代替弾力性とCES生産関数

小 野 浩

一 代替弾力性の諸定義

二生産要素の場合代替弾力性は以下のように定義される。

$$\sigma=\frac{d\log(x_2/x_1)}{d\log r} \tag{1. 1}$$

ここでx_1とx_2は各生産要素投入量，rは限界代替率を表わす。最初に二生産要素の代替弾力性を定義したのには二つの理由がある。第一はこの後で述べるn生産要素の場合の代替の偏弾力性との関連を示すため。第二は代替弾力性は要素間の代替関係を表わす指標であるか，という問に対して二生産要素のケースが理解を容易にするために利用されるからである。第二点を簡単に考察しよう。

(1.1) 式は簡単な計算によって

$$\sigma=\frac{r}{\dfrac{d^2x_2}{dx_1{}^2}}\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{r}{x_2}\right) \tag{1. 2}$$

と書き改められる。(1.2) 式はσの大きさが等生産量曲線の傾斜の程度を反映していることを示唆している。この点が代替関係を表わす指標として (1.2) 式が持つ意味である。

この考えをn生産要素にまで拡張するためには代替の偏弾力性という概念を導入することが必要である。今までに三種類の代替の偏弾力性が定義されている。

㈠ Allen partial elasticity of substitution. (以下これを A. E. S. と略称する)

㈡ Direct partial elasticity of substitution (以下これを D. E. S. と略称する)

㈢ Shadow partial elasticity of substitution (以下これ S. E. S. と略称する)

生産要素x_rとx_sの A. E. S. は次のように定義される。

$$\sigma_{rs}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{x_rx_s}\cdot\frac{F_{rs}}{F}$$

ここでfは生産関数，$f_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，$f_{ij}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$，

$$F=\begin{vmatrix}0 & f_j\\ f_i & f_{ij}\end{vmatrix} \qquad (i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

そしてF_{rs}は行列式Fのr行s列の余因子行列式を表わしている。

$n=2$ の場合 A. E. S. は (1.1) 式に帰着する。このことは A. E. S. が二生産要素の場合の代替弾力性を含むより一般的

な弾力性の概念であるといえる。

D. E. S. は他の要素投入量水準を一定として各々の要素の組に二要素代替弾力性 (1.1) 式を適用したものである。定義から明白にこれは (1.1) 式に全く等しい。すなわち、生産要素 x_r と x_s の D. E. S. は

$$\sigma_{rs}=\frac{\dfrac{1}{x_rf_r}+\dfrac{1}{x_sf_s}}{-\dfrac{f_{rr}}{f_r^2}+2\dfrac{f_{rs}}{f_rf_s}-\dfrac{f_{ss}}{f_s^2}}$$

である。最後に S. E. S. という概念を説明しよう。

S. E. S. は要素 x_r と x_s 以外の要素の帰属価格[(1)] (imputed price) と最小帰属費用 (minimum imputed cost) を固定したままで二生産要素 x_r と x_s に代替弾力性の定義 (1.1) 式を適用したものである。すなわち S. E. S. は

$$\sigma_{rs}=\frac{-\dfrac{\lambda_{rr}}{\lambda_r^2}+2\dfrac{\lambda_{rs}}{\lambda_r\lambda_s}-\dfrac{\lambda_{ss}}{\lambda_s^2}}{\dfrac{1}{p_r\lambda_r}+\dfrac{1}{p_s\lambda_s}}$$

によって表わされる。ここで λ は最小帰属費用、p_r は生産要素価格、$\lambda_r=\dfrac{\partial\lambda}{\partial p_r}$、そして $\lambda_{rs}=\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial p_r\partial p_s}$ を表わす。

上述の A. E. S., D. E. S. そして S. E. S. の定義から明らかなように D. E. S. と S. E. S. は A. E. S. の定義に制約を加えた定義式に他ならないことが判る。更に代替弾力性一定の条件をみたす生産関数は数学的に代替弾力性の定義式から導びき出しうることが知られている。

以上のことから A. E. S. 一定の条件をみたす種々のタイプの生産関数は D. E. S. と S. E. S. 一定の条件をみたす生産関数を含んでいるといえる。

次に A. E. S. の意味に少し触れよう。A. E. S. は一見したところ要素間の代替関係を規定するかの如き印象を与えるが果してそうか。二生産要素の場合を考えると $r \neq s$ に対して必らず $\sigma_{rs}>0$ である。この意味は生産要素 x_r の価格 p_r が上昇したとき産出量水準を一定に保つためには生産要素 x_s に対する需要量は必らず増加しなければならない。ということを示している。しかしそのことは必ずしも生産要素 x_r と x_s が代替関係にあることを示しているのではない。何故ならそのような場合でも補完関係にある二生産要素を考えることが可能であろうから[(2)]。このことは通常代替関係と対立する概念と考えられている補完関係を A. E. S. によって分類することができるか、という問にもつながる。まず代替関係と補完関係を分ける境界として $\sigma_{rs}=0$ を考え、その大きさが代替関係や補完関係の程度を表わすと考えてみる。しかし σ_{rs} の大きさによって補完性の程度を必らずしも反映することはできないから、I. F. Pearce も指摘[(3)]しているように補完性を測るためには他の尺度が必要である。これらを考えると A. E. S. は補完性の尺度としては不適当である。

