〔調査〕『回帰分析の理論』補論*

本稿は，拙著『回帰分析の理論』(岩波書店)の4，5章で述べた検定のロバストネスの部分，および8章で述べた2つの回帰式の間の独立性の検定の部分，に対する補論である。§1および§2の検定のロバストネスに関する部分では，検定のクラスをスケール変換のもとで不変な検定のクラスに制限することで，正規分布のもとで導出された t 検定および系列相関の検定が，もっと広い分布のクラスの中で一様最強力性を主張できることを示す。また不変検定のクラスと不変性を課さない検定のクラスの関係を調べる。§3では，鍋谷清治一橋大学教授のコメントに基づき，2つの回帰式の独立性の片側検定統計量の仮説のもとで分布の別表現を与える。また広範囲な数表を掲載する。§4では内容に関する若干の訂正を行う。

§1 t 検定のロバストネス

§1.1 一様最強力性の意味

[**1.1.1**] §1は，『回帰分析の理論』の4章(以下これを『4章』と略す)に対する補論である。『4章』の問題を復習する。観察可能な n 次元確率ベクトルは，密度関数

(1.1.1) $\quad f(\boldsymbol{z}|\mu,\sigma^2)=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2/\sigma^2)/\sigma^n$

をもつ分布に従うとする。ここで $\mu\in R^1, \sigma>0$ は未知であり，$\boldsymbol{a}_0\,(\neq\boldsymbol{0})$ は $n\times 1$ の既知ベクトルである。そして検定問題 $H:\mu=0$ v. s. $K:\mu>0$ (または $\mu\neq 0$)を考察する。確率変数 $z_1,\cdots,z_n$ が独立に平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従うとき，$\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_n)'\sim N(\mu\boldsymbol{1},\sigma^2\boldsymbol{I}_n)$ となるから，$\boldsymbol{z}$ の密度関数は $\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{1}=(1,\cdots,1)'$ として(1.1.1)の形に書ける。したがって(1.1.1)で $\mu=0$ を検定する問題は，正規分布の平均 $\mu=0$ を検定する問題の拡張である。(1.1.1)では σ^2 と q は共に未知であるから，一般性を失うことなく σ^2 を q に吸収させることができる。もう少し具体的に問題を述べるために，R^n 上の Lebesgue 測度に関する密度関数全体を $\mathscr{F}_n$ で表わし，$\mu\in R$ に対して

(1.1.2) $\quad Q=\{q|q:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty),$

$$\int_{R^n}q(\|\boldsymbol{z}\|^2)\,d\boldsymbol{z}=1\}$$

(1.1.3) $\quad \mathscr{F}_0(\mu)=\{f\in\mathscr{F}_n|f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2),\,q\in Q\}$

(1.1.4) $\quad \mathscr{F}_1(\mu)=\{f\in\mathscr{F}_n|f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2),\,q\in Q,$ q: 単調非増加関数$\}$

(1.1.5) $\quad \mathscr{F}_2(\mu)=\{f\in\mathscr{F}_n|f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2),\,q\in Q,$ q: 単調非増加凸関数$\}$

とおく。$\mathscr{F}_0(0)$ は spherical 分布の中で密度関数をもつもののクラスである(『回帰分析の理論』2章参照)。明らかに

$$\mathscr{F}_2(\mu)\subset\mathscr{F}_1(\mu)\subset\mathscr{F}_0(\mu)$$

であり，$\mathscr{F}_2(\mu)$ は正規分布 $N(\mu\boldsymbol{a}_0,\sigma^2\boldsymbol{I})$ のほかに，多変量 t 分布，多変量 Cauchy 分布，混合正規分布等，正規分布より裾の広い分布を含む。これらの密度関数のクラスに対して，『4章』では片側検定問題

(1.1.6) $\quad H_0:f\in\mathscr{F}_0(0)$ v. s. $K_1:f\in\mathscr{F}_1(\mu),\,\mu>0$

および両側検定問題

(1.1.7) $\quad H_0:f\in\mathscr{F}_0(0)$ v. s. $K_2:f\in\mathscr{F}_2(\mu),\,\mu\neq 0$

を考察し，次の結果を証明している。

定理 1.1.1(『4章』定理4.3.1)　検定問題(1.1.6)に対して検定

(1.1.8) $\quad \varphi_1(\boldsymbol{z})=\begin{cases}1 & T>k\text{ のとき}\\ 0 & T\leq k\text{ のとき}\end{cases}$

は，一様最強力(UMP)検定である。ここで

(1.1.9) $\quad T=\boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{a}_0\|\|\boldsymbol{z}\|$

である。有意水準 α に対して棄却点 k は，自由度 $n-1$ の t 分布の密度関数 $t(u:n-1)$ を用いて

(1.1.10) $\quad \displaystyle\int_{k'}^{\infty}t(u:n-1)\,du=\alpha,\ \ k=k'/(n-1+k'^2)^{\frac{1}{2}}$

から計算される。

定理 1.1.2(『4章』定理4.4.2)　検定問題(1.1.7)に対して，検定

---

*　§3および§4は，拙著に関して鍋谷教授から戴いた非常に有益なコメントに基づいている。鍋谷教授に深く感謝する。また数表の作成に関して九段コンピューターサービスに重ねて感謝する。

(1. 1. 11)　$\varphi_2(z)=\begin{cases}1 & T>b \text{ または } T<a \text{ のとき}\\ 0 & a\leq T\leq b \text{ のとき}\end{cases}$

は，一様最強力不偏(UMPU)検定である。棄却点a, bは(1. 1. 10)と同様にt分布から決定できる。

2つの結果は，別なアプローチによって証明されている。またTに基づく検定は，通常のt検定と同等であることに注意する。

[**1.1.2**]　定理1. 1. 1の結果に対して次のような疑問が起るかもしれない。いま検定問題

(1. 1. 12)　$H(1): f\in N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ v. s. $K(1): f\in N(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{I})$

を考察しよう。(1. 1. 12)は，$\boldsymbol{z}$の密度関数fが正規分布であって，その平均が$\mathbf{0}$であるという仮説を$\boldsymbol{a}_0$であるという対立仮説に対して検定する問題である。ただし分散行列は$\boldsymbol{I}$である。このときNeyman-Pearsonの補題から棄却域

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{a}_0\|^2\right]\Big/\exp\left[-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}\|^2\right]>k$$

をもつ検定，すなわち

(1. 1. 13)　$\psi_1(\boldsymbol{z})=\begin{cases}1 & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{a}_0>c_1 \text{ のとき}\\ 0 & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{a}_0\leq c_1 \text{ のとき}\end{cases}$

が最強力(MP)検定である。これは明らかに(1. 1. 8)の一様最強力(UMP)検定φ_1と異る。しかし$N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$の密度関数は$\mathcal{F}_0(0)$に属し，$N(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{I})$のそれは$\mathcal{F}_1(1)$に関するから，(1. 1. 8)の検定$\varphi_1$がUMPであるというのはおかしいではないか，という疑問である。この疑問は自然であるが，検定理論の約束によって検定φ_1がUMPを主張するのは，(1. 1. 6)の帰無仮説H_0のもとで有意水準αをもつ検定のクラス

(1. 1. 14)　$\mathcal{C}_\alpha=\{\phi\in\mathcal{T}|E_f[\phi]\leq\alpha \text{ for all } f\in\mathcal{F}_0(0)\}$

に対してであって，その外のものと比較してではない。ただし$\mathcal{T}$は検定関数全体を表わす。同様に，(1. 1. 13)の検定ψ_1がMPであるのは，(1. 1. 12)の帰無仮説$H(1)$のもとで有意水準αをもつ検定のクラス

(1. 1. 15)　$\mathcal{C}_\alpha(1)=\{\psi\in\mathcal{T}|E[\psi|N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})]\leq\alpha\}$

に対してである。ここで$E[\psi|N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})]$は$N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$のもとでの期待値を表わす。$N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$の密度関数は$\mathcal{F}_0(0)$に属するから

(1. 1. 16)　$\mathcal{C}_\alpha(1)\supset\mathcal{C}_\alpha$

であり，したがって(1. 1. 8)のUMP検定φ_1は，(1. 1. 12)の検定問題に対しては，(1. 1. 13)のMP検定ψ_1より検出力が低い。しかし，ψ_1は(1. 1. 14)の$\mathcal{C}_\alpha$に属さない。実際，$\mathcal{F}_0(0)$に属する分布として$N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)$をとると，$\sigma^2<1$に対して

$$E[\psi_1|N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})]>\alpha$$

となることが簡単に示される。このことは，$\mathcal{C}_\alpha(1)\supsetneqq\mathcal{C}_\alpha$であると同時に，$\varphi_1$が$\mathcal{C}_\alpha$の中でUMPであることは$\psi_1$が$\mathcal{C}_\alpha(1)$でMPであることと矛盾しないことを示している。なお，ψ_1が問題(1. 1. 12)においてψ_1がφ_1よりよい検定であることは，問題(1. 1. 12)で分散が既知であるという情報を利用した結果であって，ψ_1は(1. 1. 8)のφ_1のようにスケール変換に対して不変な構造をもつことの必要がないことを示している。

[**1.1.3**]　次にLehmann and Stein (1948)の結果と定理1. 1. 1を比較するために，1つの補助定理を証明する。まず記号として

(1. 1. 17)　$w=\|\boldsymbol{z}\|^2,\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$

とおくと，$\boldsymbol{z}$と$(w, \boldsymbol{u})$は1対1対応をするから，一般性を失うことなく検定関数ϕを$(w, \boldsymbol{u})$の関数として$\phi(w, \boldsymbol{u})$と表わす。ただし$P(\boldsymbol{z}=\mathbf{0})=0$より，一般性を失うことなく$\mathbf{0}$を$R^n$から除いておく。このとき『4章』の補助定理4. 4. 1および4. 4. 2より

(i)　wは$\mathcal{F}_0(0)$に対して完備十分統計量である

(ii)　wと$\boldsymbol{u}$は$H_0: f\in\mathcal{F}_0(0)$のもとで独立である

(iii)　H_0のもとでの$\boldsymbol{u}$の分布は$f\in\mathcal{F}_0(0)$に依存しない

ことが成立する。

補助定理1.1.1　検定$\phi(w, \boldsymbol{u})$が(1. 1. 14)の$\mathcal{C}_\alpha$に属するための必要十分条件は，

(1. 1. 18)　$\phi^*(w)\equiv E_0{}^{\boldsymbol{u}}[\phi(w, \boldsymbol{u})]\leq\alpha$　a. e. $(w, f\in\mathcal{F}_0(0))$

である。ただし$E_0{}^{\boldsymbol{u}}$は(iii)によってfに依存しない$\boldsymbol{u}$に関する期待値である。

証明　十分性は明らかである。必要性を証明するために，ある$f_0\in\mathcal{F}_0(0)$が存在して，f_0は集合$S\equiv\{w>0|\phi^*(w)>\alpha\}$に対して正の測度を与えるとしよう。$f_0$のもとでの$w$の密度関数を$f_0{}^w$で表わすと，$f_0{}^w$は$R_+=\{x\in R|x>0\}$の上のLebesgue測度に関して絶対連続であるから，Sは正のLebesgue測度をもち，Sは有界な空でない開集合Aを含む。このAを用いて，R^nの上の密度関数f_1を

$$f_1(\boldsymbol{z})=I_A(\|\boldsymbol{z}\|^2)\Big/\int_{R^n}I_A(\|\boldsymbol{z}\|^2)d\boldsymbol{z}$$

で定義すると，$f_1\in\mathcal{F}_0(0)$であり，$f_1{}^w$は集合$A\subset S=\{w>0|\phi^*(w)>\alpha\}$に確率1を与えるから，

$$E_{f_1}[\phi^*(w)]=E_{f_1}E_0{}^{\boldsymbol{u}}[\phi(w, \boldsymbol{u})]>\alpha$$

となる。したがって$\phi\notin\mathcal{C}_\alpha$となり，必要性が証明された。

Lehmann and Stein (1948)は，検定問題

(1. 1. 19)　$H(2): f\in N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)$ v. s.

$$K(2): f \in N(\mu \mathbf{1}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n),\ \mu>0$$

を扱い，(1.1.8)の検定 φ_1 あるいはそれと同等な t 検定が UMP である場合は，有意水準 α が 1/2 より大きい場合であって，$\alpha \leq 1/2$ の場合には UMP 検定は存在しないことを示している。この結果も，定理 1.1.1 の結果と矛盾するかのようにみえる。しかし，この場合の UMP 検定の存在・非存在は，検定のクラス

(1.1.20)　$\mathscr{C}_\alpha(2)=\{\psi|E[\psi|N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)]\leq\alpha\}$

の中で議論されているのであって，(1.1.14)のクラス $\mathscr{C}_\alpha$ ではないことに注意すべきである。もちろん $N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ の密度は $\mathscr{F}_0(0)$ に属しているから，

(1.1.21)　　$\mathscr{C}_\alpha(2) \supset \mathscr{C}_\alpha$

である。しかし $\mathscr{C}_\alpha(2)=\mathscr{C}_\alpha$ でないことは，次のように示すことができる。任意の $\varepsilon>0$ に対して w のみに基づく検定

(1.1.22)　$\psi_2(w)=\begin{cases}1 & 1<w<1+\varepsilon \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$

を作り，『4章』の補助定理の w の密度関数を用いると，

$$\begin{aligned}E[\psi_2(w)|N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})] &= \int_1^{1+\varepsilon} c_0 w^{\frac{n}{2}-1}\sigma^{-n} \\ &\quad \exp(-w/2\sigma^2)\,dw \\ &\fallingdotseq \varepsilon[c_0\sigma^{-n}\exp(-1/2\sigma^2)]\end{aligned}$$

となり，右辺の［ ］の中は有界であるから十分小さい ε をとると

$$E[\psi_2(w)|N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})]\leq\alpha$$

となる。したがって $\psi_2 \in \mathscr{C}_\alpha(2)$ であるが，$\{w>0|\psi_2(w)>\alpha\}$ は $N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ のもとで正の測度をもつから，補助定理 1.1.1 によって $\psi_2 \notin \mathscr{C}_\alpha$ である。それゆえ $\mathscr{C}_\alpha(2) \supsetneqq \mathscr{C}_\alpha$ である。この意味で，$\alpha \leq 1/2$ のとき，検定問題(1.1.19)に対して $\mathscr{C}_\alpha(2)$ の中で UMP 検定は存在しないという Lehmann and Stein (1948) の結果は，(1.1.8)の φ_1 が $\mathscr{C}_\alpha$ の中で UMP 検定であるという定理 1.1.1 の結果を否定するものではない。

[1.1.4]　では Lehmann and Stein (1948) の問題で $\alpha \leq 1/2$ のとき，$\mathscr{C}_\alpha(2)$ の中に UMP 検定が存在しないのに対して，われわれの問題では $\mathscr{C}_\alpha$ の中に UMP 検定が存在するという相異は，どこに起因しているのであろうか。この問に答えるために，最初に $\mathscr{C}_\alpha(2) \supsetneqq \mathscr{C}_\alpha$ であることに注目する。$\mathscr{C}_\alpha(2) \supsetneqq \mathscr{C}_\alpha$ は，(1.1.6)の帰無仮説のクラス $\mathscr{F}_0(0)$ が，$N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ のほかにきわめて多くの密度関数を含んでいることに依る。$\mathscr{F}_0(0)$ が大きなクラスであるということは，水準 α をもつ検定のクラス $\mathscr{C}_\alpha$ を，$\mathscr{C}_\alpha(1)$ あるいは $\mathscr{C}_\alpha(2)$ に比べて相対的に小さくするだけでなく，さらに(1.1.8)の φ_1 が実際に $\mathscr{C}_\alpha$ の中で UMP であることを示す上で重要な役割を果している。この後者の役割をみるために，定理 1.1.1 の証明を復習してみよう。φ_1 がクラス $\mathscr{C}_\alpha$ の中で UMP であることは，任意の $\phi \in \mathscr{C}_\alpha$ と任意の $\mu>0$ および $f_1 \in \mathscr{F}_1(\mu)$ に対して

(1.1.23)　　$E_{f_1}[\varphi_1] \geq E_{f_1}[\phi]$

を示せばよい。この証明のキー・ポイントは

(1.1.24)　　$f_1(\boldsymbol{z})=q_1(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2)$

とすれば，f_1 に依存して $\mathscr{F}_0(0)$ の中から

(1.1.25)　$f_0(\boldsymbol{z})=q_1(\|\|\boldsymbol{z}\|\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2)/I(q_1, \mu)$

(1.1.26)　$I(q_1, \mu)=\displaystyle\int_{R^n} q_1(\|\|\boldsymbol{z}\|\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2)\,d\boldsymbol{z}$

を選択する点にある。ここで $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ は

(1.1.27)　$P\left(\dfrac{\boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{a}_0\|\|\boldsymbol{z}\|}>\dfrac{\boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}_0\|\|\boldsymbol{b}\|}\middle| N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})\right)=\alpha$

を満たす $n\times 1$ の任意のベクトルである。$\boldsymbol{b}$ は (q_1, μ) に依存しないことに注意せよ。そして(1.1.25)の f_0 を(1.1.24)の f_1 に対して検定する問題を考察するわけだが，Neyman-Pearson の補題から棄却域

