(18) の回帰式のパラメータを最小二乗法により推計すると、$b^u = 2.242\%$、$s^u = 444.00$、$b^d = 3.513\%$、$s^d = 486.69$ となっ

19 より具体的には、$t_j - t_{j-1} = 1$ 年としてモデル化する。

た[20]。これは1社当たりの格付け変更強度のパラメータとなるため、4節のシミュレーションでは、これらのパラメータをポートフォリオに含まれる企業数倍した値をパラメータとして利用する。

(3) 参照デフォルト確率と格付け変更後の格付けのモデル化

ここでは、参照PDの計算と、格付け変更事象が割り当てられた個別企業の新しい格付け水準について説明する。

イ．参照デフォルト確率

マートン・モデルに基づいて、参照PDを計算する。企業 i の時点 t における資産価値 A_t^i は、次式の対数正規過程に従うものとする。

$$\mathrm{d}A_t^i = \mu_i A_t^i \,\mathrm{d}t + \sigma_i A_t^i \,\mathrm{d}W_t^i. \tag{19}$$

ただし、μ_i、σ_i は[21]それぞれドリフト係数、ボラティリティ係数を表し、時点0で財務指標等から推定されるとする。このとき、企業 i の時点 t での参照PD p_t^i は、マートン・モデルで得られる時点 $t+T$ でのデフォルト確率として次のとおり計算する[22]。

$$p_t^i = \mathrm{P}\left(A_{t+T}^i < D^i \mid A_t^i\right) = \mathrm{N}\left[\frac{\log(D^i/A_t^i) - \{\mu_i - \sigma_i^2/2\}T}{\sigma_i\sqrt{T}}\right]. \tag{20}$$

ここで、D^i は企業 i の総負債を表し、p_t^i は時点 $t+T$ で債務超過となっている確率を表す。

ロ．格付け変更後の格付け

格付け変更が割り当てられた企業 i の新しい格付け水準は、以下の手順で決める。考え方は、2節(3)で解説した細分化方法と表裏の関係にあり、格付け変更の潜在性が小さくなるように定める。具体的には、企業 i の現在の格付け水準 $\eta_{t_}^i$ を l、遷移

20 (18)式の推計では、$\varphi^u(X_t)$ の自由度調整済み決定係数は0.567、b^u の t 値は3.06、s^u の t 値は11.87、$\varphi^d(X_t)$ の自由度調整済み決定係数は0.298、b^u の t 値は4.48、s^u の t 値は6.81となった。

21 ドリフト μ_i は成長性を表すパラメータである。この推計に当たっては、売上高、営業利益率、経常利益率等の財務指標の伸び率を説明変数としてモデル化することが考えられる。ボラティリティ σ_i は安定性を表すパラメータである。その推計に当たっては、自己資本比率、流動性比率、当座比率等の財務指標を説明変数として推計することが考えられる。

22 p_t^i は、各企業の期初の財務指標に基づくドリフト μ_i、ボラティリティ σ_i のほかに時点 t での資産価値 A_t^i に依存することから、期初に同じ格付け水準と設定された企業であっても、他の格付け水準に遷移する確率は異なる。この様子は、後掲図10の左図のポートフォリオ内で期初に同じ格付け水準であった企業のデフォルトの期間構造を比較することでも確認できる。

先の格付け水準 η_t^i を k として、この企業に格付け変更を割り当てたときの参照 PD からの乖離度合いがゼロに近いほど、格付け変更が割り当てられやすくなるよう、指数関数を用いて次のように格付け推移確率を定める。

格上げ：$1 \le k < l \le K-1$ として、

$$\mathrm{P}\left(\eta_{t-}^i = l, \eta_t^i = k \mid \Delta N_{u,t}^i = 1, \eta_{t-}^i > \eta_t^i\right) = \frac{\exp(-\max\{q_k - p_t^i, 0\})}{\sum_{k'=1}^{l-1} \exp(-\max\{q_{k'} - p_t^i, 0\})}. \tag{21}$$

格下げ：$1 \le l < k \le K$ として、

$$\mathrm{P}\left(\eta_{t-}^i = l, \eta_t^i = k \mid \Delta N_{d,t}^i = 1, \eta_{t-}^i < \eta_t^i\right) = \frac{\exp(-\max\{p_t^i - q_k, 0\})}{\sum_{k'=l+1}^{K} \exp(-\max\{p_t^i - q_{k'}, 0\})}. \tag{22}$$

4. 仮想ポートフォリオの損失分布のシミュレーション

本節では、仮想ポートフォリオを設定したうえで、その損失分布をモンテカルロ・シミュレーションにより求め、各種リスク指標などについて考察する。以降のシミュレーションでは、リスク評価期間は $T = 5$ 年とし、設定ごとに $n = 1$ 万回の試行計算を行う。

(1) 損失の定義とリスク指標

企業 i $(= 1, \ldots, N)$ に対するエクスポージャーを E_i、回収率を δ_t^i、デフォルト時刻を τ_i[23] とするとき、T 年後のポートフォリオの損失 L_T は次のように計算できる。

$$L_T = \sum_{i=1}^{N} E_i \times \left(1 - \delta_{\tau_i}^i\right) \times \mathbf{1}_{\{\tau_i \le T\}}. \tag{23}$$