ところで代替弾力性、スルツキーの代替効果の価格弾力性（フリッシュのいうスルツキー弾力性）とある s 要素の投入配

分比率との間には次式が成立する。

$$\sigma_{rs}=\frac{\varepsilon_{rs}}{\alpha_s} \tag{1. 3}$$

ここで ε_{rs} はスルツキー弾力性、α_s は生産要素 s の投入配分比率を表わしている。

(1. 3)式よりA.E.S. は投入配分比率の小さい生産要素に対して σ_{rs} が無限大になりうる可能性があるという欠点を含んでいる。以上指摘したように A. E. S. の持つ意味についての吟味は別に検討を要する研究課題(4)であるが、以下の第三節では A. E. S. の定義に従ってC・E・S・生産関数の考察を進めることにする。

（1） λ は生産関数の関数形が与えられる時シェファードの双対定理を用いて導びかれる最小の費用関数である。帰属価格は均衡における要素価格を指している。

（2） ここで強調されるのは代替関係と補完関係を定義する定義式が慣用のそれらの関係を必ずしも反映しているものではないということである。I. F. Pearce (7), chap. 4. 参照。

（3） Pearce は補完性を測る尺度として当該二生産要素の価格変化による要素需要量の変化を表わす指標を選んでいる。それは角度で補完性を測る方法でありその値は

$$\eta_{ij}=-\frac{\begin{vmatrix} F_{ij} & F_{jj} \\ -F_{ji} & F_{ii} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{jj} & F_{ji} \\ F_{ij} & F_{ii} \end{vmatrix}}$$

で表わされる。しかし η_{ij} も二財の補完関係にあるケースを説明することはできない。それはこの定義も等産出量曲線上の曲線に関連している定義であるからである。I. F. Pearce (7), chap. 4 参照。

（4） 代替弾力性に関して既述の代替弾力性と異なる視点に少し触れる。本文での付替弾力性の定義は実証的観点からは

$$\frac{\partial\log(x_2/x_1)}{\partial\log(p_1/p_2)}$$

と表わした方が良い。ところで二要素の場合に限定しても市場で observable な代替弾力性が同一等生生量曲線上で定義されると先験的に期待すべき理由はない。それ故産出量を y で表わすと、

$$\frac{d\log(x_2/x_1)}{d\log(p_1/p_2)}=\frac{\partial\log(x_2/x_1)}{\partial\log(p_1/p_2)}+\frac{\partial\log(x_2/x_1)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\log(p_1/p_2)}$$

市場で observable な代替弾力性と通常の代替弾力性の定義式が一致するのは

$$\frac{\partial\log(x_2/x_1)}{\partial\log(p_1/p_2)}=0 \text{ or } \frac{dy}{d(p_1/p_2)}=0$$

すなわち生産関数が homothetic であるか、あるいは相対価格の変化にも拘らず y がその変化の影響を受けない場合である。このことは一般に代替弾力性の計測が困難な問題を含んでいることを示唆する。I. Morrissett 〔6〕, p. p. 44～46.

二　CES生産関数の展開

本節ではC・E・S生産関数の歴史的発展を簡単に素描する。

(一)、ACMS[1]

ACMS 論文においては以下の三つの仮定からC・E・S・生産関数が得られる。

(i)、収穫不変

(ii)、競争的労働市場

(iii)、労働投入量一単位当りの付加価値と貨幣賃金率の間に次の関係がある。

$$\log(V/L)=\log a+b\log w$$

ここでVは付加価値、Lは労働投入量、wは貨幣賃金率、そしてaとbは定数である。

以上の三つの仮定から我々は周知のC・E・S・生産関数

$$V=(\beta K^{-\rho}+\alpha L^{-\rho})^{-1/\rho}$$

を導びくことができる。ここでKは資本投入量をさす。A. E. S. は $\sigma=1/1+\rho$ である。

ACMS 論文で未解決とされた論点として少なくとも次の二点があげられる。第一は ACMS の取扱っているのは二生産要素にすぎない。従ってn生産要素への一般化が考えられなければならない。第二は、生産要素の分割 (subdivision) の問題である。後者の問題が以下の分析での主要なテーマである。

(二)、Uzawa.