(1.1.28)　　$f_1(\boldsymbol{z})/f_0(\boldsymbol{z})>I(q_1, \mu)$

をもつ検定 $\phi_0(\boldsymbol{z})$ が，それ自身の水準 $E_{f_0}[\phi_0]$ をもつ検定のクラスの中で MP となる。この ϕ_0 は，(1.1.8)の φ_1 にほかならず，したがって水準は(1.1.27)の $\boldsymbol{b}$ の選び方から $E_{f_0}[\phi_0]=E_{f_0}[\varphi_1]=\alpha$ となる。それゆえ ϕ_0 が MP の性質を主張する検定のクラスは

(1.1.29)　$\mathscr{C}_\alpha(q_1, \mu)=\left\{\phi\,\middle|\,\displaystyle\int_{R^n}\phi(\boldsymbol{z})f_0(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z}\leq\alpha\right\}$

である。$f_0 \in \mathscr{F}_0(0)$ であるから，$\mathscr{C}_\alpha(q_1, \mu)$ は $\mathscr{C}_\alpha$ を含むが，上の議論では (q_1, μ) を任意に固定したものだから，もっと強く

(1.1.30)　$\mathscr{C}_\alpha(q_1, \mu) \supset \mathscr{C}_\alpha$ for all $q_1 \in \mathcal{Q}, \mu>0$

が成立する。ここで $\mathcal{Q}$ は(1.1.2)で与えられる。(1.1.30)と，φ_1 が固定した (q_1, μ) に依存しないことから，任意の $\phi \in \mathscr{C}_\alpha$ に対して(1.1.23)が成立する。すでに述べたように，以上の証明で重要な部分は，任意の対立仮説 $f_1 \in \mathscr{F}_1(\mu)$ に対して適当な $f_0 \in \mathscr{F}_0(0)$ を帰無仮説として選択している点にあり，これが可能であるのは $\mathscr{F}_0(0)$ には十分多くな密度関数が含まれているからである。これに対し，Lehmann and Stein (1948) の問題(1.1.19)の帰無仮説は $N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ であるから，対立仮説 $N(\mu \boldsymbol{I}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ に対して(1.1.25)に対応する帰無仮説

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|\|\boldsymbol{z}\|\boldsymbol{b}-\mu\mathbf{1}\|^2\right)\Big/\int\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|\|\boldsymbol{z}\|\boldsymbol{b}-\mu\mathbf{1}\|^2\right)d\boldsymbol{z}$$

を選択することができない。もっと一般的にいえば，任意に $f \in \mathscr{F}_1(\mu), f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2)$ をとって q を固定し，

検定問題 $H:\mu=0$ v. s. $K:\mu>0$ を考えるときには，(1. 1. 8)の φ_1 は UMP でない。もちろんこの問題に対して UMP 検定は一般に存在せず，対立仮説で $\mu=\mu_0>0$ を固定すると

$$q(\|\boldsymbol{z}-\mu_0\boldsymbol{a}_0\|^2)/q(\|\boldsymbol{z}\|^2)>k$$

が MP 検定の棄却域となる。しかし φ_1 は，固定した q に対して $\|\boldsymbol{z}\|^2$ を与えたときの水準 α をもつ条件付検定のクラスの中で UMP であり，また不変性を適用すると，φ_1 は UMPI(一様最強力不変)である。これらは，それぞれ§1. 2 および§1. 3 で議論される。

§1.2 一様最強力性の別証明

[1. 2. 1] 上記の定理1. 1. 1の証明は，通常のアプローチと異り，有限群の変換に対して不変な仮説を扱う Lehmann and Stein (1949) の補題を拡張し，無限群の変換に対して不変な仮説を扱う『4章』の補助定理4. 3. 1に基づいている。この節では，通常のアプローチによる直接的な証明を与える。その前に証明の準備をする。

(1. 1. 6)の片側検定問題において，(1. 1. 8)の検定 φ_1 が UMP であることを主張するのは，仮説 $H_0: f\in\mathscr{F}_0(0)$ のもとで水準 α をもつ(1. 1. 14)の検定のクラス $\mathscr{C}_\alpha$ に対してである。また検定関数を $w=\|\boldsymbol{z}\|^2$ および $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ の関数として表わすとき，補助定理1. 1. 1から

(1. 2. 1)　$$\phi\in\mathscr{C}_\alpha \Longleftrightarrow \phi^*(w)\equiv E_0^{\boldsymbol{u}}[\phi(w,\boldsymbol{u})]\le\alpha \quad \text{a. e. } (w, f\in\mathscr{F}_0(0))$$

である。3番目に，$f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ に対して

(1. 2. 2)　$$f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2) =q(w-2\mu\sqrt{w}\,t\|\boldsymbol{a}_0\|+\mu^2\|\boldsymbol{a}_0\|^2)$$

ただし $t=\boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{a}_0\|\|\boldsymbol{z}\|$，と書けるから，$(w,t)$ は密度関数のクラス $\{\mathscr{F}_0(0)\cup\mathscr{F}_1(\mu),\mu>0\}$ に対する十分統計量である。したがって一般性を失うことなく $\mathscr{C}_\alpha$ の中で十分統計量に基づく検定のクラス

(1. 2. 3)　$$\mathscr{C}_\alpha^*=\{\phi\in\mathscr{C}_\alpha|\phi \text{ は } (w,t) \text{ の関数}\}$$

に対して，(1. 1. 8)の φ_1 が UMP であることを証明すればよい。$t=\boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{a}_0\|\|\boldsymbol{z}\|$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ のみの関数であるから，(1. 2. 1)は

(1. 2. 4)　$$\phi\in\mathscr{C}_\alpha^* \Longleftrightarrow \phi^*(w)=E_0^t[\phi(w,t)]\le\alpha \quad \text{a. e. } (w, f\in\mathscr{F}_0(0))$$

となる。最後に $f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2)$ のもとでの (w,t) の同時分布は，『4章』補助定理4. 4. 3と全く同様にして

(1. 2. 5)　$$g(t,w:\mu)=c_0q(w-2\mu\sqrt{w}\,t\|\boldsymbol{a}_0\|+\mu^2\|\boldsymbol{a}_0\|^2)\times r_0(t)\,w^{n/2-1}$$

$c_0=\Gamma(1/2)^n/\Gamma(n/2)$，で与えられる。ただし r_0 は任意の $f\in\mathscr{F}_0(0)\ (\supset\mathscr{F}_1(0))$ に対して，f に依存しない t の密度関数

(1. 2. 6)　$$r_0(t)=c_1(1-t^2)^{(n-3)/2},\quad -1\le t\le 1$$

$c_1=2\Gamma((n-2)/2)/\Gamma(1/2)\Gamma((n-3)/2)$，である。

[1. 2. 2] 以上の準備によって定理1. 1. 1を証明する。いま $f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ を任意に固定する。それから十分統計量 (w,t) の密度関数(1. 2. 5)を求め，(1. 2. 5)において検定問題 $H:\mu=0$ v. s. $K:\mu>0$ を考察する。§1. 1でみたように，(1. 2. 5)に直接に Neyman-Pearson の補題を適用して得られる MP 検定 ψ

$$\psi=\begin{cases}1 & g(t,w:\mu)/g(t,w:0)>k \text{ のとき}\\ 0 & g(t,w:\mu)/g(t,w:0)\le k \text{ のとき}\end{cases}$$

は，q と μ に依存し，ψ は(1. 2. 3)の $\mathscr{C}_\alpha^*$ に属さない。そこで条件付議論を行う。まず w を固定したときの t の条件付密度は

(1. 2. 7)　$$k(t:\mu,w)=\frac{g(t,w:\mu)}{\int g(t,w:\mu)\,dt}=\frac{q(w-2\mu\sqrt{w}\,t\|\boldsymbol{a}_0\|+\mu^2\|\boldsymbol{a}_0\|^2)\,r_0(t)}{\int q(w-2\mu\sqrt{w}\,t\|\boldsymbol{a}_0\|+\mu^2\|\boldsymbol{a}_0\|^2)\,r_0(t)\,dt}$$

であるから，(1. 2. 7)に対して Neyman-Pearson の補題を適用すると，MP 検定は

(1. 2. 8)　$$\phi_0=\begin{cases}1 & k(t:\mu,w)/k(t:0,w)>c(w) \text{ のとき}\\ 0 & k(t:\mu,w)/k(t:0,w)\le c(w) \text{ のとき}\end{cases}$$

で与えられる。(1. 2. 7)を(1. 2. 8)に代入し，q が単調減少であることを用いて t について解くと，(1. 2. 8)は

(1. 2. 9)　$$\phi_0=\begin{cases}1 & t>c_1(w) \text{ のとき}\\ 0 & t\le c_1(w) \text{ のとき}\end{cases}$$

となる。なお q が単調非増加の場合も，『4章』定理4. 4. 1の証明と同じようにすれば(1. 2. 9)を得る。仮説 $\mu=0$ の t の分布は $f\in\mathscr{F}_1(0)$ に依存せず密度(1. 2. 6)をもつから，(1. 2. 9)の $c_1(w)$ は w から独立に選択できる。それゆえ ϕ_0 は条件付でない水準 α の検定であり，それは(1. 1. 8)の φ_1 にほかならない。$\mu=0$ のときの $f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ を f_0 で表わすと，ϕ_0 はクラス

(1. 2. 10)　$$\mathscr{E}_\alpha(f_0)=\{\phi|E_0^t[\phi(w,t)]\le\alpha \ \text{a. e. } (w,f_0)\}$$

の中で MP である。なお $E_0^t[\phi(w,t)]=\int\phi(w,t)f_0(t)\,dt$ であることに注意せよ。MP 検定 ϕ_0 は，固定した $f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ と μ に依存しないこと，(1. 2. 4)と(1. 2. 10)から各 $f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ に対して

$$\mathscr{E}_\alpha(f_0)\supset\mathscr{C}_\alpha^*$$

が成立すること，および $\phi_0\in\mathscr{C}_\alpha^*$ であることから，任意の $f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ と任意の $\phi\in\mathscr{C}_\alpha^*$ に対して

$$E_f[\phi_0|w]\ge E_f[\phi|w] \quad \text{a. e. } (w, f\in\mathscr{F}_1(\mu))$$

を得る。それゆえ任意の $f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ と任意の $\phi\in\mathscr{C}_\alpha{}^*$ に対して

$$E_f[\phi_0]\geq E_f[\phi]$$

が証明される。これは ϕ_0 が $\mathscr{C}_\alpha{}^*$，それゆえ $\mathscr{C}_\alpha$ の中でUMP(一様最強力)であることにほかならない。

[**1.2.3**]　上の証明では，任意に $f\in\mathscr{F}_1(\mu)$ をとり，$\mu=0$ を $\mu>0$ に対して検定しているため，実際に証明したことは，検定問題

(1.2.11)　$H_1: f\in\mathscr{F}_1(0)$ v.s. $K_1: f\in\mathscr{F}_1(\mu), \mu>0$

で φ_1 がUMPであるということである。他方(1.1.6)の検定問題の帰無仮説は $H_0: f\in\mathscr{F}_0(0)$ である。しかし $\mathscr{F}_0(0)\supset\mathscr{F}_1(0)$ であることから，$\mathscr{F}_0(0)$ のもとで水準 α をもつ検定のクラス $\mathscr{C}_\alpha$ は，$\mathscr{F}_1(0)$ のもとで水準 α をもつ検定のクラス $\tilde{\mathscr{C}}_\alpha$ に含まれる。したがって証明されたことは，

定理 1.2.1　(1.1.8)の検定 φ_1 は検定問題(1.2.11)でUMPである。

であって，この方が定理1.1.1より多少とも強い結果であるはずである。この点著者自身『回帰分析の理論』あるいはKariya and Eaton (1977) では気がついていなかった。実際には $\tilde{\mathscr{C}}_\alpha=\mathscr{C}_\alpha$ であるかもしれないが，ここではそれを不問のままにしておく。いずれにしても，以上のことは検定問題では帰無仮説のクラスは小さく，対立仮説のクラスは大きい方がより一般的である，という自明な命題を再確認させる。

また上の証明は次の結果を含んでいる。

定理 1.2.2　$f\in\mathscr{F}_1(\mu), f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2)$ を任意にとって固定する。このとき(1.1.8)の φ_1 は，検定問題 $H: \mu=0$ v.s. $K: \mu>0$ に対して条件付水準 α をもつ検定のクラス(1.2.10)の中でUMPである。

なお，条件付でない水準 α の検定のクラスに対してはUMP検定は存在しないことに注意せよ。

§1.3　一様最強力不変性

[**1.3.1**]　この節では不変性原理(invariance principle)を適用した場合の議論を行う。(1.1.6)の検定問題は，スケール変換群 R_+ の作用：$\gamma\in R_+$ に対して

$$(1.3.1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{z}\longrightarrow\gamma\boldsymbol{z}, & \mu\longrightarrow\gamma\mu \\ q\longrightarrow q\gamma^{-1} & \text{ただし } q\in Q \end{cases}$$

(Q は(1.1.2)を見よ)によって不変となる。この変換に対して不変な検定は

$$(1.3.2)\qquad \phi(\gamma\boldsymbol{z})=\phi(\boldsymbol{z})$$

を満たすから，水準 α をもつ不変検定全体は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ に基づく検定のクラス

(1.3.3)　$\mathscr{I}_\alpha=\{\phi\in\mathscr{C}_\alpha|\phi$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ のみの関数$\}$

となる。明らかに $\mathscr{I}_\alpha\subset\mathscr{C}_\alpha$ であるが，一般性を失うことなく $\mathscr{I}_\alpha$ の中で十分統計量 (w,t) に基づく不変検定のクラスに制限できるから

(1.3.4)　$\mathscr{I}_\alpha{}^*=\{\phi\in\mathscr{C}_\alpha{}^*|\phi$ は $t=\boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{a}_0\|\|\boldsymbol{z}\|$ のみの関数$\}$

の中で考えればよい。ただし $\mathscr{C}_\alpha{}^*$ は(1.2.3)で与えられる。このとき(1.1.8)の $\mathscr{C}_\alpha$ の中でのUMP検定 φ_1 は，t のみの関数であるから $\varphi_1\in\mathscr{I}_\alpha{}^*$ であり，それゆえ φ_1 は $\mathscr{I}_\alpha{}^*$，したがって $\mathscr{I}_\alpha(\subset\mathscr{C}_\alpha)$ の中のUMP検定である。すなわち，φ_1 は(1.3.1)の変換のもとでUMPI(一様最強力不変)である。この事実を直接に証明しようとすれば，(1.2.5)の (w,t) の密度関数から形式的に t の周辺密度を

$$(1.3.5)\qquad h(t:\mu)=\int_0^\infty g(t,w:\mu)\,dw$$

と求め，この h に対して検定問題 $H: \mu=0$ v.s. $K: \mu>0$ を考え，q が単調減少であることを用いればよい。ここで重要な点は，証明において依然として q の単調減少性を用いている点である。この問題では，不変検定のクラス $\mathscr{I}_\alpha$ に対して問題を制限しても，特に新しいメリットが得られないから，φ_1 が $\mathscr{C}_\alpha$ の中でUMPであるという結果を $\mathscr{I}_\alpha$ の中に制限しているにすぎない。この点が§2で扱う系列相関の検定問題と異る点である。

これと関連して§1.1の最後に述べた点にふれておく。任意に $f\in\mathscr{F}_1(\mu), f(\boldsymbol{z})=q(\|\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{a}_0\|^2)$ をとって q を固定するとき，(1.1.8)の φ_1 は，$H: \mu=0$ v.s. $K: \mu>0$ を検定する問題でUMPでなく，UMP検定は存在しなかった。しかし上で述べた φ_1 のUMPI性の証明からわかるように，φ_1 はこの問題でクラス $\mathscr{I}_\alpha$ の中でUMPである。すなわち $H: \mu=0$ のもとで水準 α をもつ不変検定のクラスは，固定した q，したがって $f\in\mathscr{F}_1(0)$ (あるいは $f\in\mathscr{F}_0(0)$)に依存しない。

[**1.3.2**]　最後に次の補助定理を証明する。

補助定理 1.3.1　　$\mathscr{I}_\alpha\subsetneqq\mathscr{C}_\alpha$

証明　$\mathscr{I}_\alpha\subset\mathscr{C}_\alpha$ であるから $\mathscr{I}_\alpha\neq\mathscr{C}_\alpha$ を示す。いま任意の $\psi_1(w)\neq\text{const.}, 0\leq\psi_1(w)\leq1$ と，$E_0{}^{\boldsymbol{u}}[\psi_2(\boldsymbol{u})]\leq\alpha$ を満たす任意の $\psi_2(\boldsymbol{u}), 0\leq\psi_2(\boldsymbol{u})\leq1$ に対して，$(w,\boldsymbol{u})$ に基づく検定を

$$(1.3.6)\qquad \psi(w,\boldsymbol{u})=\psi_1(w)\psi_2(\boldsymbol{u})$$

と定義する。このとき

$$E_0{}^{\boldsymbol{u}}[\psi(w,\boldsymbol{u})]=\psi_1(w)E_0{}^{\boldsymbol{u}}[\psi_2(\boldsymbol{u})]\leq\alpha$$

となるから，補助定理1.1.1により $\psi\in\mathscr{C}_\alpha$ であり，$\psi_1(w)\neq$ const. より $\psi\notin\mathscr{I}_\alpha$ である。したがって $\mathscr{I}_\alpha\neq\mathscr{C}_\alpha$ である。

この補助定理は，φ_1 が $\mathcal{C}_\alpha$ の中で UMP であるという定理1.1.1の結果の方が，上で示した φ_1 が $\mathcal{I}_\alpha$ の中で UMP であるという結果よりも一般的であることを，示している。しかし補助定理1.1.1から実際的な問題では，統計量 w はあまり重要な役割をしないように思われる。