ここで、シミュレーションの第 j 回目の試行で得られる損失額を L_T^j とし、n 回試行を繰り返す。これを昇順に並べ替えたものを $L_T^{(j)}$ と定義する。このとき、期待損失額を $\mathrm{EL}_{n,T}$、$100 \times \alpha\%$ VaR を $\mathrm{VaR}_{n,T}^{\alpha}$、非期待損失額を $\mathrm{UL}_{n,T}^{\alpha}$ とすると、これらは以下のように計算できる。ただし、信頼水準 α については例えば $\alpha = 0.999$ といった水準を考える。

$$\mathrm{EL}_{n,T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_T^i, \quad \mathrm{VaR}_{n,T}^{\alpha} = L_T^{([\alpha \times n]+1)}, \tag{24}$$

$$\mathrm{UL}_{n,T}^{\alpha} = \mathrm{VaR}_{n,T}^{\alpha} - \mathrm{EL}_{n,T}. \tag{25}$$

23 デフォルト時刻 τ_i は、企業 i の格付け水準 η_t^i が、初めて格付け K となる時刻として定義する。

表3　シミュレーションで利用したポートフォリオ

No. i	元本 E_i	回収率 δ_i	格付け r_0^i	資産 A_0^i	負債 D^i	ドリフト μ_i	ボラティリティ σ_i	参照PD（5年）	対応する格付け水準
1	100	25%	1	100	50	1.5%	20%	7%	1
2	90	20%	1	100	60	1.0%	20%	15%	1
3	80	25%	2	100	70	0.0%	20%	28%	2
4	70	20%	2	100	75	0.0%	20%	34%	2
5	60	25%	3	100	85	–1.0%	20%	49%	3
6	50	20%	3	100	85	–1.5%	20%	51%	3
7	40	15%	3	100	85	–2.0%	20%	53%	3
8	30	25%	4	100	85	–5.0%	20%	66%	4
9	20	20%	4	100	85	–6.0%	20%	70%	4
10	10	15%	4	100	90	–6.0%	20%	74%	4

表4　格付け水準（k）と上下限デフォルト確率の対応

格付け水準（k）	1	2	3	4	5（K）
上限デフォルト確率（q_k）	20%	40%	60%	80%	100%
下限デフォルト確率（q_{k-1}）	0%	20%	40%	60%	80%

ただし、$[x]$ は x を超えない最大の整数とする。

(2) 仮想ポートフォリオの設定

シミュレーションで利用する仮想ポートフォリオは、表3のとおり、全10社で構成されるものとした。格付けの種類は $K=5$ とし、仮想ポートフォリオには、上位格付けの1と2が2社ずつ、下位格付けの3と4が3社ずつ含まれる。表の右から2列目にある参照PDとは、評価時点においてマートン・モデルに基づいて計算された、5年後の時点でデフォルトとなっている確率を示している。その参照PDは、表4にある各格付け水準と上下限デフォルト確率との対応表に整合する設定となっている[24]。

(3) パラメータの設定

イ．金利パラメータ

金利のサンプルパスは、前述のとおり(15)式のハル＝ホワイト・モデルに基づき発生させる。モデルの各種パラメータは、次のとおり設定した。平均回帰スピード

24 表3の最右列は、参照PDを表4に基づいて格付けに対応させたものであり、当初に設定する格付け η_0^i と完全に一致している。

は $\alpha = 5\%$、ボラティリティは $\sigma = 0.05\%$ とし、平均回帰水準 θ_t については、1年ごとに $x\%$ ずつ定量を変化させた。この定量変化幅 x としては、$+0.3\%$ から -0.3% まで 0.025% 刻みに25パターンを試す。この25パターンのうち、例えば、毎年フォワードレートの回帰水準が 0.3% ずつ上昇する設定は、景気が最も急速に好転する見通しを[25]、-0.3% ずつ下降する設定は、景気が最も急速に悪化する見通しを意味する[26]。また、初期値は $\theta_0 = z_0$ と設定する。

ロ. 格付け変更強度

シミュレーションでは、3節(2)で得た1社当たりの格付け変更強度の推計結果をポートフォリオの企業数倍し、以下の (26) 式および (27) 式を時点 $t \in (t_j, t_{j+1}]$ でのポートフォリオの格付け変更強度とした。

$$\text{格上げ } \lambda_{u,t} = (22.4\% + 4440 \times \max\{\alpha(\theta_{t_j} - z_{t_j}), 0\}) \times \mathbf{1}_{\{H^1_{t-} + H^K_{t-} < N\}}, \quad (26)$$

$$\text{格下げ } \lambda_{d,t} = (35.1\% + 4847 \times \max\{-\alpha(\theta_{t_j} - z_{t_j}), 0\}) \times \mathbf{1}_{\{H^K_{t-} < N\}}. \quad (27)$$