Uzawa は ACMS が残した課題に一応の解決を与えている。Uzawa 論文の貢献として以下の三点があげられる。

(i)、ACMS によって導入されたC・E・S・生産関数のn生産要素への拡張。

(ii)、シェファードの双対定理を用いて生産関数から一義的に費用関数を演繹していること。

(iii)、n生産要素をいくつかの組 (partition) に分け各組内に異なる代替弾力性の値を想定していること。

ここでは以下の分析との関連で(iii)のみに言及する。

n生産要素のケースに拡張された ACMS のC・E・S・生産関数はあらゆる二生産要素の組合せの A. E. S. が一定でしかも同質であるという特殊な生産関数である。これに対し Uzawa はn生産要素を適当な組に分割し、各組内での二生産要素の A. E. S. が等しくかつ異なる組に属する生産要素間の A. E. S. が1であるような生産関数の型を明らかにした。n生産要素の集合 $\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ を $\{N_1,N_2,\cdots\cdots,N_S\}$ の組に分ける。この分割に従って生産要素ベクター $x=(x_1\cdots\cdots x_n)$ は $x=(x^{(1)}\cdots\cdots x^{(S)})$ に、価格ベクター $P=(p_1\cdots\cdots p_n)$ は $P=(p^{(1)}\cdots\cdots p^{(S)})$ の組に分割される。すると以下の生産関数は上述の A. E. S. の条件をみたしている。

$$\left.\begin{aligned}&y=\prod_{s=1}^{S}f^{(s)}(x^{(s)})^{\rho_s}\\&f^{(s)}(x^{(s)})=\Big(\sum_{i\in N_s}\alpha_i x_i^{-\beta_s}\Big)^{-1/\beta_s}\end{aligned}\right\}\qquad(2.\ 1)$$

ここで $\rho>0,\ \sum_{s=1}^{S}\rho_s=1,\ \alpha_i>0,\ -1<\beta_s<\infty,\ \beta_s\neq0,\ i=1\cdots\cdots n$

そして $s=1 \cdots\cdots S$.

A. E. S. は

$$\sigma_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i\in N_s, j\in N_t, s\neq t\\ 1+\dfrac{1}{\rho_s}(\sigma_s-1) & \text{if } i,j\in N_s\end{cases}$$

ここで $\sigma_s=1/1+\beta_s$

㈢′ McFadden

McFadden は D. E. S. と S. E. S. が一定である生産関数を導出した。D. E. S. が一定である生産関数は

$\rho=0$ に対して

$$y=\alpha_0\prod_{s=1}^{S}[\prod_{k\in N_s}x_k]^{\alpha_s/m_s}$$

$\rho\neq 0$ に対して

$$1=\alpha_0\sum_{s=1}^{S}[\alpha_s\prod_{k\in N_s}(x_k/y)]^{-\rho} \qquad (2.\ 2)$$

すべての組が同数の要素を含んでいる場合（$\forall m_s=m$）(2.2) 式は

$$y=a[\sum_{s=1}^{S}\alpha_s\prod_{k\in N_s}(x_k)^{-\rho}]^{-1/\rho m} \qquad (2.\ 3)$$

S. E. S. が一定である生産関数は

$\rho=0$ に対して

$$y=\beta_0\prod_{s=1}^{S}\prod_{k\in N_s}x_s^{\alpha_s/m_s}$$

$\rho\neq 0$ に対して

$$\left.\begin{aligned}1&=\sum_{s=1}^{S}\beta_s\prod_{k\in N_s}(Qx_k/y)^{\rho/1+\rho}\\ Q&=\sum_{s=1}^{S}m_s\beta_s\prod_{k\in N_s}(Qx_k/y)^{\rho/1+\rho}\end{aligned}\right\} \qquad (2.\ 4)$$

(2.4) 式は変数 Q を消去して解かれる。ここで

$$\beta_0=\frac{1}{\alpha_0}\prod_{s=1}^{S}(\alpha_s/m_s)^{-\alpha_s},\ \beta_s=(\alpha_0\alpha_s)^{\frac{1}{1+\rho}}$$

(2.4) 式は $\forall m=m$ のとき (2.3) 式になる。

㈣′ K. Sato.