§1.4 両側 t 検定の一様最強力不変性

[**1.4.1**] 両側検定問題(1.1.7)についても，(1.1.11)の検定 φ_2 がその一様最強力不偏(UMPU)性を主張するのは，(1.1.14)の水準 α をもつ検定のクラス

(1.4.1) $\mathcal{C}_\alpha=\{\phi|E_f[\phi]\leq\alpha \text{ for all } f\in\mathcal{F}_0(0)\}$

の中で不偏な検定のクラス

(1.4.2) $\mathcal{U}_\alpha=\{\phi\in\mathcal{C}_\alpha|E_f[\phi]\geq\alpha$
$\qquad\qquad \text{for all } f\in\mathcal{F}_2(\mu),\ \mu\fallingdotseq 0\}$

である。以下では一般性を失うことなく $\mathcal{C}_\alpha$ および $\mathcal{U}_\alpha$ を十分統計量(w,t)に基づく検定のクラスに制限したクラス，$\mathcal{C}_\alpha{}^*$ および $\mathcal{U}_\alpha{}^*$，で議論する。§1.1の定理1.1.2の証明は，相似性の条件

(1.4.3) $E_f{}^t[\phi(w,t)|w]=\alpha \quad \text{a. e. } (w, f\in\mathcal{F}_2(0))$

および

(1.4.4) $E_f{}^t[t\phi(w,t)|w]=0 \quad \text{a. e. } (w, f\in\mathcal{F}_2(0))$

を満たす検定のクラス $\mathcal{S}_\alpha{}^*$ を考え，このクラスの中で φ_2 が UMP であること，すなわち φ_2 が UMP similar であることを証明した。一方，『4章』の補助定理4.4.4によって

(1.4.5) $\mathcal{U}_\alpha{}^*\subset\mathcal{S}_\alpha{}^*$

が示されるから，$\phi_2\in\mathcal{U}_\alpha{}^*$ は $\mathcal{U}_\alpha{}^*$ の中で UMP すなわち UMPU である。ここで問題となるのは，

(1) $\mathcal{S}_\alpha{}^*$ の中に，統計量 w に nontrivial に依存する検定が含まれているか

(2) $\mathcal{U}_\alpha{}^*$ の中に，統計量 w に nontrivial に依存する検定が含まれているか

という2点である。(2)は未解決である。(1)が YES であることを証明する。$f\in\mathcal{F}_2(0)$ のもとで t と w は独立であり，その密度関数は(1.2.5)(1.2.6)よりそれぞれ $r_0(t)$ および $r_f(w)\equiv c_0q(w)w^{\frac{n}{2}-1}$ で与えられる。このとき(1.4.3)および(1.4.4)はそれぞれ

(1.4.6) $\int\phi(w,t)r_0(t)dt=\alpha \quad \text{a. e. } (w, f\in\mathcal{F}_2(0))$

(1.4.7) $\int t\phi(w,t)r_0(t)dt=0 \quad \text{a. e. } (w, f\in\mathcal{F}_2(0))$

となる。そこで(1.4.7)を満たす2つの1次独立な検定関数で，t のみに依存するもの $\phi_1(t),\phi_2(t)$ をとり，

(1.4.8) $\beta_i\equiv E_0{}^t[\phi_i(t)]=\int\phi_i(t)r_0(t)dt$

とおく。ただし $\beta_1>\alpha>\beta_2>0$ とする。このようにとった $\phi_1(t),\phi_2(t)$ に対して，適当に w のみに依存する検定関数 $\psi_1(w),\psi_2(w)$ で

(1.4.9) $\beta_1\psi_1(w)+\beta_2\psi_2(w)\equiv\alpha$

となるものをとる。実際には(1.4.9)より $\psi_1(w)$ は

(1.4.10) $(\alpha-\beta_2)/\beta_1\leq\psi_1(w)\leq\alpha/\beta_1$

を満たす任意のものをとることができるから，この選択は可能である。このように選択した $\phi_i(t)$ と $\psi_i(w)$ に基づいて，(w,t)に基づく検定

(1.4.11) $\varphi(w,t)=\psi_1(w)\phi_1(t)+\psi_2(w)\phi_2(t)$

を作ると，(1.4.8)と(1.4.9)により φ は(1.4.6)を満たす。また $\phi_1(t),\phi_2(t)$ のとり方から φ は(1.4.7)を満たす。しかも $\psi_1(w)\fallingdotseq\text{const.}$ に対して，φ は t だけでなく w にも nontrivial に依存する検定である。すなわち，$\mathcal{S}_\alpha{}^*$ は(1.3.1)のスケール変換(ただし両側検定の場合，$\gamma\in R, \gamma\fallingdotseq 0$)のもとで不変な検定以外に，不変でない検定も含んでいる。

他方，φ_2 は(1.1.7)で $\mathcal{F}_2(0)$ と $\mathcal{F}_2(\mu)$ をそれぞれ $\mathcal{F}_1(0)$ と $\mathcal{F}_1(\mu)$ でおきかえた両側検定問題に対して UMPI であることが証明される。したがって不変性を課して $\mathcal{F}_1(\mu)$ に対して UMPI を主張する結果と，相似性を課して $\mathcal{F}_2(\mu)$ に対して UMPS を主張する結果とは補完的である。

§2 系列相関の検定のロバストネス

§2.1 一様最強力性の意味

[**2.1.1**] §2は，『回帰分析の理論』の5章(以下これを『5章』と略す)に対する補論である。最初に『5章』の問題を復習する。$n\times n$ の正値定符号行列全体を $\mathcal{S}(n)$ で表わし，R^n 上の Lebesgue 測度に関する密度関数全体を $\mathcal{F}_n$ とする。$\boldsymbol{\Sigma}\in\mathcal{S}(n)$ に対して

(2.1.1) $$Q=\left\{q|q:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty),\ \int_{R^n}q(\|\boldsymbol{z}\|^2)d\boldsymbol{z}=1\right\}$$

(2.1.2) $$\mathcal{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})=\{f\in\mathcal{F}_n|f(\boldsymbol{z})=|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}q(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}),\ q\in Q\}$$

(2.1.3) $$\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})=\{f\in\mathcal{F}_n|f(\boldsymbol{z})=|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}q(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}),\ q\in Q, q:\text{単調非増加関数}\}$$

(2.1.4) $$\mathcal{F}_2(\boldsymbol{\Sigma})=\{f\in\mathcal{F}_n|f(\boldsymbol{z})=|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}q(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}),\ q\in Q, q:\text{単調非増加凸関数}\}$$

とおく。明らかに $\mathcal{F}_2(\boldsymbol{\Sigma})\subset\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})\subset\mathcal{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})$ である。

いま $\boldsymbol{z}$ を密度関数 h をもつ $n\times 1$ の観察可能な確率ベ

クトルとし，$\boldsymbol{\Sigma}\in\mathcal{S}(n)$ を既知とする。このとき『5章』では，検定問題

(2. 1. 5) $H:h\in\mathcal{F}_0(\boldsymbol{I})$ v. s. $K:h\in\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})$

を考察し，これを

(2. 1. 6) $\boldsymbol{\Sigma}=\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda),\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)^{-1}=\boldsymbol{I}_n+\lambda\boldsymbol{A}$

の場合に適用している。ただし，$\boldsymbol{A}$ は既知で

(2. 1. 7) $\gamma>0,\lambda\in\Lambda=\{\lambda\in R|\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)^{-1}\in\mathcal{S}(n)\}$

である。そして(2. 1. 5)の検定問題に対して次の定理を証明している。

定理 2. 1. 1(『5章』定理 5. 2. 1) 検定問題(2. 1. 5)に対して，検定

(2. 1. 8) $\varphi_0(\boldsymbol{z})=\begin{cases}1 & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}<k\\0 & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\geq k\end{cases}$

は一様最強力(UMP)検定である。与えられた有意水準 α に対して k は，Dirichlet 分布 $D_n\left(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right)$ から決定される。

[**2.1.2**] ここで§1の t 検定の場合と同様に，次の疑問が起る。いま，検定問題

(2. 1. 9) $H(1):N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$ v. s. $K(1):N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Sigma})$

を考えると，Neyman-Pearson の補題によって，検定

(2. 1. 10) $\varphi_1=\begin{cases}1 & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}<k'\\0 & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\geq k'\end{cases}$

が最強力(MP)となり，これは $k'=0$ の場合を除くと(2. 1. 8)の検定 φ_0 と明らかに異る。他方，$N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})\in\mathcal{F}_0(\boldsymbol{I})$ および $N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Sigma})\in\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})$ であるから，(2. 1. 8)の φ_0 が UMP であるというのはおかしいではないか，という疑問である。この疑問に対する答は§1. 1の場合と全く同様で，差異が生ずるのは，考えている検定のクラスが異っているからである。実際，(2. 1. 5)の検定問題では，φ_0 が UMP であるのは仮説 H のもとで水準 α をもつ検定のクラス

(2. 1. 11) $\mathcal{C}_\alpha=\{\phi\in\mathcal{T}|E_f[\phi]\leq\alpha \text{ for all } f\in\mathcal{F}_0(\boldsymbol{I})\}$

であるのに対して，(2. 1. 10)の φ_1 が MP を主張するのは，検定のクラス

(2. 1. 12) $\mathcal{C}_\alpha(1)=\{\phi\in\mathcal{T}|E[\phi|N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})]\leq\alpha\}$

に対してである。(2. 1. 11)の $\mathcal{C}_\alpha$ および(2. 1. 12)の $\mathcal{C}_\alpha(1)$ は，それぞれ(1. 1. 14)の $\mathcal{C}_\alpha$ および(1. 1. 15)の $\mathcal{C}_\alpha(1)$ と全く同じであるから，$\mathcal{C}_\alpha(1)\supset\mathcal{C}_\alpha,\varphi_1\notin\mathcal{C}_\alpha$ が成立し，φ_1 が $\mathcal{C}_\alpha(1)$ で MP であることと，φ_0 が $\mathcal{C}_\alpha$ で UMP であることは矛盾しない。また§1の場合と同様に

(2. 1. 13) $w=\|\boldsymbol{z}\|^2,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$

とおくと，$\boldsymbol{z}$ と $(w,\boldsymbol{u})$ は1対1に対応し，一般性を失うことなく検定関数 ϕ は $(w,\boldsymbol{u})$ の関数として表わすことができる。このとき明らかに補助定理 1. 1. 1 と同じ結果を得る。

補助定理 2. 1. 1 検定 $\phi(w,\boldsymbol{u})$ が(2. 1. 11)の $\mathcal{C}_\alpha$ に属するための必要十分条件は，

(2. 1. 14) $\phi^*(w)=E_0^{\boldsymbol{u}}[\phi(w,\boldsymbol{u})]\leq\alpha$ a. e. $(w,f\in\mathcal{F}_0(\boldsymbol{I}))$

である。ただし $E_0^{\boldsymbol{u}}$ は f に依存しない $\boldsymbol{u}$ に関する期待値である。

§2. 2 一様最強力性の別証明

[**2.2.1**] 定理 2. 1. 1 の証明は，定理 1. 1. 1 の証明と同じように『4章』補助定理 4. 3. 1 に基づいている。ここでは，直接的な証明を与えるが，議論は§1. 2と平行的であるので簡単に述べる。

密度関数のクラス $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{I})\cup\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})$ に対して，統計量

(2. 2. 1) $w=\|\boldsymbol{z}\|^2,t=\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}$

は十分となるから，以下一般性を失うことなく，(w,t) に基づく水準 α の検定のクラス $\mathcal{C}_\alpha^*$ で φ_0 が UMP であることを示せばよい。(w,t) の同時密度は，『5章』定理 5. 3. 1 の証明と同様にすれば

(2. 2. 2) $g(t,w:\boldsymbol{\Sigma})=c_0|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}q(wt)r_0(t)w^{\frac{n}{2}-1}$

となる。ここで $\boldsymbol{\Sigma}$ の固有値を $d_1\leq\cdots\leq d_n(d_1\neq d_n)$ とすると，$r_0(t)$ は $h\in\mathcal{F}_0(\boldsymbol{I})$ に依存しない $[d_1,d_n]$ 上の密度関数である。さて(2. 1. 5)の問題を考察する。任意に $h\in\mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma}),h(\boldsymbol{z})=|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}q(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z})$ をとる。そして(5. 2. 2)から，w を与えたときの t の条件付密度

(2. 2. 3) $k(t:w,\boldsymbol{\Sigma})=g(t,w:\boldsymbol{\Sigma})\Big/\int g(t,w:\boldsymbol{\Sigma})dt$

を作り，k において条件付検定問題 $H:\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$ v. s. $K:\boldsymbol{\Sigma}\neq\boldsymbol{I}$ を考えると，Neyman-Pearson の補題と q の単調減少性から，MP 検定の棄却域

(2. 2. 4) $t>c(w)$

を得る。仮説 $H:\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$ のもとでは，w と t は独立であるから $c(w)$ は w から独立に決定でき，(5. 2. 4)の検定は k から独立で，(2. 1. 8)の φ_0 と一致する。(5. 2. 4)が MP を主張するクラスは $\mathcal{C}_\alpha^*$ を含み，$\varphi_0\in\mathcal{C}_\alpha^*$ であるから，φ_0 は $\mathcal{C}_\alpha^*$ したがって $\mathcal{C}_\alpha$ の中で UMP である。

§2. 3 一様最強力不変性

[**2.3.1**] 以上の議論は，§1. 1および§1. 2の議論と全く平行的であった。しかし不変性を適用する場合，t 検定の問題と系列相関の検定問題の間に差異が生じてくる。実際，不変性を用いても(1. 1. 6)の検定問題では，t 検定が UMPI であることを証明するためには q の単調非増加性が必要であった。しかし系列相関の検定問題では，不変性を用いると q の単調非増加性は必要でなく，

(2.1.5)の検定問題よりもさらに一般的に検定問題

(2.3.1)　$H_0: h \in \mathscr{F}_0(\boldsymbol{I})$ v.s. $K_0: h \in \mathscr{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})$

に対して(2.1.8)の φ_0 が UMPI であることが証明できる。以下これを示す。

問題を不変にする変換は，(1.3.1)で与えられるスケール変換である。この変換のもとでは $\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ が最大不変量となる。$\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ の分布を求めるために，『5章』の補助定理5.5.1と同じように Wijsman (1967) の結果を用いる。いま $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})$ を(1.3.1)の $\boldsymbol{z}$ の変換のもとでの任意の最大不変量とする。このとき $P_0{}^{\boldsymbol{S}}$ および $P_1{}^{\boldsymbol{S}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})$ の $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$ および $\boldsymbol{\Sigma}\neq\boldsymbol{I}$ のもとでの確率分布とすれば，$P_1{}^{\boldsymbol{S}}$ の $P_0{}^{\boldsymbol{S}}$ に関する密度関数 $f_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})|\boldsymbol{\Sigma})$ は

$$(2.3.2)\quad \frac{dP_1{}^{\boldsymbol{S}}}{dP_0{}^{\boldsymbol{S}}}\equiv f_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})|\boldsymbol{\Sigma})=\frac{\int_0^\infty a^{n-1}f(a\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\Sigma})\,da}{\int_0^\infty a^{n-1}f(a\boldsymbol{z}|\boldsymbol{I})\,da}$$

で与えられる。ここで $f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\Sigma})$ は $\mathscr{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})$ に属する密度である。当然 $f_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})|\boldsymbol{I})\equiv 1$ である。『5章』[5.5.2]と同様に議論すれば，(2.3.2)は

$$(2.3.3)\quad f_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})|\boldsymbol{\Sigma})=|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

となり，$f\in\mathscr{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})$ に依存しない密度関数を得る。これから明らかに，棄却域

$$(2.3.4)\quad \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}<k$$

をもつ検定が UMPI となる。これは(2.1.8)の φ_0 にほかならず，したがって φ_0 は不変検定のクラス

(2.3.5)　$\mathscr{I}_\alpha=\{\phi\in\mathscr{C}_\alpha|\phi$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ のみの関数$\}$

の中で UMP となる。以上によって次の定理を得る。

定理 2.3.1　(2.1.8)の φ_0 は検定問題(2.3.1)に対して変換(1.3.1)のもとで UMPI である。

[**2.3.2**]　定理2.1.1と定理2.3.1を比較すると，検定している問題は，$\mathscr{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})\supset\mathscr{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})$ であるから定理2.3.1の方がより一般的である。他方，UMP を主張する検定のクラスは，補助定理1.3.1より $\mathscr{C}_\alpha\supsetneqq\mathscr{I}_\alpha$ であるから定理2.1.1の方の内容が強い。したがって2つの定理の内容には trade-off がある。補助定理2.1.1から統計量 w は上の2つの検定問題に対してそれほど重要な役割を果さないかもしれない。したがって不変性を課して $\mathscr{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})$ よりもっと広い $\mathscr{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})$ に対して UMP であることを述べた方が，より実際的であるといえるかもしれない。しかし他方，単調非増加でない q をもつ分布を含めることが，どれだけ実際的意味をもつものかわからないともいえよう。この意味で，2つの結果は比較しにくい。

§2.4　両側検定の一様最強力不偏性

[**2.4.1**]　$\boldsymbol{\Sigma}$ が(2.16)の構造をしているとき，片側検定問題 $H_0: f\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I})$ v.s. $K_1: f\in\mathscr{F}_1(\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)),\lambda>0$ に対しては，棄却域 $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}<k$ が UMP であり，両側検定問題

(2.4.1)　$H_0: f\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I})$
　　v.s. $K_2: f\in\mathscr{F}_2(\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)),\lambda\neq 0$

に対して棄却域

(2.4.2)　$\boldsymbol{z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}<c_1$ または $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}>c_2$

をもつ検定 φ_2 が UMPU であった。この両側検定問題に対しても，§1.4の議論があてはまる。まず水準 α をもつ検定のクラスを $\mathscr{C}_\alpha$，$\mathscr{C}_\alpha$ の中で相似検定のクラスを $\mathscr{S}_\alpha$ とし，さらに十分統計量

$$w=\|\boldsymbol{z}\|^2,\quad t=\boldsymbol{z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}$$

に基づく $\mathscr{C}_\alpha,\mathscr{S}_\alpha$ の検定をそれぞれ $\mathscr{C}_\alpha{}^*,\mathscr{S}_\alpha{}^*$ とする。次に，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|$ のみに基づく検定，すなわち変換(1.3.1)のもとで不変な検定のクラスを $\mathscr{I}_\alpha$ とし，$\mathscr{I}_\alpha$ の中で十分統計量 t に基づく検定のクラスを $\mathscr{I}_\alpha{}^*$ とする。

補助定理 2.4.1　$\mathscr{I}_\alpha{}^*\subsetneqq\mathscr{S}_\alpha{}^*$ それゆえ $\mathscr{I}_\alpha\subsetneqq\mathscr{S}_\alpha$.