ハ. 回収率

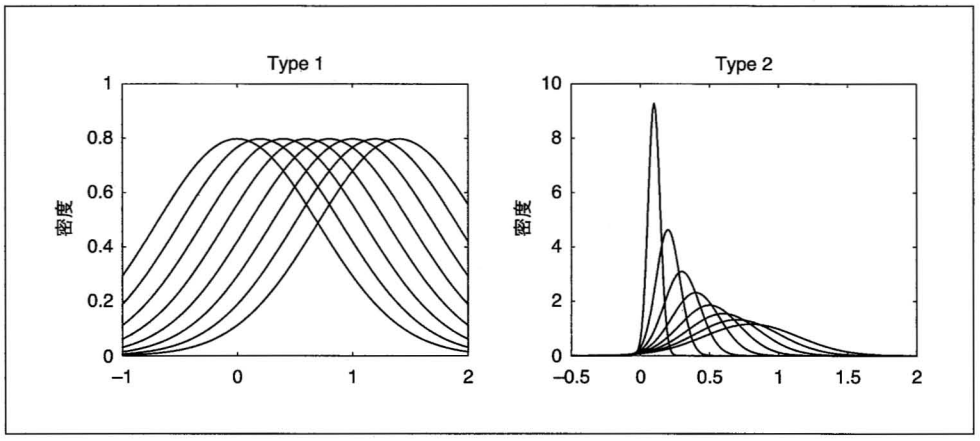
回収率の設定については、表3に掲げた、固定回収率を所与として扱う方法と、変動回収率を想定する方法の2通りがある。変動回収率の設定方法は、金子・中川 [2006] を参考に次のとおりとする。

企業資産（$A^i_{\tau_i}$）の換金性（$C_r \in [0,1]$）を考慮した後の価値を調整後資産と呼び、この調整後資産の負債（D^i）に対する比率を $\tilde{\delta}_\tau$ とし[27]、$\tilde{\delta}_\tau$ が正規分布に従うものと仮定する。なおシミュレーションでは、$C_r = 0.5$ とおいた。このとき変動回収率（δ_τ）は、比率 $\tilde{\delta}_t$ を区間 $[0,1]$ 内に切断した形で、$\delta_\tau := \min\{\max(\tilde{\delta}_\tau, 0), 1\}$ と定義する。ただし、$\tilde{\delta}_\tau$ の期待値 μ_δ は、$C_r A^i_{\tau_i}/D^i$ で与え、標準偏差 σ_δ の与え方として以下の2つの方法を考察する。すなわち Type 1 は、期待値の値によらず標準偏差が一定であるとし、Type 2 は、期待値が高いほど標準偏差が高まる設定となっている。2つの標準偏差の与え方による $\tilde{\delta}_\tau$ の分布形状のイメージは、図5のとおりとなる。

- Type 1: 期待値（μ_δ）によらず、標準偏差（σ_δ）を一定におく。シミュレーションでは、$\sigma_\delta = 0.5$ とした。
- Type 2: 期待値（$\mu_\delta > 0$）の水準に応じて、$\mathrm{P}(\tilde{\delta}_\tau \leq 0) = 0.01$ となる標準偏差を逆算して与える。すなわち $\sigma_\delta = \mu_\delta/2.33$ とおく。

25 図6および図7中の表記では、「景気見通し」の「好転」が該当する。
26 図6および図7中の表記では、「景気見通し」の「悪化」が該当する。
27 負債総額に対する換金可能資産の比率を意味しており、金子・中川 [2006] では、B/S 調整後資産・負債カバレッジ率と呼んでいる。

図５　２つの $\tilde{\delta}$（変動回収率の参考値）の分布



備考：図の横軸は、$\tilde{\delta}_\tau$ を表し、回収率 δ_τ は、$\delta_\tau = \min\{\max(\tilde{\delta}_\tau, 0), 1\}$ より得る。左図は Type 1、右図は Type 2 の分布形状を表す。

(4) シミュレーションのアルゴリズム

これまでに、本稿で提案するリスク計量の考え方を具体的に提示したが、実際にポートフォリオに対してシミュレーションを行ううえでのアルゴリズムを改めて整理すると、以下のとおりである。

Step 1. 金利のサンプルパスを発生：リスク計測期間 $T = 5$ 年間について、1 年ごとに離散化した潜在金利 $z_1, \ldots, z_5$ を初期値 z_0 から出発してシミュレートする［(15) 式］。

Step 2. 格付け変更強度を設定：Step 1 で得られた金利パス $z_0, z_1, \ldots, z_5$ を、金利と格付けの関係式に代入し、格上げ強度 $\lambda_{u,t}$ と格下げ強度 $\lambda_{d,t}$ のパスを得る［(26)、(27) 式］。

Step 3. 格付け変更時刻 T_j のサンプリング：格上げ・格下げ双方に対して、Step 2 で得られた 1 年刻みの格付け変更強度 λ_s（$\lambda_{u,s}$ あるいは $\lambda_{d,s}$）を用いて、時点 t までの累積強度を $\Lambda(t) = \left(\sum_{s=0}^{[t]-1} \lambda_s\right) + \lambda_{[t]}(t - [t])$ と設定する[28]。$[0, 1]$ の一様乱数を発生させて $u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots$ とし、j 番目の格付け変更時刻 T_j を $T_j = \Lambda^{-1}\left(\sum_{i=1}^{j} u_i\right)$ によってサンプリングする[29]。T_j はリスク計測期間の満期 $T = 5$ 年を超える直前でサンプリングを終える。

28 $[t]$ は、t を超えない最大の整数値。

29 ただし、ここで得られたサンプル格付け変更時刻で、実際に格付けを変更するかどうかは、時点 T_j での生存企業数 $N - H^K_{T_j-}$ を当初企業数 N で割ることで得られる確率でランダムに判定する。これは、設定している格付け変更強度が、当初企業数全数を想定しているためで、特に少ない企業数で構成したポートフォリオであっても、モデルが適切に機能するための措置である。具体的に格上げ強度については、$\lambda_{u,t} = \varphi^u(X_{t-}) \times \frac{N - H^K_{t-}}{N} \mathbf{1}_{\{H^1_{t-} + H^K_{t-} < N\}}$ という調整を加えている。