今までのC・E・S・生産関数論の一つの綜合として K. Sato のC・E・S・生産関数をあげることができる。K. Sato の提示した関数形は

$$\left.\begin{aligned}y&=F(Z)=[\sum_{s=1}^{S}\alpha_s Z_s^{-\rho}]^{-1/\rho}\\ Z_s&=\phi_s(x^{(s)})=[\sum_{i\in N_s}\beta_i^{(s)}(x_i^{(s)})^{-\rho_s}]^{-1/\rho_s}\end{aligned}\right\} \qquad (2.\ 5)$$

である。ここで $\beta_i^{(s)}>0,\ -1<\rho_s$

K. Sato の生産関数が既述の生産関数の綜合となっていることは以下の意味においてである。

周知のようにC・E・S・生産関数は Cobb-Douglas 生産関数をその特殊なケースとして内包している。それ (2.5) 式に適当な条件を与えてやると Uzawa や McFadden の導びいた生産関数が導出されるからである。

(1) Arrow, Chenery, Minhas そして Solow の略称。

三　生産関数の two-level 分析

本節では前節で紹介したC・E・S・生産関数に一つの分類図式を与えることによって統一的見通しを与えることを試みる。その前に次の事実を指摘しておくのが便利であろう。それはA. E. S. が一定である生産関数は以下のいずれかの形をとらなければならない、という事実である。すなわち

$\rho \neq 0$ に対して

$$y=F(\sum \beta_i x_i^{-\rho}) \qquad (3.\ 1)$$

$\rho=0$ に対して

$$y=G(\prod_i x_i^{\beta_i}) \qquad (3.2)$$

ここでFとGは夫々関数形を表わす。以下説明の便宜のため(3.1) 式を C. E. S.-type, (3.2) 式を C-D-type (Cobb-Douglas-type の略称）と名称する。次に inter-group と intra-group を区別する。

Uzawa の生産関数を例にとると

$$y=\prod_{s=1}^{S} f^{(s)}(x^{(s)})^{\rho_s}$$

は各組の間で C-D-type である。これを inter-group の C-D-type の生産関数と名付ける。これに対して

$$f^{(s)}(x^{(s)})=(\sum_{i \in N_s} \alpha_i x_i^{-\beta_s})^{-1/\beta_s}$$

は各組内で C. E. S.-type となっている。これを intra-group の C. E. S.-type の生産関数と名付ける。生産要素のグループに関して inter-group と intra-group の二つの水準に分ける方法を two-level の分類と名称する。

今までの分析から明らかなように、inter-group と intra-group においてともに A. E. S. 一定を満足する生産関数のタイプは C. E. S.-type と C-D-type の二つであるから我々は表Iの四つの組合せを考えることができる。

表 I

		inter-group	
		C-D-type	C. E. S.-type
intra-group	C-D-type	A	B
	C. E. S.-type	C	D

表Iから容易にAとBのケースはMcFadden、Cは、Uzawa、Dは K. Sato によってそれぞれ分析されていることが判る。このことは A. E. S. 一定な生産関数が基本的にはすべて論じ尽されたということを示している。また二節の著者たちは一次同次の生産関数を想定して議論しているが、これらの議論は容易にm次同次の場合にまで拡張することができる。あるいは非同次の場合でも (3.1) と (3.2) 式の関係を充たしている生産関数を考えることも可能である。しかし基本となる四つの組合せがすべて明らかにされたという意味で two-level のC・E・

S・生産関数は論じ尽されているといえるのである。それゆえ今後の発展の方向としては以下の二つが考えられる。

第一はC・E・S・生産関数を要素分割以外の面から規定しようとする方向である。第二はC・E・S・生産関数を特殊なケースとして含むより一般的なV・E・S・(Variable Elasticity of Substitution の略称) 生産関数を考えることである。ことにV・E・S・を想定した分析は最近二、三の論者によって研究の緒口が見出されるつつある状況にある。生産関数の今後の発展の一つの方向として注目すべき示唆を与えているように思う。

＊ この研究ノートは修士論文の一部を要約したものである。修士論文及びこの研究ノートの作成途中で有益かつ適切なコメントを倉林義正助教授よりいただいた。深く感謝する次第である。

参考文献

(1). R. G. D. Allen, *Mathematical Analysis for Economist*, New York, 1938.

(2). ACMS, "Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency", *R. E. Stud.*, Aug., 1961.

(3). K. Ara, "On C. E. S. Production Function" *Hitotsubashi Jour. of Eco.*, Feb., 1967.

(4). R. Frisch, "A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors", *Econometrica*, 1959.

(5). D. McFadden, "Constant Elasticity of Substitution Production Function", *R. E. Stud.*, June, 1963.

(6). I. Morrissett, "Some Recent Uses of Elasticity of Substitution: A Survey", *Econometrica*, Jan., 1953.

(7). I. F. Pearce, *A Contribution to Demand Analysis*, 1964.

(8). K. Sato, "A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function", *R. E. Stud.*, April, 1967.

(9). R. W. Shephard, *Cost and Production Functions*, Princeton Uni. Press, 1953.

(10). H. Uzawa, "Production Function with Constant Elasticities of Substitution" *R. E. Stud.*, Oct., 1962.

(11(. T. Yasui. "The C. E. S. Production Function: A Note", *Econometrica*, July, 1965.

(一橋大学大学院博士課程)