[**2.4.2**]　しかし§2.3の場合と同様に，最初から不変性を用いて議論すると，q が単調非増加凸であることを必要としない。以下これを簡単にみるため検定問題

(2.4.3)　$H_0: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I}),\gamma>0$
　　v.s. $K_0: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)),\gamma>0,\lambda\neq 0$

を考える。この問題は(1.3.1)のスケール変換のもとで不変であり，その最大不変量を $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})$ とする。このとき仮説 H_0 のもとで $\boldsymbol{S}$ の分布 $P_0{}^{\boldsymbol{S}}$ は，$h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I})$ に依存しない。また $P_0{}^{\boldsymbol{S}}$ に関する $\boldsymbol{S}$ の密度は(2.3.3)で $\boldsymbol{\Sigma}=\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)$ とおいたものとして

$$(2.4.4)\quad h_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})|\lambda)=|\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)|^{-\frac{1}{2}}(1+\lambda t)^{-\frac{n}{2}}$$

で与えられる。このとき(1.4.3)，(1.4.4)に対応する相似性の条件は，『5章』補助定理5.3.3と同様に，$\phi\in\mathscr{I}_\alpha{}^*$ に対して

$$(2.4.5)\quad \int\phi(t)P_0{}^{\boldsymbol{S}}(dt)=\alpha$$

$$(2.4.6)\quad \int t\phi(t)P_0{}^{\boldsymbol{S}}(dt)=\alpha\ \mathrm{tr}\ \boldsymbol{A}/n$$

となる。したがって拡張された Neyman–Pearson の補題と，(2.4.4)の $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})$ の密度が t に関して凸であることから，UMPI similar 検定

$$(2.4.7)\quad \psi_2(t)=\begin{cases}1 & t<c_1 \text{ または } t>c_2 \text{ のとき}\\ 0 & c_1\leq t\leq c_2 \text{ のとき}\end{cases}$$

を得る。それゆえ ψ_2 は UMPIU である。この ψ_2 は，(2.4.2)の棄却域をもつ φ_2 と同じであるが，考えている検定問題が異っている。すなわち

定理 2.4.1 (2.4.7)の検定 ψ_2 は，検定問題(2.4.3)に対して $\mathscr{I}_\alpha$ の中で UMPU である。

φ_2 は $\mathscr{C}_\alpha$ の中で UMPU であるのは，(2.4.1)の検定問題であって，その対立仮説は(2.4.3)のそれより狭い。他方，補助定理 2.4.1 より(2.4.1)の検定問題の方が広い。この関係は§2.3でみたものと同じであるから，ここではこれ以上ふれない。

§2.5 Durbin-Watson 検定について

[**2.5.1**] 『5章』例 5.4.2 に述べたように，Durbin-Watson 検定は，回帰モデル

(2.5.1) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}\quad \boldsymbol{X}: n\times k, \operatorname{rank}(\boldsymbol{X})=k$

の誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)'$ が1回の自己回帰過程

(2.5.2) $\varepsilon_j=\rho\varepsilon_{j-1}+\zeta_j,\ |\rho|<1$

に従っているとき，仮説 $H:\rho=0$ を検定する。いま $\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)'\sim N(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{I}_n)$ を仮定すると，誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}$ の分散行列は，$\sigma^2\boldsymbol{\varPsi}(\rho)$ となる。ただし $\boldsymbol{\varPsi}(\rho)$ は

$$(2.5.3)\quad \boldsymbol{\varPsi}(\varphi)=\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \cdots & \rho \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

であり，その逆行列は

(2.5.4) $\boldsymbol{\varPsi}(\rho)^{-1}=(1+\rho^2)\boldsymbol{I}+\rho\boldsymbol{A}+\rho\boldsymbol{B}-\rho^2\boldsymbol{B}$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{A}$ は

$$(2.5.5)\qquad \boldsymbol{A}=-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{B}$ は第(1,1)要素および第(n,n)要素が1で，その他の要素はすべて0である行列である。通常，(2.5.4)で $\rho\boldsymbol{B}-\rho^2\boldsymbol{B}$ を無視し，近似モデル

(2.5.6) $\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(\boldsymbol{0},\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)),\ \boldsymbol{\Sigma}(\lambda)^{-1}=\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{A}$

(2.5.7) $\gamma=\sigma^2/(1+\rho^2),\ \lambda=\rho/(1+\rho^2)$

で仮説 $H:\lambda=0$ を検定する。この近似モデルに対して，Durbin and Watson (1971) (*Biometrika*) は，Durbin-Watson 検定

(2.5.8) $T\equiv\boldsymbol{y}'\boldsymbol{NANy}/\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ny}<c$

が片側対立仮説 $K:\lambda>0$ に対する局所最良不変検定であることを示した。ただし $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ である。これに対して『5章』§5.5では，誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}$ の密度関数を h とすると，片側検定問題

(2.5.9) $H: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I}),\ \gamma>0$

$\qquad$ v.s. $K: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)),\ \gamma>0,\ \lambda>0$

に対しては(2.5.8)の Durbin-Watson 検定が局所最良不変であり，両側検定問題

(2.5.10) $H: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I}),\ \gamma>0$

$\qquad$ v.s. $K: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)),\ \gamma>0,\ \lambda\neq0$

に対しては，棄却域

$$(2.5.11)\quad T^2+\frac{4}{n-k+2}\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{AMAe}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}>c_1T+c_2$$

をもつ検定が局所最良不変不偏であることを示した。ここで $\mathscr{F}_0(\boldsymbol{\Sigma})$ は(2.1.2)で与えられ，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Ny}$, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ である。しかし以上の結果は，近似モデル(2.5.6)を必ずしも正規分布でない場合に拡張した結果であって，正確なモデル

(2.5.12) $\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(\boldsymbol{0},\gamma\boldsymbol{\Phi}(\rho))$ ただし $\gamma=\sigma^2/(1+\rho^2)$

(2.5.13) $\boldsymbol{\Phi}(\rho)^{-1}=\boldsymbol{\varPsi}(\rho)^{-1}/(1+\rho^2)$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{\rho}{1+\rho^2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\boldsymbol{B}$$

の場合，多少とも結果は異る。以下この正確なモデルに基づいた場合において，$\boldsymbol{\varepsilon}$ の密度関数 h が，クラス $\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{\Phi}(\rho))$ に属する場合の検定問題を考察する。

[**2.5.2**] 片側検定問題

(2.5.14) $H_0: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I}),\ \gamma>0$

$\qquad$ v.s. $K_1: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{\Phi}(\rho)),\ \gamma>0,\ \rho>0$

および両側検定問題

(2.5.15) $H_0: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{I}),\ \gamma>0$

$\qquad$ v.s. $K_2: h\in\mathscr{F}_0(\gamma\boldsymbol{\Phi}(\rho)),\ \gamma>0,\ \rho\neq0$

を考察しよう。『5章』§5.5と同様に議論すれば，変換 $\boldsymbol{y}\longrightarrow a\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Xg}\ (a\in R_+,\ \boldsymbol{g}\in R^k)$ のもとでの最大不変量 $t(\boldsymbol{w})$ の $P_0{}^t$ に関する密度関数は

(2.5.16) $f_t(t(\boldsymbol{w})|\rho)$

$$=|\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\Phi}(\rho)\boldsymbol{Z}|^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\Phi}(\rho)\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}}\right]^{-\frac{n-k}{2}}$$

となる。ここで $P_0{}^t$ は $\rho=0$ のもとでの $t(\boldsymbol{w})$ の分布であり，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{ZZ}'=\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{I}_{n-k}$ を満たす $n\times(n-k)$ の行列である。したがって，片側検定(2.5.14)に対する局所最良不変検定 ϕ_1 の棄却域は

$$(2.5.17)\quad \left.\frac{\partial f_t(t(\boldsymbol{w})|\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}>c_1f_t(t(\boldsymbol{w})|0)$$

で与えられ，両側検定問題(2.5.15)に対する局所最良不変不偏検定 ϕ_2 の棄却域は

$$(2.5.18)\quad \left.\frac{\partial^2 f_t(t(\boldsymbol{w})|\rho)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=0}>c_2\left.\frac{\partial f_t(t(\boldsymbol{w})|\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}+c_3f_t(t|\boldsymbol{w})|0)$$

で与えられる。これを評価すると次の結果を得る。

定理 2.5.1 片側検定問題(2.5.15)の局所最良不変検定

ϕ_1 の棄却域は

(2.5.19)　$S \equiv \boldsymbol{y}'\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{N}\boldsymbol{y}/\boldsymbol{y}'\boldsymbol{N}\boldsymbol{y}<c$

であり，両側検定問題(2.5.16)の局所最良不変検定 ϕ_2 の棄却域は

(2.5.20)

$$S^2+\frac{4}{n-k+2}\left[\frac{\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}+\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}\right]>c_4S+c_5$$

である。ただし c_4 と c_5 は

(2.5.21)　$E_0(\phi_2)=\alpha,$

$E_0[S\phi_2]=\alpha\ \mathrm{tr}\ N(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/(n-k)$

を満たすように選択する。

明らかに(2.5.19)の棄却域は，(2.5.8)の Durbin-Watson 検定の棄却域と異る。実際に検定すべき問題は正確なモデル(2.5.12)(2.5.13)に対してであるから，検定問題 $H:\rho=0$ v.s. $K:\rho>0$ に対して Durbin-Watson 検定が局所最良不変検定であるというのは厳密には正しくない。Durbin-Watson 検定が局所最良不変性を主張できるのは，近似モデルに対してである。また両側検定問題でも(2.5.11)でなく，(2.5.20)が局所最良不変不偏となる。近似モデル(2.5.6)においては，$\boldsymbol{X}$ の列ベクトル空間 $L(\boldsymbol{X})$ が $\boldsymbol{A}$ の適当な k 個の固有ベクトルで張られるときには，(2.5.11)の棄却域は(2.5.8)の T に基づく両側検定 $T>c$ または $T<c'$ に帰されたのに対して，正確なモデル(2.5.12)(2.5.13)では，たとえ $L(\boldsymbol{X})$ が $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ の適当な k 個の固有ベクトルで張られても，(2.5.20)の $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}/\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$ の項は消えず，S に基づく両側検定とならない。また(2.5.8)と(2.5.19)から

$$S=T+\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}=T+\frac{e_1{}^2+e_n{}^2}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}$$

となるから，片側検定の場合，n が大きいときには S は T で近似できるであろうが，n が小さいときには $e_1{}^2+e_n{}^2/\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$ の影響は必ずしも無視できないであろう。

§3　2回帰式の間の独立性の検定と数表

§3.1　片側検定統計量の分布

[3.1.1]　[3.1.1]の議論は，鍋谷清治教授のコメントに基づいている。『8章』では，2つの回帰式

(3.1.1)　$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i$　$(\boldsymbol{X}_i: n\times k_i, \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_i)=k_i)$

(3.1.2)　$E(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{0}, E(\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{\varepsilon}_i{}')=\sigma_{ii}\boldsymbol{I}_n, E(\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2{}')=\sigma_{12}\boldsymbol{I}_n$

$(i=1,2)$ が与えられているとき，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1{}',\boldsymbol{\varepsilon}_2{}')'$ に正規性を仮定して，2つの回帰式の独立性の仮説

(3.1.3)　$H:\sigma_{12}=0$ あるいは $H:\rho\equiv\sigma_{12}/\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}=0$

を検定する問題を考察した。そして H を片側対立仮説 $K_1:\rho>0$ に対して検定する問題では，各方程式の最小2乗残差

(3.1.4)　$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{b}_i$, ただし $\boldsymbol{b}_i=(\boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{X}_i)^{-1}\boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{y}_i$

$(i=1,2)$ の相関係数

(3.1.5)　$W_1=\boldsymbol{e}_1{}'\boldsymbol{e}_2/[\boldsymbol{e}_1{}'\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2{}'\boldsymbol{e}_2]^{\frac{1}{2}}$

に基づく検定が，局所最良不変であることを示した。W_1 の H のもとでの分布は，$W_1=0$ に関して対称となることから，$W_1{}^2$ の分布を考察し，その近似式

(3.1.5)

$$P(W_1{}^2\le x|H)\doteqdot I\left(a,b:\frac{x}{d_1}\right)+\int_{x/d_1}^1 I\left(\frac{1}{2},\frac{q_1-1}{2}:\frac{x}{td_1}\right)b(t:a,b)\,dt$$

を導出した。ここで $\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{X}_i)^{-1}\boldsymbol{X}_i{}'$ とおくと d_1 は $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$ の最大固有値であり，$q_i=n-k_i$,

(3.1.6)　$a=\dfrac{\alpha}{d_1}\left\{\dfrac{\alpha}{\beta}[d_1-\alpha]-1\right\}$

(3.1.7)　$b=\left\{1-\dfrac{\alpha}{d_1}\right\}\left\{\dfrac{\alpha}{\beta}[d_1-\alpha]-1\right\}$

(3.1.8)　$\alpha=\mathrm{tr}\ \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2/q_2$

(3.1.9)　$\beta=2[q_2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2)^2-(\mathrm{tr}\ \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2)]/q_2{}^2(q_2+2)$

である。ただし $I(a,b:z)=\int_0^z b(t:a,b)dt$ であり，$b(t:a,b)$ は自由度 (a,b) をもつベータ分布の密度関数である。(3.1.5)の第2項を級数展開した式を『8章』(8.3.15)に与えてあるが，この式が有効であるためには，a が半整数でないという条件，すなわち

(3.1.10)　$a\notin\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},\cdots\cdots\right\}$

が必要である。また，『8章』(8.3.15)式の2重級数に対して，その絶対収束性を直接にチェックすることは容易でない。そのため，『8章』(8.3.15)式の左辺を展開するときに，

$$\int_{x/d_1}^1 t^{a-j-\frac{3}{2}}(1-t)^{b-1}dt=\int_0^{1-x/d_1} t^{b-1}(1-t)^{a-j-\frac{3}{2}}dt$$

と書き直しておいた方がよい。(3.1.11)の条件をはずした一般的な場合について，このような展開を行うと

(3.1.11)

$$\left[B\left(\frac{1}{2},\frac{q_1-1}{2}\right)B(a,b)\right]^{-1}\times\sum_{j=0}^\infty\sum_{i=0}^\infty\binom{(q_1-3)/2}{j}\binom{a-j-\frac{3}{2}}{i}\times(-1)^{i+j}\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)(b+i)\right]^{-1}\times\left(\frac{x}{d_1}\right)^{j+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{d_1}\right)^i$$

となる。したがって(3.1.5)から，一般の場合の評価式

(3. 1. 12) $P(W_1^2 \leq x|H) \fallingdotseq I(a, b : x/d_1) + (3.1.11)$

を得る。

[**3.1.2**] Zellner 推定量の応用例としては『8章』で述べた Theil(1971) の例のほかに Kuroda and Yotopoulos(1978) (『経済研究』第 29 巻第 2 号)がある。Theil の例については，上記の検定を適用すると有意水準約 0.05(本文に 0.1 とあるのは 0.05 の誤り)%で仮説 H が棄却されることをみた。後者についても，上記の検定を適用して Zellner 推定法の有効性をチェックしておくことが望ましい。

§3.2 数表

[**3.2.1**] 『回帰分析の理論』の巻末に，統計量 W_1^2 の分布の数表を $q_1 = n - k_1$ が，5, 11, 17 および 25 について一部与えておいたが，ここではもっと広範囲なものを与える。数表は，(3. 1. 11) で $T = W_1^2/d_1$, $t = x/d_1$, $c = q_1$ とおいたときの $P(T \leq t|H)$ の近似値 $F(t : a, b, c)$ を与える。したがって数表を用いるためには，(1) $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$ の最大固有値 d_1，(2) $\mathrm{tr}\, \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2)^2$ の値を求め，a, b を (3. 1. 6)～(3. 1. 9) から計算，(3) (3. 1. 5) の W_1 の値，(4) $c = q_1 = n - k_1$ の値，が必要である。表は，a, b, c が自然数で c が奇数の場合のみを扱っている。なお片側検定であるから

$$P(W_1 \leq x|H) = \frac{1}{2} P(T \leq t|H)$$

より，数表から得られる有意水準(実際にはデータから計算される t に対して $P(T \leq t|H)$ の値)に 0.5 をかけたものが求めるものとなる。数表は論文の終りにある。