Step 4. 企業の資産価値の計算：企業 i の時点 T_j における資産価値 $A^i_{T_j}$ は、直前のサンプル時刻 T_{j-1} での資産価値に基づいて、標準正規乱数 ε_j を用いて、$A^i_{T_j} = A^i_{T_{j-1}} \exp\left[\left\{\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right\}(T_j - T_{j-1}) + \sigma_i \varepsilon_j \sqrt{T_j - T_{j-1}}\right]$ とする［(19) 式］。

Step 5. 参照 PD の計算：Step 4 で得られた資産価値 $A^i_{T_j}$ を当初資産価値として、参照 PD（$p^i_{T_j}$）を計算し直す［(20) 式］。

Step 6. 確率的細分化過程を計算：各企業 i について、現在の格付け水準 η^i_t の下限デフォルト確率、上限デフォルト確率（$q_{\eta^i_t - 1}$、$q_{\eta^i_t}$：表 4 参照）と Step 5 で得られる参照 PD を用いて、格上げ、格下げそれぞれの細分化過程 $Z^i_{u,t}$、$Z^i_{d,t}$ を計算する［(8)、(9) 式］。

Step 7. 格付け変更企業の特定：Step 6 の細分化に基づき格付け変更企業を確率的に決める。具体的に格上げの場合は、v を [0, 1] の一様乱数、$\hat{Z}^{i'}_{u,t}$ $(:= \sum_{i=1}^{i'} Z^i_{u,t})$ を第 i' 社までの累積確率的細分化過程とするとき、v と $\hat{Z}^{i'}_{u,t}$ を $i' = 1$ から順番に比較し、初めて $\hat{Z}^{i'}_{u,t}$ が v を超える i' を、格付け変更企業とする。

Step 8. 新しい格付け水準を決定：格付けを変更する企業の参照 PD と、各格付けの上限デフォルト確率から、確率的に新しい格付け水準を決める［(21)、(22) 式］。

Step 9. ポートフォリオ損失額を計算：満期時点において、デフォルト状態である企業について、エクスポージャーと (1 − 回収率) を掛け合わせた値の総和を計算し、ポートフォリオのサンプル損失額を得る［(23) 式］。

Step 10. 反復による損失分布の生成：Step 1 から Step 9 を n (= 10,000) 回繰り返し、n 個のポートフォリオ損失シナリオを計算する。その頻度から、損失分布を得て、EL、VaR、UL などの値を計算する［(24)、(25) 式］。

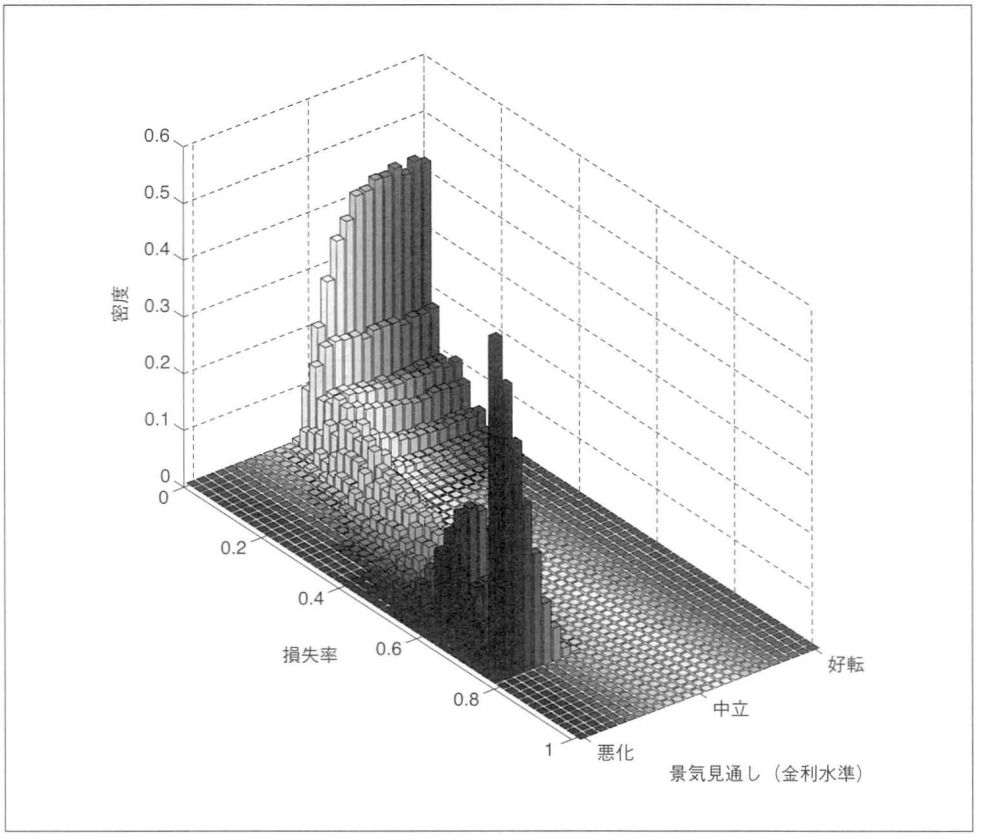
(5) 損失分布のシミュレーション結果

上記の設定に基づくシミュレーション結果は、図 6 および図 7 のとおりとなった。図 6 は回収率を表 3 の固定値とした場合で、図 7 は変動回収率とした場合である。図 7 の左図は、変動回収率を Type 1 とした場合を示し、右図は、変動回収率を Type 2 とした場合を示す。