[**3.2.2**] 数表から，固定した t に対して $F(t : a, b, c)$ は

(1) c, b を固定すると，a に関して単調減少，

(2) a, c を固定すると，b に関して単調増加，

(3) a, b を固定すると，c に関して単調増加，

であることがわかる。

§4 訂 正

本節では，ミスプリでなく内容に関する明らかな誤りを訂正したい。このような誤りはいうまでもなく筆者の責任であり読者ならびに岩波書店に対して深くお詫びしたい。ただ弁解する余地があるとすれば以下に述べる誤りは本質的なものでなく，若干の記号の書き直しあるいは証明の追加等によってそのまま成立するという点である。なお，(2)～(4) は鍋谷教授のコメントに基づくものである。あらためて感謝する。

(1) 11 頁下 1 行目。$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{Ny}/\|\boldsymbol{Ny}\|)/\|\boldsymbol{Ny}\|$ を $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{Ny}/\|\boldsymbol{Ny}\|)\|\boldsymbol{Ny}\|$ とする。これに対応して，12 頁上 2 行目で $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{Ny}\|}\boldsymbol{\phi}\left(\dfrac{\boldsymbol{Ny}}{\|\boldsymbol{Ny}\|}\right)$ を $\|\boldsymbol{Ny}\|\boldsymbol{\phi}\left(\dfrac{\boldsymbol{Ny}}{\|\boldsymbol{Ny}\|}\right)$ に，(1. 2. 14) 式で $\dfrac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{N\varepsilon}/\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|)'}{\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|}$ を $\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{N\varepsilon}/\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|)$ に，$\dfrac{\boldsymbol{\zeta}_1}{\|\boldsymbol{\zeta}_2\|}\boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{\Gamma}_1'\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\zeta}_2\end{pmatrix}\Big/\|\boldsymbol{\zeta}_2\|\right)'$ を $\boldsymbol{\zeta}_1\|\boldsymbol{\zeta}_2\|\boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{\Gamma}_1'\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\zeta}_2\end{pmatrix}\Big/\|\boldsymbol{\zeta}_2\|\right)'$ に，さらに 12 頁下 1 行目で $\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|^{-1}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{N\varepsilon}/\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|)$ を $\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{N\varepsilon}/\|\boldsymbol{N\varepsilon}\|)$ とする。また (1. 2. 12) の $E[\|\boldsymbol{\zeta}_2\|^{-2}] < \infty$ を削除し，12 頁下 8 行目の $E[\|\boldsymbol{\zeta}_2\|^{-2}]$ を $E[\|\boldsymbol{\zeta}_2\|^2]$ とする。この訂正によって定理 1. 2. 1 はそのまま成立する。

(2) 72 頁 4 行目で，「$= E\|\boldsymbol{Ku} - \boldsymbol{\eta}\|^2$ より明らかである。」の部分を削除し，「と，$\boldsymbol{Kgu}$ の $N(\boldsymbol{g\eta}, \boldsymbol{I})$ のもとでの許容性と $\boldsymbol{Ku}$ の $N(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{I})$ のもとでの許容性の同等性から明らか。」を入れる。

(3) 190 頁で，Lebesgue の有界収束定理を用いて微分と積分の順序の入れ替えを証明しているが，$\pi'(\phi, \rho) = \int \phi f_T' dP_0^T$ を示すには f_T'' の有界性を示す必要があり，$\pi''(\phi, \rho) = \int \phi f_T'' dP_0^T$ を示すには f_T''' の有界性を示す必要がある。したがって下 13, 14 行目の「それゆえ…成立する。」の一文を削除し，下 6 行目の $\pi''(\phi, \rho) = \int \phi f_T'' dP_0^T$ を $\pi'(\phi, \rho) = \int \phi f_T' dP_0^T$ でおきかえ，下 5 行目の「これで…終る。」という文の前に，「同様にして $|\rho| < 1/3$ のとき f_T''' の有界性が示されるから，$\pi''(\phi, \rho) = \int \phi f_T'' dP_0^T$ がでる。」を入れる。

(4) 204 頁上 13 行目で，$\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2]$; $\boldsymbol{Z}_1 : k \times (p-r)$, $\boldsymbol{Z}_2 : k \times r$ を，$\boldsymbol{Z}' = [\boldsymbol{Z}_1', \boldsymbol{Z}_2']$; $\boldsymbol{Z}_1' : p \times (k-r)$, $\boldsymbol{Z}_2' : p \times r$ にする。また 14 行目で，$\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2]$; $\boldsymbol{\Theta}_1 : k \times (p-r)$, $\boldsymbol{\Theta}_2 : k \times r$ を，$\boldsymbol{\Theta}' = [\boldsymbol{\Theta}_1', \boldsymbol{\Theta}_2']$; $\boldsymbol{\Theta}_1' : p \times (k-r)$, $\boldsymbol{\Theta}_2' : p \times r$ にする。

刈 屋 武 昭

(一橋大学経済研究所)

c = 5

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.680306	0.579210	0.537787	0.516815	0.504459	0.496382	0.490706	0.486504	0.483270	0.480705	0.469411	0.465738	0.463919	0.462833	0.462111
	.2	0.831084	0.755542	0.717142	0.695235	0.681484	0.672178	0.665504	0.660500	0.656615	0.653513	0.639674	0.635115	0.632848	0.631492	0.630589
	.3	0.907484	0.856812	0.826984	0.808194	0.795618	0.786751	0.780222	0.775239	0.771322	0.768168	0.753830	0.749026	0.746624	0.745183	0.744223
	.4	0.950349	0.918947	0.898238	0.884018	0.873879	0.866397	0.860705	0.856258	0.852702	0.849802	0.836261	0.831614	0.829273	0.827863	0.826921
	.5	0.974874	0.957107	0.944239	0.934697	0.927461	0.921855	0.917425	0.913860	0.910943	0.908521	0.896747	0.892557	0.890422	0.889130	0.888264
	.6	0.988548	0.979677	0.972716	0.967182	0.962727	0.959097	0.956104	0.953608	0.951506	0.949716	0.940467	0.936979	0.935170	0.934065	0.933321
	.7	0.995642	0.991996	0.988926	0.986325	0.984107	0.982204	0.980561	0.979136	0.977891	0.976797	0.970597	0.968018	0.966636	0.965779	0.965197
	.8	0.998823	0.997771	0.996827	0.995979	0.995215	0.994524	0.993899	0.993331	0.992815	0.992344	0.989286	0.987781	0.986914	0.986357	0.985971
	.9	0.999865	0.999737	0.999615	0.999499	0.999390	0.999285	0.999186	0.999091	0.999001	0.998915	0.998244	0.997806	0.997505	0.997290	0.997130
2	.1	0.781402	0.662056	0.600704	0.566239	0.544845	0.530438	0.520117	0.512375	0.506356	0.501545	0.479962	0.472799	0.469225	0.467083	0.465655
	.2	0.906625	0.832342	0.782862	0.750240	0.728014	0.712218	0.700532	0.691583	0.684529	0.678831	0.652735	0.643905	0.639470	0.636804	0.635024
	.3	0.958157	0.916467	0.883354	0.858499	0.839951	0.825924	0.815102	0.806572	0.799711	0.794089	0.767550	0.758326	0.753654	0.750833	0.748946
	.4	0.981751	0.960364	0.940897	0.924576	0.911289	0.900548	0.891834	0.884703	0.878802	0.873865	0.849474	0.840660	0.836142	0.833399	0.831557
	.5	0.992641	0.982843	0.972863	0.963642	0.955492	0.948437	0.942381	0.937194	0.932741	0.928903	0.908579	0.900778	0.896708	0.894215	0.892532
	.6	0.997419	0.993600	0.989317	0.985002	0.980879	0.977056	0.973573	0.970429	0.967607	0.965079	0.950208	0.943911	0.940527	0.938426	0.936996
	.7	0.999288	0.998136	0.996730	0.995197	0.993621	0.992058	0.990543	0.989096	0.987728	0.986445	0.977652	0.973267	0.970772	0.969183	0.968084
	.8	0.999876	0.999658	0.999372	0.999036	0.998667	0.998276	0.997872	0.997463	0.997054	0.996649	0.993230	0.991007	0.989572	0.988598	0.987901
	.9	0.999993	0.999980	0.999962	0.999939	0.999912	0.999881	0.999848	0.999812	0.999773	0.999733	0.999290	0.998860	0.998494	0.998196	0.997954
3	.1	0.841075	0.723408	0.652400	0.609027	0.580866	0.561397	0.547216	0.536450	0.528007	0.521211	0.490205	0.479722	0.474452	0.471282	0.469164
	.2	0.943767	0.881821	0.831796	0.794692	0.767504	0.747275	0.731856	0.719803	0.710161	0.702291	0.665316	0.652478	0.645969	0.642036	0.639403
	.3	0.979002	0.949580	0.920636	0.895595	0.875018	0.858391	0.844957	0.834018	0.825007	0.817494	0.780626	0.767336	0.760520	0.756378	0.753595
	.4	0.992444	0.979832	0.965379	0.951149	0.938141	0.926690	0.916794	0.908303	0.901022	0.894759	0.861878	0.849343	0.842808	0.838804	0.836101
	.5	0.997540	0.992823	0.986693	0.979942	0.973132	0.966603	0.960537	0.955004	0.950012	0.945534	0.919436	0.908563	0.902748	0.899142	0.896691
	.6	0.999328	0.997883	0.995791	0.993247	0.990435	0.987507	0.984576	0.981717	0.978982	0.976397	0.958805	0.950332	0.945596	0.942602	0.940542
	.7	0.999864	0.999542	0.999030	0.998348	0.997529	0.996604	0.995607	0.994565	0.993502	0.992435	0.983418	0.977928	0.974577	0.972373	0.970823
	.8	0.999985	0.999945	0.999875	0.999775	0.999645	0.999487	0.999304	0.999098	0.998874	0.998633	0.995935	0.993589	0.991856	0.990598	0.989664
	.9	1.000000	0.999998	0.999996	0.999993	0.999988	0.999982	0.999974	0.999964	0.999953	0.999941	0.999740	0.999455	0.999150	0.998859	0.998599
4	.1	0.880298	0.770746	0.695773	0.646576	0.613313	0.589760	0.572336	0.558966	0.548395	0.539833	0.500159	0.486510	0.479603	0.475431	0.472638
	.2	0.964416	0.915171	0.868900	0.830943	0.801219	0.778113	0.759978	0.745513	0.733775	0.724087	0.677445	0.660843	0.652350	0.647192	0.643728
	.3	0.988810	0.968876	0.945677	0.923033	0.902729	0.885257	0.870483	0.858045	0.847547	0.838632	0.793093	0.776068	0.767228	0.761820	0.758173
	.4	0.996648	0.989467	0.979609	0.968494	0.957225	0.946482	0.936607	0.927719	0.919810	0.912807	0.873517	0.857678	0.849274	0.844081	0.840556
	.5	0.999112	0.996909	0.993444	0.989024	0.984012	0.978737	0.973448	0.968315	0.963445	0.958890	0.929367	0.915928	0.908548	0.903916	0.900743
	.6	0.999810	0.999277	0.998335	0.996996	0.995315	0.993371	0.991245	0.989012	0.986736	0.984465	0.966319	0.956260	0.950386	0.946597	0.943962
	.7	0.999972	0.999884	0.999711	0.999441	0.999069	0.998598	0.998038	0.997402	0.996702	0.995952	0.988008	0.982023	0.978059	0.975355	0.973419
	.8	0.999998	0.999991	0.999975	0.999949	0.999909	0.999854	0.999784	0.999697	0.999594	0.999475	0.997681	0.995584	0.993781	0.992363	0.991263
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999994	0.999991	0.999988	0.999913	0.999760	0.999551	0.999317	0.999083
5	.1	0.907686	0.808232	0.732671	0.679838	0.642754	0.615896	0.595735	0.580107	0.567660	0.557518	0.509842	0.493171	0.484679	0.479532	0.476078
	.2	0.976727	0.938306	0.897368	0.860668	0.830101	0.805316	0.785290	0.768992	0.755570	0.744375	0.689145	0.669008	0.658615	0.652273	0.648001
	.3	0.993793	0.980476	0.962660	0.943336	0.924569	0.907419	0.892249	0.879040	0.867607	0.857709	0.804983	0.784531	0.773780	0.767162	0.762680
	.4	0.998444	0.994396	0.987945	0.979763	0.970653	0.961294	0.952161	0.943539	0.935567	0.928292	0.884429	0.865677	0.855548	0.849232	0.844923
	.5	0.999663	0.998641	0.996760	0.994035	0.990606	0.986671	0.982429	0.978057	0.973691	0.969433	0.938418	0.922886	0.914116	0.908538	0.904689
	.6	0.999943	0.999747	0.999340	0.998677	0.997746	0.996560	0.995152	0.993565	0.991844	0.990032	0.972812	0.961710	0.954901	0.950415	0.947259
	.7	0.999994	0.999970	0.999914	0.999813	0.999657	0.999438	0.999153	0.998802	0.998388	0.997915	0.991557	0.985574	0.981225	0.978134	0.975871
	.8	1.000000	0.999998	0.999995	0.999988	0.999977	0.999960	0.999936	0.999903	0.999861	0.999809	0.998741	0.997065	0.995366	0.993899	0.992700
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999973	0.999902	0.999778	0.999614	0.999427

c = 7

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.764120	0.677712	0.638571	0.617533	0.604710	0.596158	0.590073	0.585530	0.582013	0.579211	0.566752	0.562661	0.560629	0.559413	0.558605
	.2	0.896186	0.843988	0.814873	0.797089	0.785377	0.777182	0.771167	0.766580	0.762975	0.760069	0.746824	0.742368	0.740136	0.738795	0.737902
	.3	0.952428	0.923780	0.905498	0.893196	0.884521	0.878154	0.873318	0.869538	0.866511	0.864037	0.852389	0.848346	0.846299	0.845063	0.844237
	.4	0.978866	0.964438	0.954253	0.946833	0.941269	0.936986	0.933612	0.930899	0.928678	0.926831	0.917761	0.914479	0.912794	0.911769	0.911080
	.5	0.991340	0.984835	0.979854	0.975970	0.972888	0.970403	0.968369	0.966682	0.965264	0.964059	0.957807	0.955413	0.954158	0.953388	0.952867
	.6	0.996919	0.994419	0.992371	0.990675	0.989256	0.988060	0.987041	0.986166	0.985410	0.984750	0.981067	0.979538	0.978713	0.978198	0.977847
	.7	0.999139	0.998395	0.997748	0.997182	0.996686	0.996248	0.995860	0.995515	0.995206	0.994929	0.993225	0.992431	0.991980	0.991692	0.991492
	.8	0.999848	0.999709	0.999582	0.999465	0.999358	0.999259	0.999168	0.999084	0.999006	0.998934	0.998429	0.998150	0.997978	0.997862	0.997778
	.9	0.999991	0.999983	0.999975	0.999968	0.999960	0.999954	0.999947	0.999940	0.999934	0.999928	0.999879	0.999845	0.999820	0.999801	0.999786
2	.1	0.850529	0.755995	0.701683	0.668827	0.647470	0.632670	0.621870	0.613667	0.607232	0.602054	0.578480	0.570544	0.566564	0.564173	0.562577
	.2	0.948384	0.902217	0.868224	0.843939	0.826351	0.813274	0.803274	0.795426	0.789125	0.783963	0.759539	0.751005	0.746673	0.744053	0.742298
	.3	0.981075	0.960345	0.942404	0.927892	0.916358	0.907171	0.899780	0.893755	0.888777	0.884609	0.863854	0.856243	0.852315	0.849921	0.848309
	.4	0.993293	0.984809	0.976514	0.969091	0.962683	0.957229	0.952602	0.948667	0.945303	0.942409	0.926989	0.920954	0.917771	0.915809	0.914479
	.5	0.997845	0.994796	0.991507	0.988298	0.985314	0.982607	0.980182	0.978023	0.976105	0.974399	0.964460	0.960205	0.957889	0.956438	0.955445
	.6	0.999418	0.998517	0.997460	0.996347	0.995240	0.994172	0.993163	0.992219	0.991344	0.990536	0.985237	0.982664	0.981193	0.980249	0.979593
	.7	0.999884	0.999689	0.999444	0.999168	0.998875	0.998576	0.998277	0.997984	0.997699	0.997425	0.995329	0.994112	0.993357	0.992853	0.992492
	.8	0.999987	0.999963	0.999932	0.999894	0.999852	0.999806	0.999758	0.999708	0.999657	0.999606	0.999132	0.998777	0.998524	0.998339	0.998200
	.9	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999995	0.999994	0.999992	0.999990	0.999988	0.999986	0.999959	0.999931	0.999906	0.999883	0.999864
3	.1	0.897796	0.810308	0.750965	0.711542	0.684473	0.665065	0.650584	0.639406	0.630533	0.623328	0.589798	0.578241	0.572394	0.568864	0.566502
	.2	0.971467	0.936209	0.904652	0.879115	0.859044	0.843273	0.830742	0.820633	0.812347	0.805455	0.771619	0.759355	0.753046	0.749205	0.746621
	.3	0.991441	0.978285	0.964172	0.950961	0.939324	0.929344	0.920866	0.913668	0.907533	0.902271	0.874524	0.863777	0.858125	0.854645	0.852289
	.4	0.997535	0.993103	0.987649	0.981906	0.976318	0.971111	0.966374	0.962122	0.958327	0.954949	0.935336	0.927023	0.922516	0.919698	0.917772
	.5	0.999369	0.998085	0.996320	0.994266	0.992082	0.989881	0.987738	0.985696	0.983779	0.981996	0.970232	0.964582	0.961379	0.959331	0.957914
	.6	0.999869	0.999574	0.999128	0.998562	0.997909	0.997202	0.996465	0.995719	0.994980	0.994256	0.988626	0.985404	0.983445	0.982150	0.981234
	.7	0.999981	0.999934	0.999858	0.999753	0.999623	0.999472	0.999304	0.999123	0.998933	0.998738	0.996856	0.995483	0.994546	0.993887	0.993402
	.8	0.999999	0.999995	0.999988	0.999979	0.999966	0.999951	0.999932	0.999911	0.999887	0.999862	0.999542	0.999217	0.998946	0.998730	0.998559
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999987	0.999972	0.999954	0.999935	0.999917
4	.1	0.926959	0.849869	0.790388	0.747635	0.716818	0.694029	0.676666	0.663065	0.652149	0.643208	0.600729	0.585760	0.578122	0.573490	0.570381
	.2	0.983220	0.957248	0.930188	0.905877	0.885327	0.868335	0.854331	0.842727	0.833026	0.824829	0.783103	0.767430	0.759262	0.754255	0.750873
	.3	0.995826	0.987695	0.977383	0.966477	0.955958	0.946300	0.937660	0.930028	0.923319	0.917423	0.884455	0.870966	0.863736	0.859240	0.856178
	.4	0.999012	0.996739	0.993392	0.989357	0.984996	0.980583	0.976297	0.972240	0.968464	0.964983	0.942876	0.932707	0.927037	0.923441	0.920963
	.5	0.999796	0.999262	0.998375	0.997179	0.995750	0.994167	0.992501	0.990808	0.989131	0.987497	0.975216	0.968570	0.964640	0.962075	0.960276
	.6	0.999967	0.999871	0.999694	0.999432	0.999089	0.998675	0.998205	0.997692	0.997149	0.996588	0.991346	0.987792	0.985487	0.983910	0.982774
	.7	0.999997	0.999985	0.999963	0.999927	0.999875	0.999808	0.999726	0.999630	0.999521	0.999401	0.997935	0.996587	0.995564	0.994804	0.994229
	.8	1.000000	0.999999	0.999998	0.999996	0.999992	0.999988	0.999982	0.999974	0.999965	0.999954	0.999768	0.999515	0.999264	0.999045	0.998861
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999996	0.999989	0.999978	0.999966	0.999952
5	.1	0.946231	0.879610	0.822453	0.778451	0.745304	0.720075	0.700470	0.684895	0.672266	0.661836	0.611298	0.593108	0.583751	0.578051	0.574214
	.2	0.989713	0.970778	0.948421	0.926427	0.906568	0.889341	0.874637	0.862131	0.851466	0.842319	0.794029	0.775241	0.765325	0.759206	0.755055
	.3	0.997859	0.992851	0.985562	0.976996	0.968031	0.959260	0.951016	0.943446	0.936584	0.930405	0.893696	0.877826	0.869155	0.863710	0.859978
	.4	0.999580	0.998412	0.996419	0.993718	0.990513	0.987013	0.983395	0.979793	0.976296	0.972959	0.949672	0.938027	0.931343	0.927044	0.924054
	.5	0.999930	0.999706	0.999271	0.998608	0.997728	0.996666	0.995464	0.994164	0.992807	0.991424	0.979495	0.972196	0.967684	0.964674	0.962536
	.6	0.999991	0.999960	0.999891	0.999775	0.999605	0.999381	0.999103	0.998778	0.998412	0.998013	0.993501	0.989863	0.987329	0.985536	0.984217
	.7	0.999999	0.999997	0.999990	0.999978	0.999959	0.999931	0.999894	0.999847	0.999790	0.999724	0.998677	0.997461	0.996428	0.995613	0.994975
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999995	0.999993	0.999989	0.999985	0.999888	0.999709	0.999499	0.999295	0.999111
	.9	1,000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999996	0.999991	0.999983	0.999973

c = 9

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.819119	0.745828	0.710244	0.690267	0.677761	0.669279	0.663178	0.658588	0.655015	0.652156	0.639325	0.635073	0.632953	0.631684	0.630839
	.2	0.932666	0.895992	0.874204	0.860250	0.850735	0.843908	0.838802	0.834854	0.831718	0.829170	0.817322	0.813255	0.811203	0.809966	0.809140
	.3	0.973887	0.957115	0.945813	0.937859	0.932045	0.927652	0.924239	0.921521	0.919313	0.917486	0.908619	0.905439	0.903811	0.902822	0.902157
	.4	0.990306	0.983337	0.978187	0.974283	0.971254	0.968854	0.966917	0.965326	0.964001	0.962882	0.957159	0.954991	0.953858	0.953162	0.952692
	.5	0.996757	0.994220	0.992204	0.990578	0.989248	0.988146	0.987223	0.986441	0.985771	0.985193	0.982036	0.980752	0.980063	0.979633	0.979340
	.6	0.999093	0.998334	0.997693	0.997148	0.996681	0.996278	0.995927	0.995620	0.995349	0.995109	0.993693	0.993061	0.992708	0.992484	0.992328
	.7	0.999813	0.999647	0.999500	0.999369	0.999252	0.999146	0.999051	0.998965	0.998887	0.998816	0.998353	0.998119	0.997981	0.997889	0.997825
	.8	0.999978	0.999958	0.999939	0.999922	0.999906	0.999891	0.999876	0.999863	0.999851	0.999839	0.999754	0.999704	0.999670	0.999647	0.999630
	.9	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999997	0.999996	0.999996	0.999995	0.999995	0.999991	0.999988	0.999986	0.999984	0.999983
2	.1	0.892409	0.816996	0.770175	0.740293	0.720167	0.705890	0.695306	0.687174	0.680744	0.675537	0.651494	0.643286	0.639150	0.636659	0.634994
	.2	0.969341	0.939567	0.916067	0.898310	0.884873	0.874541	0.866435	0.859945	0.854654	0.850266	0.828878	0.821177	0.817226	0.814823	0.813209
	.3	0.990660	0.979721	0.969674	0.961115	0.954007	0.948134	0.943263	0.939190	0.935755	0.932828	0.917572	0.911701	0.908617	0.906720	0.905435
	.4	0.997275	0.993637	0.989899	0.986399	0.983254	0.980479	0.978051	0.975928	0.974069	0.972437	0.963193	0.959323	0.957226	0.955914	0.955018
	.5	0.999294	0.998253	0.997082	0.995897	0.994755	0.993686	0.992699	0.991797	0.990976	0.990230	0.985551	0.983367	0.982132	0.981342	0.980795
	.6	0.999852	0.999615	0.999328	0.999017	0.998698	0.998383	0.998077	0.997784	0.997506	0.997244	0.995385	0.994385	0.993783	0.993385	0.993104
	.7	0.999978	0.999941	0.999893	0.999838	0.999779	0.999717	0.999653	0.999590	0.999527	0.999465	0.998958	0.998629	0.998412	0.998261	0.998150
	.8	0.999998	0.999996	0.999992	0.999987	0.999981	0.999975	0.999969	0.999962	0.999955	0.999948	0.999879	0.999821	0.999778	0.999744	0.999717
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999997	0.999995	0.999994	0.999992	0.999990
3	.1	0.930116	0.863817	0.814999	0.780544	0.755862	0.737641	0.723765	0.712896	0.704175	0.697034	0.663167	0.651274	0.645219	0.641551	0.639092
	.2	0.984227	0.963066	0.942702	0.925182	0.910703	0.898861	0.889148	0.881113	0.874395	0.868617	0.839711	0.828769	0.823060	0.819559	0.817193
	.3	0.996129	0.989768	0.982511	0.975331	0.968691	0.962749	0.957515	0.952933	0.948925	0.945410	0.925716	0.917586	0.913207	0.910477	0.908615
	.4	0.999094	0.997375	0.995149	0.992690	0.990190	0.987766	0.985481	0.983361	0.981415	0.979638	0.968463	0.963289	0.960381	0.958528	0.957246
	.5	0.999815	0.999423	0.998861	0.998180	0.997429	0.996645	0.995857	0.995082	0.994334	0.993620	0.988450	0.985675	0.984019	0.982931	0.982164
	.6	0.999970	0.999902	0.999795	0.999654	0.999487	0.999301	0.999102	0.998895	0.998685	0.998474	0.996663	0.995488	0.994722	0.994196	0.993814
	.7	0.999997	0.999989	0.999976	0.999958	0.999934	0.999907	0.999875	0.999841	0.999804	0.999765	0.999355	0.999016	0.998764	0.998576	0.998433
	.8	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999996	0.999995	0.999992	0.999990	0.999987	0.999984	0.999943	0.999896	0.999853	0.999817	0.999787
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995
4	.1	0.952215	0.896363	0.849453	0.813453	0.786230	0.765395	0.749125	0.736151	0.725598	0.716865	0.674373	0.659047	0.651164	0.646363	0.643133
	.2	0.991281	0.976642	0.960222	0.944488	0.930440	0.918287	0.907896	0.899027	0.891432	0.884887	0.849871	0.836047	0.828713	0.824176	0.821094
	.3	0.998249	0.994606	0.989691	0.984186	0.978593	0.973216	0.968206	0.963622	0.959468	0.955721	0.933121	0.923117	0.917591	0.914100	0.911699
	.4	0.999667	0.998859	0.997607	0.996023	0.994230	0.992338	0.990426	0.988551	0.986748	0.985037	0.973056	0.966918	0.963336	0.961009	0.959380
	.5	0.999946	0.999798	0.999541	0.999182	0.998735	0.998222	0.997664	0.997077	0.996477	0.995876	0.990825	0.987704	0.985736	0.984406	0.983451
	.6	0.999993	0.999973	0.999935	0.999876	0.999798	0.999700	0.999585	0.999457	0.999317	0.999169	0.997618	0.996401	0.995541	0.994924	0.994463
	.7	0.999999	0.999998	0.999994	0.999989	0.999980	0.999970	0.999956	0.999939	0.999920	0.999899	0.999610	0.999304	0.999047	0.998843	0.998681
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999974	0.999941	0.999905	0.999872	0.999841
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997
5	.1	0.966178	0.919819	0.876453	0.840676	0.812273	0.789799	0.771832	0.757256	0.745247	0.735208	0.685142	0.666613	0.656990	0.651098	0.647120
	.2	0.994941	0.984852	0.972024	0.958535	0.945631	0.933874	0.923418	0.914220	0.906154	0.899076	0.859405	0.843025	0.834191	0.828679	0.824914
	.3	0.999160	0.997064	0.993819	0.989778	0.985315	0.980731	0.976229	0.971930	0.967899	0.964160	0.939853	0.928315	0.921777	0.917593	0.914691
	.4	0.999869	0.999485	0.998796	0.997815	0.996596	0.995205	0.993707	0.992157	0.990599	0.989063	0.977048	0.970233	0.966100	0.963363	0.961424
	.5	0.999983	0.999926	0.999811	0.999628	0.999376	0.999061	0.998690	0.998276	0.997830	0.997360	0.992759	0.989483	0.987296	0.985773	0.984661
	.6	0.999998	0.999992	0.999979	0.999955	0.999920	0.999871	0.999810	0.999736	0.999650	0.999554	0.998321	0.997151	0.996251	0.995574	0.995056
	.7	1.000000	1.000000	0.999999	0.999997	0.999994	0.999990	0.999985	0.999977	0.999968	0.999958	0.999770	0.999515	0.999274	0.999067	0.998895
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999988	0.999968	0.999940	0.999911	0.999884
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999

c=11

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.857908	0.795805	0.764018	0.745547	0.733725	0.725590	0.719680	0.715203	0.711700	0.708885	0.696140	0.691878	0.689746	0.688468	0.687615
	.2	0.954836	0.928727	0.912468	0.901672	0.894107	0.888567	0.884359	0.881067	0.878427	0.876266	0.866032	0.862452	0.860633	0.859533	0.858797
	.3	0.985073	0.975017	0.967963	0.962829	0.958973	0.955994	0.953636	0.951730	0.950163	0.948853	0.942321	0.939908	0.938658	0.937894	0.937379
	.4	0.995343	0.991865	0.989208	0.987133	0.985482	0.984145	0.983046	0.982128	0.981353	0.980691	0.977182	0.975798	0.975063	0.974607	0.974298
	.5	0.998722	0.997692	0.996851	0.996155	0.995574	0.995083	0.994664	0.994303	0.993990	0.993716	0.992158	0.991491	0.991125	0.990894	0.990735
	.6	0.999718	0.999476	0.999268	0.999087	0.998929	0.998791	0.998668	0.998560	0.998463	0.998376	0.997839	0.997584	0.997438	0.997343	0.997277
	.7	0.999957	0.999918	0.999883	0.999851	0.999822	0.999796	0.999772	0.999750	0.999730	0.999712	0.999586	0.999519	0.999477	0.999449	0.999429
	.8	0.999997	0.999994	0.999991	0.999988	0.999985	0.999983	0.999981	0.999979	0.999976	0.999975	0.999960	0.999951	0.999945	0.999940	0.999937
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
2	.1	0.920010	0.859379	0.819431	0.792837	0.774398	0.761053	0.751019	0.743232	0.737027	0.731973	0.708317	0.700129	0.695984	0.693481	0.691806
	.2	0.980944	0.961245	0.944857	0.931930	0.921808	0.913813	0.907405	0.902189	0.897879	0.894266	0.876165	0.869461	0.865985	0.863860	0.862428
	.3	0.995129	0.989127	0.983362	0.978255	0.973869	0.970141	0.966973	0.964271	0.961952	0.959947	0.949071	0.944698	0.942362	0.940911	0.939924
	.4	0.998821	0.997180	0.995431	0.993737	0.992167	0.990744	0.989468	0.988329	0.987313	0.986405	0.980998	0.978596	0.977262	0.976416	0.975833
	.5	0.999752	0.999374	0.998937	0.998481	0.998030	0.997597	0.997189	0.996809	0.996456	0.996129	0.993960	0.992871	0.992234	0.991818	0.991527
	.6	0.999959	0.999893	0.999810	0.999718	0.999622	0.999525	0.999429	0.999336	0.999246	0.999159	0.998508	0.998128	0.997889	0.997726	0.997609
	.7	0.999996	0.999988	0.999978	0.999966	0.999953	0.999940	0.999926	0.999911	0.999897	0.999883	0.999757	0.999670	0.999608	0.999565	0.999531
	.8	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997	0.999997	0.999996	0.999995	0.999994	0.999993	0.999982	0.999973	0.999965	0.999959	0.999954
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999
3	.1	0.950326	0.899327	0.859322	0.829715	0.807762	0.791151	0.778273	0.768053	0.759770	0.752936	0.719927	0.708124	0.702076	0.698401	0.695932
	.2	0.990794	0.977634	0.964247	0.952173	0.941798	0.933036	0.925662	0.919432	0.914134	0.909594	0.885539	0.876120	0.871136	0.868057	0.865968
	.3	0.998129	0.994893	0.991022	0.987027	0.983191	0.979644	0.976430	0.973547	0.970970	0.968670	0.955076	0.949134	0.945860	0.943794	0.942374
	.4	0.999641	0.998930	0.997973	0.996876	0.995724	0.994572	0.993455	0.992393	0.991395	0.990466	0.984220	0.981101	0.979287	0.978111	0.977288
	.5	0.999941	0.999812	0.999621	0.999382	0.999111	0.998821	0.998522	0.998221	0.997924	0.997635	0.995376	0.994049	0.993219	0.992660	0.992259
	.6	0.999993	0.999975	0.999947	0.999910	0.999865	0.999813	0.999756	0.999696	0.999634	0.999571	0.998982	0.998560	0.998268	0.998061	0.997906
	.7	0.999999	0.999998	0.999996	0.999992	0.999988	0.999982	0.999976	0.999969	0.999961	0.999953	0.999861	0.999777	0.999710	0.999658	0.999616
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999992	0.999985	0.999979	0.999972	0.999967
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
4	.1	0.967326	0.925996	0.888930	0.858985	0.835446	0.816907	0.802120	0.790139	0.780274	0.772032	0.731007	0.715873	0.708027	0.703229	0.699993
	.2	0.995180	0.986559	0.976321	0.966008	0.956400	0.947785	0.940197	0.933559	0.927758	0.922674	0.894215	0.882447	0.876094	0.872129	0.869420
	.3	0.999208	0.997473	0.995017	0.992142	0.989102	0.986073	0.983159	0.980417	0.977871	0.975525	0.960416	0.953242	0.949165	0.946550	0.944734
	.4	0.999878	0.999568	0.999069	0.998413	0.997644	0.996806	0.995933	0.995052	0.994184	0.993340	0.986936	0.983340	0.981152	0.979698	0.978665
	.5	0.999984	0.999939	0.999859	0.999743	0.999595	0.999420	0.999224	0.999013	0.998792	0.998566	0.996484	0.995051	0.994094	0.993426	0.992937
	.6	0.999998	0.999994	0.999985	0.999971	0.999951	0.999926	0.999896	0.999862	0.999824	0.999783	0.999314	0.998901	0.998587	0.998352	0.998171
	.7	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999995	0.999992	0.999989	0.999986	0.999982	0.999922	0.999851	0.999787	0.999733	0.999689
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999997	0.999992	0.999987	0.999982	0.999977
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
5	.1	0.977658	0.944529	0.911389	0.882524	0.858619	0.839088	0.823090	0.809867	0.798817	0.789475	0.741591	0.723387	0.713841	0.707969	0.703992
	.2	0.997336	0.991678	0.984055	0.975616	0.967169	0.959167	0.951813	0.945163	0.939193	0.933852	0.902248	0.888460	0.880868	0.876079	0.872785
	.3	0.999642	0.998701	0.997173	0.995182	0.992889	0.990443	0.987957	0.985509	0.983150	0.980908	0.965162	0.957045	0.952285	0.949182	0.947006
	.4	0.999955	0.999818	0.999561	0.999181	0.998692	0.998115	0.997473	0.996789	0.996082	0.995367	0.989218	0.985339	0.982867	0.981183	0.979969
	.5	0.999995	0.999979	0.999946	0.999891	0.999814	0.999714	0.999593	0.999455	0.999301	0.999136	0.997343	0.995899	0.994869	0.994122	0.993563
	.6	1.000000	0.999998	0.999995	0.999990	0.999982	0.999971	0.999956	0.999938	0.999916	0.999892	0.999543	0.999167	0.998853	0.998604	0.998407
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999993	0.999957	0.999902	0.999846	0.999794	0.999749
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999996	0.999992	0.999988	0.999984
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