これらの図からは、いずれの場合においても先行き潜在金利が上昇し景気が改善し続ける設定（図中の「好転」）においては、ポートフォリオの損失率が縮小する方向に分布がシフト（図においては左上にシフト）し、逆に先行き潜在金利が低下し景気が悪化し続ける設定（図中の「悪化」）においては、ポートフォリオの損失率が拡大する方向に分布がシフト（図においては右下にシフト）しており、景気見通しの設定と整合的な損失率の分布が得られていることがわかる。このことは、図 8 に示された 95% VaR の計算結果からも、同様に確認できる。図 8 では、先行きが好景気であるほど VaR は小さくなり、不景気であるほど VaR は大きくなっている[30]。

30 なお、図 8 の固定回収率の VaR 値をみると、景気の著しい悪化が見込まれる領域では VaR が一定と算出されているが、これは、ポートフォリオ内の参照 PD を高めに設定していたことから、すべての企業がデ

図 6　損失率分布（固定回収率の場合）



備考：各種景気見通しのもとでの損失率分布。図中の好転は金利の回帰水準が毎年 0.3% ずつ上昇する場合を表し、悪化は毎年 −0.3% ずつ下降する場合を表す。

また、2 つの変動回収率の設定では、Type 2 は回収率の期待値が高いほどその標準偏差が高まることから、Type 1 の損失分布よりも分布がなだらかになり、若干裾が厚くなることが図 6、7 および図 8 よりわかる。

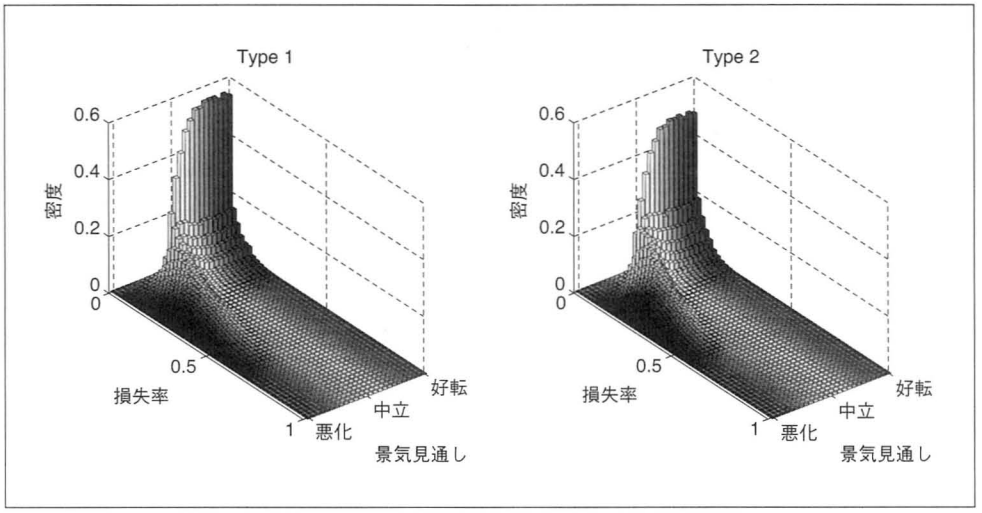
(6) 仮想ポートフォリオの VaR、EL、UL

ここでは、表 3 のポートフォリオを持つ金融機関を想定し、図 2 に示したように 1996 年 1 月から 2009 年 10 月まで[31]に実際に市場で実現した金利環境に直面した場合に、その時々の先行き景気見通しに応じて、信用ポートフォリオの VaR、EL、UL がどのように評価されるかを試算する。また、この試算結果を、景気見通しを織り込まない手法で計算されたリスク量と比較し、どのような違いがあるかを考察する。