c = 13

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.886485	0.833802	0.805668	0.788846	0.777874	0.770226	0.764620	0.760345	0.756984	0.754273	0.741892	0.737713	0.735617	0.734358	0.733518
	.2	0.968991	0.950208	0.938067	0.929768	0.923822	0.919392	0.915982	0.913287	0.911107	0.909310	0.900658	0.897575	0.895998	0.895042	0.894399
	.3	0.991224	0.985089	0.980647	0.977329	0.974780	0.972776	0.971165	0.969848	0.968752	0.967829	0.963109	0.961317	0.960379	0.959802	0.959412
	.4	0.997690	0.995914	0.994521	0.993408	0.992505	0.991761	0.991139	0.990614	0.990165	0.989778	0.987662	0.986796	0.986329	0.986037	0.985838
	.5	0.999478	0.999048	0.998689	0.998387	0.998130	0.997910	0.997719	0.997552	0.997406	0.997277	0.996517	0.996178	0.995987	0.995865	0.995781
	.6	0.999909	0.999829	0.999760	0.999698	0.999644	0.999596	0.999553	0.999514	0.999479	0.999447	0.999245	0.999144	0.999084	0.999045	0.999017
	.7	0.999990	0.999980	0.999972	0.999964	0.999956	0.999950	0.999944	0.999938	0.999933	0.999928	0.999894	0.999874	0.999862	0.999854	0.999847
	.8	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999997	0.999997	0.999996	0.999996	0.999993	0.999992	0.999990	0.999990	0.999989
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	.1	0.939168	0.890071	0.856132	0.832737	0.816111	0.803866	0.794541	0.787237	0.781375	0.776574	0.753805	0.745819	0.741758	0.739299	0.737651
	.2	0.987775	0.974490	0.962964	0.953551	0.945972	0.939849	0.934853	0.930726	0.927276	0.924355	0.909349	0.903639	0.900648	0.898811	0.897568
	.3	0.997360	0.993973	0.990602	0.987521	0.984803	0.982439	0.980389	0.978612	0.977064	0.975710	0.968090	0.964902	0.963170	0.962085	0.961343
	.4	0.999466	0.998700	0.997858	0.997021	0.996226	0.995490	0.994816	0.994205	0.993651	0.993150	0.990027	0.988565	0.987734	0.987200	0.986829
	.5	0.999909	0.999766	0.999596	0.999415	0.999233	0.999055	0.998883	0.998721	0.998568	0.998425	0.997425	0.996891	0.996568	0.996354	0.996203
	.6	0.999988	0.999968	0.999944	0.999915	0.999886	0.999855	0.999824	0.999794	0.999764	0.999735	0.999506	0.999363	0.999270	0.999205	0.999157
	.7	0.999999	0.999997	0.999995	0.999993	0.999990	0.999987	0.999983	0.999980	0.999977	0.999973	0.999942	0.999918	0.999901	0.999889	0.999879
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999997	0.999996	0.999994	0.999993	0.999992
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
3	.1	0.963716	0.924009	0.891224	0.865990	0.846727	0.831836	0.820107	0.810685	0.802980	0.796576	0.765098	0.753643	0.747737	0.744136	0.741712
	.2	0.994417	0.986017	0.977082	0.968709	0.961280	0.954838	0.949296	0.944530	0.940415	0.936845	0.917285	0.909350	0.905095	0.902448	0.900644
	.3	0.999053	0.997345	0.995223	0.992957	0.990715	0.988586	0.986611	0.984803	0.983158	0.981667	0.972428	0.968174	0.965778	0.964249	0.963190
	.4	0.999850	0.999542	0.999115	0.998611	0.998067	0.997509	0.996956	0.996420	0.995907	0.995421	0.991961	0.990114	0.989007	0.988275	0.987758
	.5	0.999980	0.999935	0.999867	0.999780	0.999679	0.999568	0.999452	0.999332	0.999213	0.999094	0.998108	0.997481	0.997073	0.996791	0.996586
	.6	0.999998	0.999993	0.999986	0.999975	0.999962	0.999947	0.999931	0.999913	0.999894	0.999874	0.999681	0.999530	0.999420	0.999340	0.999279
	.7	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999994	0.999992	0.999990	0.999969	0.999948	0.999930	0.999916	0.999904
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
4	.1	0.976952	0.945866	0.916459	0.891674	0.871545	0.855295	0.842089	0.831232	0.822193	0.814574	0.775812	0.761197	0.753561	0.748873	0.745703
	.2	0.997217	0.991974	0.985454	0.978615	0.972017	0.965922	0.960418	0.955501	0.951128	0.947238	0.924535	0.914731	0.909349	0.905959	0.903630
	.3	0.999622	0.998759	0.997489	0.995947	0.994264	0.992536	0.990831	0.989188	0.987632	0.986171	0.976203	0.971160	0.968215	0.966298	0.964955
	.4	0.999952	0.999827	0.999619	0.999336	0.998996	0.998614	0.998208	0.997788	0.997365	0.996947	0.993541	0.991469	0.990159	0.989268	0.988628
	.5	0.999995	0.999981	0.999954	0.999915	0.999863	0.999801	0.999730	0.999652	0.999568	0.999481	0.998618	0.997967	0.997510	0.997181	0.996935
	.6	1.000000	0.999998	0.999996	0.999993	0.999987	0.999981	0.999973	0.999963	0.999952	0.999941	0.999796	0.999655	0.999543	0.999454	0.999385
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999984	0.999967	0.999951	0.999937	0.999925
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999997
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
5	.1	0.984723	0.960569	0.935048	0.911802	0.891857	0.875106	0.861088	0.849309	0.839336	0.830815	0.785986	0.768494	0.759235	0.753512	0.749625
	.2	0.998527	0.995234	0.990584	0.985213	0.979635	0.974178	0.969023	0.964249	0.959878	0.955899	0.931161	0.919801	0.913418	0.909347	0.906530
	.3	0.999838	0.999394	0.998645	0.997631	0.996423	0.995094	0.993705	0.992302	0.990918	0.989577	0.979486	0.973884	0.970491	0.968239	0.966642
	.4	0.999983	0.999931	0.999830	0.999677	0.999472	0.999225	0.998942	0.998633	0.998307	0.997970	0.994826	0.992652	0.991200	0.990185	0.989442
	.5	0.999999	0.999994	0.999984	0.999966	0.999941	0.999908	0.999867	0.999819	0.999764	0.999705	0.998997	0.998366	0.997887	0.997528	0.997252
	.6	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999996	0.999993	0.999989	0.999984	0.999979	0.999972	0.999871	0.999750	0.999641	0.999550	0.999477
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999992	0.999980	0.999966	0.999953	0.999941
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999998
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

c = 15

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.908169	0.863394	0.838622	0.823447	0.813382	0.806286	0.801041	0.797017	0.793839	0.791267	0.779417	0.775383	0.773353	0.772132	0.771316
	.2	0.978338	0.964708	0.955625	0.949265	0.944622	0.941111	0.938377	0.936196	0.934418	0.932944	0.925731	0.923116	0.921770	0.920950	0.920399
	.3	0.994733	0.990938	0.988120	0.985969	0.984287	0.982943	0.981850	0.980946	0.980187	0.979543	0.976175	0.974864	0.974170	0.973741	0.973449
	.4	0.998827	0.997904	0.997164	0.996563	0.996066	0.995651	0.995301	0.995001	0.994742	0.994517	0.993254	0.992720	0.992427	0.992243	0.992117
	.5	0.999782	0.999598	0.999442	0.999309	0.999195	0.999095	0.999008	0.998931	0.998863	0.998802	0.998434	0.998263	0.998165	0.998102	0.998057
	.6	0.999970	0.999943	0.999919	0.999898	0.999879	0.999862	0.999847	0.999833	0.999820	0.999808	0.999732	0.999693	0.999669	0.999653	0.999641
	.7	0.999997	0.999995	0.999993	0.999991	0.999989	0.999987	0.999986	0.999984	0.999983	0.999982	0.999972	0.999967	0.999963	0.999961	0.999959
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999998
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	.1	0.952945	0.912937	0.884148	0.863706	0.848863	0.837758	0.829204	0.822446	0.816985	0.812490	0.790898	0.783226	0.779306	0.776928	0.775331
	.2	0.991968	0.982875	0.974705	0.967838	0.962177	0.957514	0.953649	0.950416	0.947684	0.945351	0.933075	0.928283	0.925749	0.924184	0.923122
	.3	0.998527	0.996575	0.994573	0.992697	0.991004	0.989502	0.988179	0.987014	0.985988	0.985079	0.979800	0.977507	0.976242	0.975443	0.974893
	.4	0.999751	0.999383	0.998969	0.998548	0.998140	0.997756	0.997399	0.997070	0.996768	0.996492	0.994701	0.993822	0.993312	0.992980	0.992747
	.5	0.999965	0.999909	0.999842	0.999768	0.999693	0.999618	0.999546	0.999476	0.999409	0.999346	0.998886	0.998626	0.998465	0.998357	0.998279
	.6	0.999996	0.999990	0.999983	0.999974	0.999964	0.999954	0.999944	0.999934	0.999924	0.999914	0.999833	0.999780	0.999744	0.999718	0.999699
	.7	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999994	0.999994	0.999986	0.999979	0.999975	0.999972	0.999968
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
3	.1	0.972949	0.941725	0.914812	0.893393	0.876626	0.863415	0.852860	0.844287	0.837216	0.831298	0.801717	0.790767	0.785086	0.781612	0.779268
	.2	0.996515	0.991045	0.985005	0.979161	0.973834	0.969109	0.964966	0.961346	0.958179	0.955402	0.939696	0.933110	0.929531	0.927289	0.925754
	.3	0.999503	0.998576	0.997388	0.996083	0.994758	0.993472	0.992255	0.991121	0.990074	0.989112	0.982891	0.979886	0.978158	0.977042	0.976264
	.4	0.999935	0.999797	0.999600	0.999363	0.999101	0.998827	0.998551	0.998278	0.998012	0.997757	0.995849	0.994768	0.994100	0.993652	0.993332
	.5	0.999993	0.999977	0.999952	0.999919	0.999880	0.999837	0.999790	0.999742	0.999693	0.999644	0.999212	0.998919	0.998720	0.998580	0.998477
	.6	0.999999	0.999998	0.999996	0.999993	0.999989	0.999985	0.999980	0.999974	0.999968	0.999962	0.999898	0.999844	0.999803	0.999772	0.999748
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999993	0.999988	0.999983	0.999979	0.999975
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
4	.1	0.983357	0.959668	0.936230	0.915750	0.898643	0.884528	0.872861	0.863144	0.854969	0.848021	0.811922	0.798020	0.790700	0.786188	0.783130
	.2	0.998339	0.995072	0.990848	0.986264	0.981709	0.977394	0.973412	0.969789	0.966516	0.963566	0.945669	0.937618	0.933125	0.930271	0.928299
	.3	0.999812	0.999368	0.998693	0.997849	0.996902	0.995906	0.994901	0.993913	0.992961	0.992053	0.985525	0.982026	0.979929	0.978544	0.977565
	.4	0.999980	0.999928	0.999838	0.999712	0.999558	0.999381	0.999188	0.998985	0.998777	0.998568	0.996759	0.995577	0.994802	0.994265	0.993873
	.5	0.999998	0.999993	0.999984	0.999970	0.999952	0.999929	0.999903	0.999873	0.999841	0.999807	0.999446	0.999153	0.998936	0.998776	0.998654
	.6	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999995	0.999992	0.999990	0.999987	0.999983	0.999938	0.999890	0.999849	0.999817	0.999790
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999996	0.999993	0.999989	0.999985	0.999982
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
5	.1	0.989279	0.971387	0.951589	0.932857	0.916286	0.902029	0.889868	0.879493	0.870603	0.862933	0.821556	0.804999	0.796154	0.790660	0.786917
	.2	0.999156	0.997183	0.994286	0.990819	0.987103	0.983367	0.979753	0.976337	0.973152	0.970210	0.951057	0.941829	0.936541	0.933134	0.930760
	.3	0.999923	0.999706	0.999326	0.998797	0.998147	0.997414	0.996629	0.995818	0.995004	0.994199	0.987769	0.983950	0.981564	0.979954	0.978800
	.4	0.999994	0.999973	0.999932	0.999867	0.999779	0.999670	0.999542	0.999401	0.999247	0.999087	0.997476	0.996268	0.995426	0.994823	0.994374
	.5	1.000000	0.999998	0.999995	0.999989	0.999980	0.999969	0.999955	0.999937	0.999918	0.999895	0.999613	0.999338	0.999118	0.998947	0.998813
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999994	0.999993	0.999962	0.999923	0.999885	0.999853	0.999825
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999998	0.999996	0.999992	0.999989	0.999986
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

c = 17

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.924979	0.886845	0.865101	0.851496	0.842338	0.835813	0.830954	0.827205	0.824230	0.821815	0.810596	0.806744	0.804800	0.803629	0.802845
	.2	0.984663	0.974701	0.967890	0.963022	0.959410	0.956643	0.954467	0.952715	0.951278	0.950080	0.944126	0.941932	0.940795	0.940101	0.939632
	.3	0.996787	0.994415	0.992615	0.991216	0.990105	0.989206	0.988467	0.987850	0.987328	0.986881	0.984499	0.983549	0.983041	0.982725	0.982510
	.4	0.999394	0.998907	0.998510	0.998183	0.997909	0.997677	0.997479	0.997308	0.997159	0.997029	0.996280	0.995954	0.995772	0.995657	0.995578
	.5	0.999907	0.999827	0.999759	0.999699	0.999648	0.999602	0.999562	0.999527	0.999495	0.999466	0.999289	0.999203	0.999153	0.999121	0.999098
	.6	0.999990	0.999981	0.999972	0.999965	0.999958	0.999952	0.999947	0.999942	0.999937	0.999933	0.999904	0.999888	0.999879	0.999872	0.999868
	.7	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999997	0.999996	0.999996	0.999996	0.999995	0.999993	0.999991	0.999990	0.999989	0.999989
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	.1	0.963114	0.930332	0.905917	0.888127	0.874961	0.864971	0.857195	0.851001	0.845965	0.841799	0.821540	0.814250	0.810508	0.808232	0.806702
	.2	0.994625	0.988324	0.982493	0.977471	0.973244	0.969704	0.966729	0.964211	0.962063	0.960214	0.950266	0.946288	0.944164	0.942845	0.941947
	.3	0.999160	0.998015	0.996812	0.995659	0.994599	0.993643	0.992788	0.992027	0.991348	0.990741	0.987109	0.985477	0.984563	0.983981	0.983578
	.4	0.999880	0.999700	0.999493	0.999279	0.999067	0.998865	0.998675	0.998497	0.998333	0.998180	0.997157	0.996634	0.996323	0.996119	0.995975
	.5	0.999986	0.999964	0.999936	0.999906	0.999875	0.999843	0.999812	0.999781	0.999752	0.999724	0.999512	0.999387	0.999307	0.999253	0.999213
	.6	0.999999	0.999997	0.999995	0.999992	0.999989	0.999985	0.999982	0.999979	0.999975	0.999972	0.999943	0.999923	0.999909	0.999899	0.999891
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999996	0.999995	0.999993	0.999993	0.999992
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
3	.1	0.979505	0.954746	0.932601	0.914459	0.899936	0.888297	0.878875	0.871144	0.864715	0.859301	0.831793	0.821439	0.816035	0.812719	0.810478
	.2	0.997775	0.994154	0.990027	0.985924	0.982094	0.978630	0.975541	0.972804	0.970381	0.968234	0.955733	0.950322	0.947345	0.945467	0.944175
	.3	0.999732	0.999218	0.998541	0.997779	0.996989	0.996207	0.995454	0.994743	0.994076	0.993457	0.989291	0.987188	0.985955	0.985150	0.984584
	.4	0.999971	0.999907	0.999815	0.999701	0.999573	0.999436	0.999297	0.999157	0.999019	0.998884	0.997833	0.997205	0.996806	0.996535	0.996338
	.5	0.999997	0.999991	0.999982	0.999969	0.999954	0.999937	0.999918	0.999898	0.999878	0.999857	0.999668	0.999531	0.999435	0.999366	0.999314
	.6	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997	0.999995	0.999994	0.999992	0.999990	0.999988	0.999967	0.999947	0.999932	0.999920	0.999911
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999993
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
4	.1	0.987758	0.969510	0.950743	0.933823	0.919334	0.907144	0.896912	0.888287	0.880959	0.874682	0.841408	0.828327	0.821387	0.817092	0.814173
	.2	0.998982	0.996906	0.994131	0.991030	0.987868	0.984807	0.981928	0.979265	0.976825	0.974599	0.960603	0.954059	0.950349	0.947971	0.946320
	.3	0.999904	0.999669	0.999303	0.998833	0.998292	0.997712	0.997115	0.996519	0.995935	0.995371	0.991114	0.988707	0.987228	0.986239	0.985533
	.4	0.999992	0.999969	0.999929	0.999872	0.999800	0.999716	0.999623	0.999524	0.999421	0.999316	0.998354	0.997684	0.997230	0.996909	0.996671
	.5	0.999999	0.999998	0.999994	0.999989	0.999983	0.999974	0.999964	0.999952	0.999940	0.999926	0.999775	0.999643	0.999540	0.999463	0.999403
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999981	0.999964	0.999950	0.999938	0.999928
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
5	.1	0.992320	0.978893	0.963433	0.948312	0.934572	0.922491	0.912008	0.902940	0.895082	0.888240	0.850431	0.834929	0.826572	0.821355	0.817791
	.2	0.999502	0.998293	0.996457	0.994191	0.991695	0.989126	0.986588	0.984145	0.981831	0.979664	0.964942	0.957520	0.953186	0.950364	0.948386
	.3	0.999962	0.999853	0.999655	0.999373	0.999018	0.998607	0.998159	0.997687	0.997205	0.996722	0.992634	0.990053	0.988392	0.987252	0.986426
	.4	0.999997	0.999989	0.999971	0.999943	0.999905	0.999855	0.999797	0.999731	0.999658	0.999580	0.998753	0.998085	0.997600	0.997245	0.996976
	.5	1.000000	0.999999	0.999998	0.999996	0.999993	0.999989	0.999984	0.999978	0.999970	0.999962	0.999848	0.999728	0.999627	0.999547	0.999482
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999989	0.999976	0.999963	0.999951	0.999941
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999997
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