フォルトしたというシミュレーション結果となっているためである。

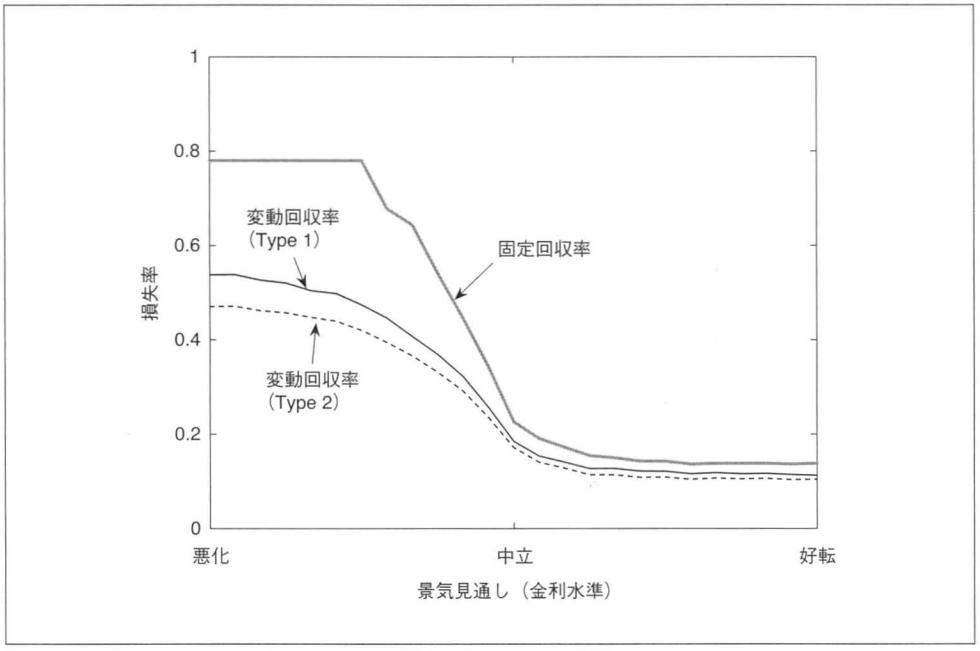
31 この期間の全観測日数を (28) 式の D とする。

図 7　損失率分布（変動回収率の場合）



備考：左図は、$\tilde{\delta}$ が Type 1 に従う場合を表し、右図は、Type 2 の場合を表す。

図 8　各種景気見通しのもとでの 95% VaR の計算結果



備考：図中の好転は金利の回帰水準が毎年 0.3% ずつ上昇する場合を表し、悪化は毎年 −0.3% ずつ下降する場合を表す。

VaR、EL、UL は、(24)、(25) 式により算出する。計算に当たっては、金利モデルの平均回帰水準以外の各種設定条件は、損失分布のシミュレーションと同一にし回収率の設定は Type 1 とした。平均回帰水準の変化量 x_t については、過去の各時点

における景気の先行き見通しを反映させる形で次のように設定した[32]。

$$\tilde{x}_t = \frac{\left(f_t^{(1)} - spot_t\right) + \left(f_t^{(2)} - f_t^{(1)}\right) + \left(f_t^{(3)} - f_t^{(2)}\right) + \left(f_t^{(4)} - f_t^{(3)}\right)}{4}$$
$$= \frac{f_t^{(4)} - spot_t}{4},$$
$$x_t = \tilde{x}_t - \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{D}\tilde{x}_s, \tag{28}$$

ただし、$spot_t$ を時点 t でのスポットレート、$f_t^{(m)}$ を時点 t での m 年後スタート、期間1年のインプライド・フォワードレートとし、$\tilde{x}_t$ を潜在金利の先行き4年間の平均変化量（インプライド値）とする。平均回帰水準の変化量 x_t は、$\tilde{x}_t$ を全観測日数 D の平均値で規準化したものとする[33]。

過去の各時点で x_t が定まれば、シミュレーションにより損失分布を求められるほか[34]、(24)式より99%-VaR：$\mathrm{VaR}_{10000,5}^{0.99}$（$= L_5^{(9901)}$）と $\mathrm{EL}_{10000,5}$ を、(25)式よりULを計算できる。比較の対象とする景気見通しを織り込まない方法は、$x_t = 0$ とした場合であり、先行きの潜在金利が不変で景気が中立的であるシナリオに相当している。

結果は、図9のとおりとなった。点線で示した景気見通しを織り込まない場合の結果と比べて、実線の景気を織り込む場合のVaR、EL、ULは、各クレジット・イベントの時期に顕著に大きな値となることがわかる。したがって、金利の期間構造に基づいて景気に対する市場の予測を反映したリスク量を把握することの必要性は、特に市場にストレスが発生している時期に大きいと考えられる。

(7) モデルの応用事例：個別貸出債権のプライシング

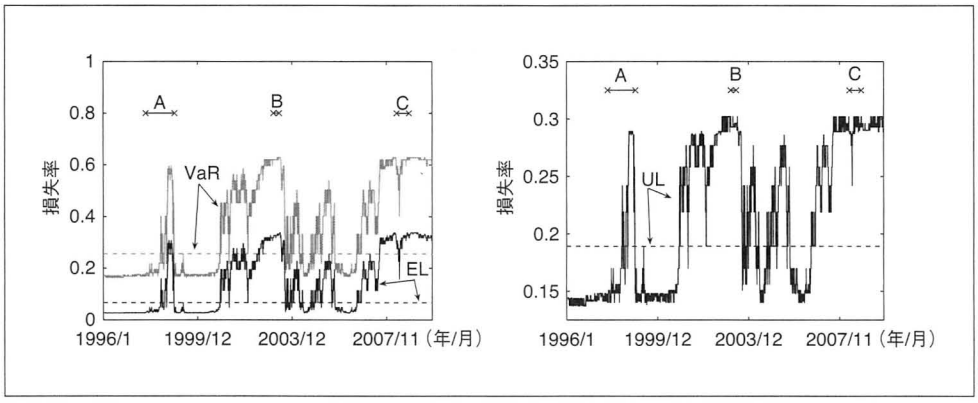
信用リスク管理の一般的な考え方では、ELは個別企業への貸出債権からの金利収入によってまかなわれる。個別企業に対する貸出金利を決める際には、本稿のリスク計量の枠組みが応用可能である。すなわち、ポートフォリオの格付け変更強度と個別企業への細分化を通じて得られる個別企業のデフォルト確率の期間構造に基づ

32 時点 t をリスク評価の初期時点として、各時点 t でのシミュレーションでは $\theta_{t_{j+1}} - \theta_{t_j} = x_t$ とした。

33 規準化を行う理由は、リスクの市場価格が存在していることにより、金利の平均回帰水準が不変と見込まれる場合でも $\tilde{x}_t$ は正値をとるためである。ここでは、調整すべきリスクの市場価格を、$\tilde{x}_t$ の全観測日数の平均値で捉えている。

34 実際の計算では、図6の固定回収率の場合のシミュレーションの結果のうち、過去の各時点の x_t が最も近い損失率分布を抜き出し、時系列に並べ直した。なお、図6のシミュレーションにおける年当たりの金利の上昇量が +0.3% から −0.3% のシナリオに加え、同 +0.3% から +0.5% までのシナリオも追加計算した。なお、このレンジの金利上昇量を超える上昇量が観測される場合には、便宜的に、上昇量を +0.5% で固定して計算した。

図 9　仮想ポートフォリオの VaR、EL、UL の推移



備考：左図は、仮想ポートフォリオの VaR、EL を、右図は、UL を表す。図中の A、B、C 期間は、図 2 と同様に設定したクレジット・イベント期を示す。図中の点線は、景気見通しを織り込まない場合の計算結果である。

いて貸出金利を決めれば、信用ポートフォリオのリスク管理と個別貸出債権のプライシングを統一的な枠組みで扱うことができる。ここでは、具体的な方法として、シミュレーションで得られた各企業のデフォルト確率の期間構造に関する情報を用いて、ポートフォリオに含まれる個別貸出債権について、期間 5 年の期日一括返済型の債権として、金子・中川［2006］の手法に基づいて適正な貸出金利を計算する。

イ．適正な貸出金利の計算方法

金子・中川［2006］は、市場性のない中小企業貸出のプライシングを念頭において、金融機関が要求するリスクプレミアムと均衡する貸出金利の計算式を整理している。ここでのリスクプレミアムは、デフォルト確率の期間構造と回収率の不確実性に対して市場が要求するプレミアムであり、具体的には企業のデフォルト時刻 τ、回収率 δ に対して、$\Phi(\alpha,\lambda) = \lambda \mathrm{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}(1-\delta)^{\alpha}]$ と定義されている[35]。このとき、固定の無リスク金利 r に対して、企業への適正な貸出金利 c は、リスクプレミアムとの均衡関係から[36]、次式で計算される。

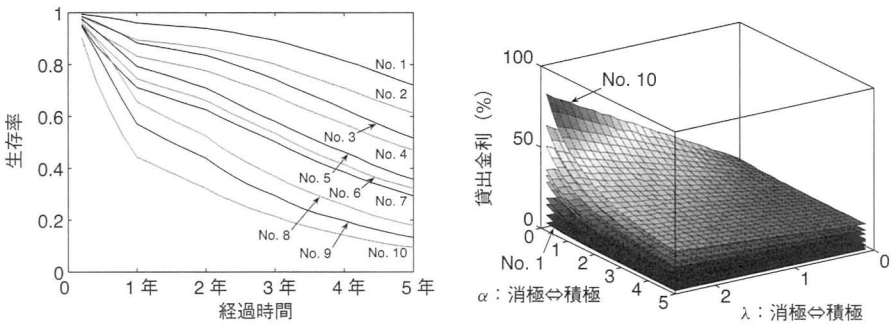
$$c = r \times \frac{1 + \Phi(\alpha,\lambda) - \mathrm{E}\left[\delta \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \mathrm{e}^{-r\tau} + \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \mathrm{e}^{-rT}\right]}{\mathrm{E}\left[1 - \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \mathrm{e}^{-r\tau} - \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \mathrm{e}^{-rT}\right]}. \tag{29}$$

35 リスクプレミアム $\Phi(\alpha,\lambda)$ は、パラメータ α の減少関数であり、λ の増加関数となる。パラメータ α は、回収効果を調節し、λ は、デフォルトの期間構造をシフトさせる設定となっている。

36 元本 1 の貸出に対して連続複利の貸出金利を c として、デフォルトする場合 $\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}$ とデフォルトしない場合 $\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$ を考えると、リスクプレミアムと貸出金利の均衡関係は次式で与えられ、これを整理すると (29) 式を得る。

$$1 + \Phi(\alpha,\lambda) = \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} \times \left\{\int_0^{\tau} c\mathrm{e}^{-rs}\,\mathrm{d}s + \delta \mathrm{e}^{-r\tau}\right\} + \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \times \left\{\int_0^{T} c\mathrm{e}^{-rs}\,\mathrm{d}s + 1\mathrm{e}^{-rT}\right\}\right].$$

図 10　適正な貸出金利の計算事例



備考：左図は、ある設定に基づく仮想ポートフォリオ内の企業（No. 1～No. 10）の生存率を表す。右図は、いくつかのリスクプレミアム・パラメータ（α、λ）に基づく適正な貸出金利の算出結果を表す。

ロ．仮想ポートフォリオを用いた適正な貸出金利の計算事例

図 10 は、ポートフォリオ内の各企業のデフォルト確率の期間構造とプライシング結果を示している。ただし潜在金利の変動を表すパラメータについては、平均回帰スピードを 25%、ボラティリティを 0.1% と固定している。平均回帰水準 θ_t は、1 年ごとに $x = -0.05\%$ ずつ定量を変化させる。格付け変更強度は (26) および (27) 式を用いて計算する[37]。図 10 左図からは、ポートフォリオ評価の過程で得られる各企業のデフォルト確率の期間構造は、表 3 に示した個社別の信用状態を反映した形で得られていることがわかる。こうした分析は、キャッシュフロー発生のタイミングが複雑な場合に、より効果的となる。図 10 右図からは、リスクプレミアムを高く設定すると（α を小さく、λ を大きく設定すると）、縦軸に示される適正貸出金利の水準が、全体的に高く算出され、逆にリスクプレミアムを低くすると（α を大きく、λ を小さく設定すると）、全体的に低く算出されていることがわかる。このことからも設定条件と整合的なプライシングが行われていることが確認できる。