c = 19

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.938225	0.905678	0.886627	0.874482	0.866197	0.860238	0.855768	0.852301	0.849539	0.847289	0.836753	0.833105	0.831259	0.830144	0.829398
	.2	0.989023	0.981698	0.976578	0.972853	0.970050	0.967878	0.966153	0.964754	0.963600	0.962632	0.957754	0.955928	0.954976	0.954392	0.953998
	.3	0.998015	0.996519	0.995362	0.994450	0.993715	0.993115	0.992615	0.992195	0.991837	0.991529	0.989854	0.989171	0.988803	0.988572	0.988415
	.4	0.999682	0.999423	0.999208	0.999028	0.998877	0.998747	0.998635	0.998537	0.998452	0.998377	0.997934	0.997736	0.997625	0.997554	0.997504
	.5	0.999960	0.999925	0.999894	0.999868	0.999844	0.999823	0.999805	0.999788	0.999773	0.999760	0.999674	0.999632	0.999607	0.999590	0.999578
	.6	0.999996	0.999993	0.999990	0.999988	0.999985	0.999983	0.999981	0.999979	0.999978	0.999976	0.999965	0.999959	0.999955	0.999953	0.999951
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999997	0.999997
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	.1	0.970772	0.943779	0.923063	0.907620	0.895994	0.887059	0.880035	0.874398	0.869788	0.865955	0.847098	0.840229	0.836686	0.834527	0.833073
	.2	0.996349	0.991938	0.987752	0.984067	0.980910	0.978227	0.975943	0.973991	0.972311	0.970853	0.962847	0.959570	0.957804	0.956701	0.955949
	.3	0.999512	0.998831	0.998100	0.997387	0.996720	0.996110	0.995557	0.995059	0.994611	0.994207	0.991721	0.990567	0.989911	0.989490	0.989198
	.4	0.999941	0.999852	0.999747	0.999636	0.999526	0.999418	0.999316	0.999220	0.999130	0.999046	0.998463	0.998153	0.997965	0.997841	0.997752
	.5	0.999994	0.999985	0.999974	0.999961	0.999948	0.999934	0.999921	0.999907	0.999895	0.999882	0.999785	0.999724	0.999685	0.999658	0.999638
	.6	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999994	0.999993	0.999992	0.999991	0.999980	0.999973	0.999968	0.999964	0.999961
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999999	0.999998
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
3	.1	0.984269	0.964495	0.946227	0.930873	0.918334	0.908127	0.899765	0.892838	0.887035	0.882116	0.856735	0.847025	0.841926	0.838788	0.836663
	.2	0.998554	0.996125	0.993278	0.990380	0.987619	0.985077	0.982777	0.980713	0.978865	0.977213	0.967325	0.962915	0.960457	0.958897	0.957819
	.3	0.999853	0.999562	0.999170	0.998721	0.998246	0.997767	0.997300	0.996852	0.996428	0.996029	0.993250	0.991789	0.990915	0.990339	0.989931
	.4	0.999986	0.999957	0.999912	0.999857	0.999793	0.999725	0.999653	0.999581	0.999509	0.999438	0.998859	0.998496	0.998259	0.998096	0.997976
	.5	0.999999	0.999997	0.999993	0.999988	0.999982	0.999975	0.999967	0.999959	0.999951	0.999942	0.999858	0.999795	0.999749	0.999715	0.999689
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999996	0.999989	0.999982	0.999976	0.999972	0.999968
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
4	.1	0.990860	0.976674	0.961581	0.947592	0.935344	0.924854	0.915926	0.908314	0.901789	0.896158	0.865720	0.853512	0.846986	0.842932	0.840170
	.2	0.999364	0.998022	0.996177	0.994061	0.991856	0.989677	0.987594	0.985639	0.983825	0.982152	0.971266	0.965987	0.962948	0.960984	0.959613
	.3	0.999949	0.999823	0.999620	0.999354	0.999043	0.998702	0.998345	0.997983	0.997624	0.997272	0.994503	0.992858	0.991824	0.991122	0.990617
	.4	0.999996	0.999986	0.999968	0.999941	0.999908	0.999867	0.999822	0.999773	0.999722	0.999668	0.999156	0.998778	0.998513	0.998323	0.998180
	.5	1.000000	0.999999	0.999998	0.999996	0.999994	0.999990	0.999986	0.999982	0.999977	0.999971	0.999907	0.999848	0.999800	0.999763	0.999734
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999994	0.999988	0.999983	0.999979	0.999975
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
5	.1	0.994407	0.984220	0.972073	0.959841	0.948454	0.938247	0.929248	0.921363	0.914459	0.908395	0.874103	0.859706	0.851874	0.846963	0.843597
	.2	0.999699	0.998945	0.997764	0.996267	0.994578	0.992803	0.991016	0.989268	0.987588	0.985995	0.974734	0.968810	0.965285	0.962967	0.961332
	.3	0.999981	0.999924	0.999820	0.999666	0.999469	0.999237	0.998978	0.998702	0.998415	0.998123	0.995528	0.993793	0.992645	0.991845	0.991258
	.4	0.999999	0.999995	0.999988	0.999975	0.999958	0.999935	0.999908	0.999877	0.999842	0.999804	0.999377	0.999009	0.998732	0.998524	0.998364
	.5	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999996	0.999994	0.999992	0.999989	0.999986	0.999939	0.999887	0.999841	0.999803	0.999772
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999997	0.999992	0.999988	0.999983	0.999980
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

c = 21

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.948797	0.920963	0.904289	0.893480	0.886017	0.880601	0.876512	0.873324	0.870775	0.868691	0.858860	0.855428	0.853685	0.852632	0.851926
	.2	0.992074	0.986659	0.982800	0.979950	0.977777	0.976076	0.974714	0.973602	0.972678	0.971900	0.967927	0.966417	0.965624	0.965137	0.964807
	.3	0.998761	0.997810	0.997063	0.996466	0.995980	0.995578	0.995241	0.994956	0.994711	0.994499	0.993327	0.992839	0.992573	0.992406	0.992291
	.4	0.999831	0.999692	0.999575	0.999476	0.999391	0.999318	0.999255	0.999200	0.999151	0.999107	0.998847	0.998727	0.998659	0.998615	0.998584
	.5	0.999982	0.999967	0.999953	0.999941	0.999930	0.999921	0.999912	0.999905	0.999898	0.999891	0.999850	0.999829	0.999816	0.999808	0.999802
	.6	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999994	0.999993	0.999993	0.999992	0.999991	0.999987	0.999985	0.999983	0.999982	0.999982
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	.1	0.976632	0.954310	0.936717	0.923332	0.913097	0.905138	0.898824	0.893721	0.889525	0.886020	0.868576	0.862144	0.858812	0.856776	0.855404
	.2	0.997489	0.994375	0.991352	0.988641	0.986282	0.984249	0.982499	0.980989	0.979680	0.978535	0.972124	0.969442	0.967983	0.967068	0.966441
	.3	0.999712	0.999303	0.998855	0.998410	0.997988	0.997598	0.997240	0.996914	0.996618	0.996350	0.994654	0.993843	0.993376	0.993073	0.992862
	.4	0.999971	0.999925	0.999871	0.999814	0.999756	0.999699	0.999644	0.999591	0.999542	0.999495	0.999164	0.998981	0.998868	0.998792	0.998738
	.5	0.999998	0.999994	0.999989	0.999984	0.999978	0.999972	0.999966	0.999960	0.999955	0.999949	0.999904	0.999875	0.999856	0.999842	0.999832
	.6	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999998	0.999997	0.999997	0.999993	0.999990	0.999988	0.999987	0.999986
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
3	.1	0.987793	0.971903	0.956794	0.943801	0.932996	0.924076	0.916685	0.910508	0.905296	0.900854	0.877575	0.868527	0.863748	0.860797	0.858795
	.2	0.999045	0.997397	0.995419	0.993361	0.991364	0.989497	0.987785	0.986230	0.984824	0.983557	0.975772	0.972198	0.970182	0.968894	0.968001
	.3	0.999917	0.999751	0.999521	0.999253	0.998965	0.998671	0.998380	0.998097	0.997827	0.997570	0.995721	0.994710	0.994095	0.993685	0.993392
	.4	0.999994	0.999979	0.999958	0.999930	0.999898	0.999864	0.999827	0.999789	0.999751	0.999714	0.999395	0.999186	0.999046	0.998948	0.998876
	.5	1.000000	0.999999	0.999997	0.999995	0.999993	0.999990	0.999987	0.999983	0.999980	0.999976	0.999939	0.999910	0.999887	0.999871	0.999858
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999996	0.999994	0.999991	0.999990	0.999989
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
4	.1	0.993090	0.981975	0.969788	0.958207	0.947863	0.938859	0.931096	0.924407	0.918625	0.913599	0.885918	0.874597	0.868501	0.864699	0.862102
	.2	0.999595	0.998716	0.997477	0.996022	0.994476	0.992922	0.991412	0.989977	0.988630	0.987374	0.978942	0.974708	0.972234	0.970622	0.969490
	.3	0.999973	0.999903	0.999789	0.999637	0.999456	0.999254	0.999039	0.998819	0.998597	0.998378	0.996578	0.995459	0.994739	0.994244	0.993885
	.4	0.999998	0.999994	0.999985	0.999973	0.999957	0.999937	0.999915	0.999890	0.999864	0.999837	0.999563	0.999350	0.999197	0.999085	0.998999
	.5	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999996	0.999995	0.999993	0.999991	0.999989	0.999961	0.999935	0999912	0.999894	0.999880
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999998	0.999996	0.999994	0.999993	0.999991
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
5	.1	0.995869	0.988069	0.978473	0.968552	0.959116	0.950505	0.942802	0.935972	0.929932	0.924585	0.893658	0.880372	0.873080	0.868485	0.865328
	.2	0.999815	0.999336	0.998567	0.997569	0.996419	0.995186	0.993925	0.992672	0.991453	0.990284	0.981699	0.976996	0.974147	0.972256	0.970912
	.3	0.999990	0.999960	0.999904	0.999819	0.999708	0.999575	0.999425	0.999262	0.999090	0.998914	0.997266	0.996105	0.995316	0.994757	0.994343
	.4	1.000000	0.999998	0.999995	0.999989	0.999981	0.999970	0.999958	0.999942	0.999925	0.999907	0.999686	0.999483	0.999325	0.999204	0.999110
	.5	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999976	0.999953	0.999932	0.999914	0.999899
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999996	0.999994	0.999993
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

c = 25

b	t \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60
1	.1	0.964263	0.943790	0.931036	0.922525	0.916523	0.912098	0.908716	0.906055	0.903911	0.902149	0.893709	0.890715	0.889187	0.888259	0.887637
	.2	0.995778	0.992780	0.990574	0.988901	0.987598	0.986560	0.985716	0.985019	0.984433	0.983936	0.981332	0.980313	0.979772	0.979437	0.979210
	.3	0.999505	0.999113	0.998798	0.998540	0.998326	0.998146	0.997993	0.997862	0.997748	0.997648	0.997080	0.996834	0.996697	0.996611	0.996551
	.4	0.999951	0.999910	0.999874	0.999844	0.999818	0.999794	0.999774	0.999756	0.999740	0.999725	0.999636	0.999592	0.999567	0.999551	0.999539
	.5	0.999996	0.999993	0.999991	0.999988	0.999986	0.999984	0.999982	0.999980	0.999979	0.999977	0.999968	0.999963	0.999959	0.999957	0.999956
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999997
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	.1	0.984736	0.969298	0.956567	0.946534	0.938651	0.932390	0.927341	0.923207	0.919771	0.916877	0.902155	0.896598	0.893694	0.891911	0.890706
	.2	0.998776	0.997191	0.995593	0.994113	0.992789	0.991623	0.990598	0.989700	0.988909	0.988210	0.984144	0.982371	0.981389	0.980767	0.980339
	.3	0.999896	0.999744	0.999572	0.999396	0.999225	0.999064	0.998913	0.998773	0.998645	0.998526	0.997742	0.997346	0.997112	0.996958	0.996849
	.4	0.999992	0.999980	0.999966	0.999950	0.999933	0.999917	0.999901	0.999885	0.999870	0.999856	0.999748	0.999685	0.999645	0.999618	0.999598
	.5	1.000000	0.999999	0.999998	0.999997	0.999996	0.999995	0.999994	0.999993	0.999991	0.999990	0.999981	0.999974	0.999969	0.999966	0.999964
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999998
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
3	.1	0.992454	0.982029	0.971617	0.962301	0.954304	0.947534	0.941811	0.936949	0.932792	0.929210	0.909889	0.902147	0.898009	0.895439	0.893688
	.2	0.999569	0.998788	0.997812	0.996760	0.995707	0.994695	0.993745	0.992864	0.992053	0.991312	0.986531	0.984215	0.982879	0.982013	0.981408
	.3	0.999973	0.999916	0.999835	0.999737	0.999629	0.999516	0.999402	0.999288	0.999178	0.999071	0.998255	0.997777	0.997476	0.997271	0.997123
	.4	0.999999	0.999995	0.999990	0.999983	0.999975	0.999965	0.999955	0.999945	0.999934	0.999924	0.999826	0.999758	0.999710	0.999675	0.999649
	.5	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999998	0.999998	0.999997	0.999996	0.999996	0.999988	0.999982	0.999977	0.999973	0.999970
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
4	.1	0.995930	0.988970	0.980933	0.972963	0.965588	0.958983	0.953153	0.948034	0.943538	0.939579	0.916979	0.907385	0.902142	0.898846	0.896585
	.2	0.999829	0.999439	0.998865	0.998164	0.997394	0.996595	0.995799	0.995024	0.994281	0.993576	0.988557	0.985868	0.984251	0.983180	0.982420
	.3	0.999992	0.999970	0.999933	0.999881	0.999818	0.999745	0.999666	0.999583	0.999498	0.999412	0.998653	0.998140	0.997796	0.997553	0.997374
	.4	1.000000	0.999999	0.999997	0.999994	0.999990	0.999985	0.999980	0.999973	0.999967	0.999959	0.999881	0.999814	0.999763	0.999724	0.999694
	.5	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999998	0.999993	0.999988	0.999983	0.999979	0.999975
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999999
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
5	.1	0.997670	0.992988	0.986911	0.980338	0.973844	0.967728	0.962112	0.957025	0.952445	0.948328	0.923483	0.912329	0.906100	0.902138	0.899400
	.2	0.999926	0.999726	0.999390	0.998935	0.998392	0.997790	0.997155	0.996509	0.995866	0.995236	0.990278	0.987350	0.985515	0.984272	0.983379
	.3	0.999997	0.999988	0.999971	0.999944	0.999908	0.999864	0.999812	0.999754	0.999692	0.999626	0.998961	0.998445	0.998076	0.997807	0.997604
	.4	1.000000	1.000000	0.999999	0.999998	0.999996	0.999994	0.999991	0.999987	0.999983	0.999978	0.999918	0.999857	0.999806	0.999766	0.999733
	.5	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999	0.999996	0.999991	0.999987	0.999983	0.999980
	.6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999999
	.7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.8	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
	.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000