5. おわりに

本稿では、トップダウン・アプローチに基づき、先行きの景気見通しを織り込んで信用ポートフォリオの格付け変更強度をモデル化したうえで、個別企業の信用状態に応じた細分化を行うことで個別企業に格付け変更を割り当て、信用ポートフォリオのリスク計量を行う枠組みを提案した。景気見通しを把握する指標としては、具体的には、潜在金利の期間構造に織り込まれた先行きの潜在金利変動を取り上げた。

37 5 年後の累積デフォルト確率が、表 4 と整合するように、この設定とした。

また、個別企業の信用状態については、格付け変更直前の当該企業の資産価値とそのドリフト、ボラティリティに基づき、マートン・モデルから算出される参照PDを用いた。通常のトップダウン・アプローチでは、信用ポートフォリオのデフォルト事象に注目し、個別企業の信用状態を勘案せずに細分化が行われるが、本稿の枠組みは、格付け変更事象に注目し、個別企業の信用状態を勘案した細分化を行っている点が特徴的である。

シミュレーションでは、ポートフォリオの損失率の分布や、VaRなどのリスク指標の計算例を示したうえで、応用事例として、ポートフォリオ評価の過程で得られる個別企業のデフォルト確率の期間構造を活用して、貸出債権のプライシングを行う手法を示し、リスク評価とプライシングを統一して行う枠組みを呈示した。

市場で観測される金利の期間構造から景気見通しとそれに基づく格付け変更強度を求めるメリットとしては、各金融機関が共通して観測可能な情報から景気見通しを抽出し信用リスクの評価に活用できることや、金利の期間構造とそのボラティリティをデフォルト確率の期間構造に反映できることなどが挙げられる。また、金利の期間構造を信用リスク把握に用いることで、これまで市場リスクと切り離されて管理されることが多かった信用リスクの管理を市場リスク管理と統合的に捉える視点が得られる。

本稿で示した信用リスク計量の枠組みを実務で運用していくには、いくつかの課題も残されている。例えば本稿では、潜在的な金利の変化に対する格付け変更強度は格付け水準によらず一定としてモデル化を行っているが、これを格付け水準別に推定することで、より詳細なモデルが構築できるものと考えられる。また、金利変化以外にも景気見通しに関する追加的な情報を組み入れることで格付け変更モデルの精緻化を図ることなども考えられる。

参考文献

金子拓也・中川秀敏、「B/S を利用した回収率とそれに基づく貸出債権の適正プライシング・モデル」、『日本応用数理学会論文誌』第 16 巻第 3 号、2006 年、317～343 頁

Azizpour, Shahriar, and Kay Giesecke, "Self-Exciting Corporate Defaults: Contagion vs. Frailty," Working Paper, Stanford University, 2008.

Basel Committee on Banking Supervision, "Principles for Sound Stress Testing Practices and Supervision," Basel Committee Publications No. 147, 2009 (www.bis.org/publ/bcbs147.pdf).

Belkin, Barry, Lawrence R. Forest, and Stephan J. Suchower, "A One-Parameter Representaion of Credit Risk and Transition Matrices," *CreditMerics Monitor (3rd Quarter),* 1998, pp. 46–56.

Black, Fischer, "Interest Rates as Options," *The Journal of Finance,* 50 (7), 1995, pp. 1371–1376.

Board of Governors of the Federal Reserve System, "The Supervisory Capital Assessment Program: Design and Implementation," Board of Governors of the Federal Reserve System, 2009 (www.federalreserve.gov/newsevents/press/bcreg/bcreg20090424al.pdf).

Errais, Eymen, Kay Giesecke, and Lisa R. Goldberg, "Affine Point Processes and Portfolio Credit Risk," Working Paper, Stanford University, 2010.

Giesecke, Kay, Lisa R. Goldberg, and Xiaowei Ding, "A Top-Down Approach to Multi-name Credit," *Operations Research,* forthcoming, 2009.

Gupton, Greg M., Christopher C. Finger, and Mickey Bhatia, "CreditMetrics—Technical Document," J.P. Morgan, New York, 1997 (www.riskmetrics.com).

Hull, John, and Alan White, "Branching Out," *Risk,* 7 (4), 1994, pp. 34–37.

Kunisch, Michael, and Marliese Uhrig-Homburg, "Modeling Simultaneous Defaults: A Top-Down Approach," *The Journal of Fixed Income,* 18 (1), 2008, pp. 25–36.

Merton, Robert C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *The Journal of Finance,* 29 (2), 1974, pp. 449–470.

Nakagawa, Hidetoshi, "Modeling of Contagious Rating Changes and Its Application to Multi-downgrade Protection," Working Paper, Hitotsubashi University, 2008.

Vasicek, Oldrich Alfons, "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure," *The Journal of Financial Economics,* 5 (2), 1977, pp. 177–188.