確率論的計画法における certainty equivalence についての一考察

片　岡　信　二

本論文では不確定情報のもとでの意志決定問題を確率論的計画法の視点からの考察を行い，最後に一般化された形で目的関数を利益の平均と分散の関数として表わしその性質を分析する．

1　不確実性と計画

ある行動の主体が意志の決定から，最終的にその行動の成果を得るまでには時間的に連絡した多くの段階を経過するのが普通であるが，われわれは以下の議論を簡潔に進めるためにそれらを計画の段階と実行の段階との二つにまとめて考えることにする．さて計画の段階においては実行の時点で成果に影響を与える種々の要因についての情報をできるだけ詳細に知ることが意志の決定者にとって重要な問題であるが，また他方どのようにしても未来に起ることを完全に正しく予見するにはできないことも自明である．したがって，本来計画を設定するという仕事には必ずこの不確定要素がつきまとってくるものであるということができる．にもかかわらず従来の数理計画法においてはほとんどこの点を無視して定式化が行われている．たとえば近年企業内での利用がルーチン化しはじめている線型計画法で，不確定性は諸係数の変動に由来するものとし，最適解を得た後でパラメトリックにそれらを変化させ最適解の変動を追跡することで利用者は満足しているが，このことは不確定性が計画に本質的に付随す

るものであるという観点からすると大変奇妙なことである．何故ならば，そのようにして得られたものは不確定に変動する係数が実行の段階で確定したものとし，その時点で計画したとき得られる最適解ではあっても，その計画は将来の値が不確定な段階で決定されそれを実行して得る成果が最適になるように予め選ばれたものではない．したがって後のような意味での最適解が本来の不確実な情報のもとで最適計画であると考えるべきである．

2　期待値の最適化

一般的に考えれば，計画の立案に際して考慮すべき要因は無数にあり，それらの中にはわれわれの無知のため予め考えに入れることができなかったものも多数あるであろう．そこでわれわれは定式化の簡単のために，いくつかの定量的に観測可能な要因だけをとり上げ，それらのもつ不確定性に対する情報として要因の水準の確率分布が知り得たものとして話を進めてゆくことにする．（不確定性についての情報を全く知り得ない場合の一つの理論としてゲーム理論があるが，筆者の本題からは離れるのでそれに触れない．）

ある計画 x に対して要因 c が作用しつつ実行された場合に得られる成果をある価値の尺度で測って v とするとき，一般に

$$v=u(x,\ c) \qquad (1)$$

と表わすことができる．さてこの c が種々の水準の値をとるとき，不確定性のもとで計画 x の最適性の規準をいかにとるべきであろうか．その一つが最もよく用いられている期待値の最適化である．これは現実に保険や gamble などに用いられ投資の戦略としては高く評価されてきたものである．

そこでいま計画の実行による成果として金額で表わした利益をとり，その期待値を最大にすることが，不確実な情報のもとでの最適計画の基準と一応することにし，これについての J. Bernoulli の大数の法測による正当化，D. Bernoulli の St. Petersburg のパラドックスによる反論から発した幾人かの経済学者の解釈を述べ*，さらにこれに対する筆者の批判を行いたいと思う．

＊　この部分は主として D. E. Farrar, *The Investment Decision under Uncertain-*

ty, Prentice-Hall, Inc. 1962, pp. 7～18. による.

3　期待利益の最大化と St. Petersburg のパラドックス

フランスの数学者一家 Bernoulli 家の一人 J. Bernoulli は 1713 年刊行した *Ars Conjectandi* において，確率論における大数の法則を公にしたが，それ以来永い間不確定情報下での最も合理的な経済行動の判定基準として利益の期待値の最大化が考えられてきた．すなわち利益の期待値の最大化の態度を繰り返えしとる企業家は非常に長期間の内の全利益を最大にすることができると考えられてきたのである．ところが大数の法則の前提である各繰り返えしにおける利益の独立性が必ずしも投資行動において保れず，また実際には，利益が少い投資方法と多いものとがあるとき前者をとる企業家もありうるということからこれに対する再考が説えられるようになった．

ところで，J. Bernoulli の甥の D. Bernoulli は大数の法則の発表の 25 年後にすでに St. Petersburg のパラドックスという興味ある問題を提起し，期待利益最大が必ずしも利益を追求する人間の行動の基準にならないことを示した．これを筆者なりに少し変えて述べればつぎのようなものである．

貨幣を投げて表がでるまで続けるゲームがある．このゲームに参加した者は，1 回目に表がでれば 1 円，2 回目にはじめて表がでれば 2 円，3 回目にはじめて表がでれば 4 円というようにし，一般に n 回目にはじめて表がでれば 2^{n-1} 円得るものとする．さてこのゲームに参加することを多数で競りによって決めるとしたら，参加する人は何円払うであろうか．

この問題は数学的には非常に簡単であり，ゲームに参加したときの期待利益は

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}2^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty \qquad (2)$$

となる．すなわち無限大の利益が期待できるのである．従ってもし期待利益の最大化を行動の基準とする人ならばいくらでも金を支払って競りに勝つように行動する筈である．

しかしながら現実にこのゲームに無限大の金を出す者がいるであろうか.

この問題に対して多くの解答が出され，現実の有限性に根拠をおいて無限大の利益が無意味であるとするものなどがあるが，一応の説得力のあるものとして，効用論的な見方と危険回避説とがある．効用論的解釈は，参加する人が通常の感覚を持っているならば限界効用逓減の法則に従うであろうから利益が多くなるほど限界効用は減少し，無限大まで競ることはしなくなるであろうという見方に立つものである．また危険回避説は投資に対する利益が確率的に変動するので，大きな金額を投入して参加したとしても万一利益がそれより少い場合もありこの危険を恐れて多額の投資は行わないという解釈によるものである．これを更に具体化すれば期待利益から利益の分散ないしは標準偏差（これらを危険の程度を表わすものと考えて）の何倍かを割引いたものをもって最適性の判定基準にとることが考えられる．つぎに Farrar が記述している限界効用説と危険回避説の結びつきについての筆者の疑問を述べておこう．

4　不確実性と危険と効用

前述の不確実性による危険を投資の意志決定のための基準に取り入れるのに，上述の文章によって述べた方法を式で表現した certainty equivalence を考える．すなわち確率変数としての利益 Z の期待値を μ，標準偏差を σ とすると**き，投資者の最大化すべき量 v を

$$v=f(\mu,\ \sigma) \tag{3}$$

であるとする．すなわち危険の大きさを利益 Z のばらつきの度合 σ で表わし，これを投資の決定基準に反影する方法でこの式を certainty equivalence と呼ぶ．f が1階微分可能であるとして，この関数には，

$$f(\mu,\ 0)=\mu \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mu}>0,\quad \frac{\partial v}{\partial \sigma}<0 \tag{5}$$

が成立することは plausible な仮定として認められるであろう．第一のものは不確実性が全くなければ期待利益を最大化することを意味し，第二の左のもの

は自明であり，また右のものは危険の度合が大きくなれば v が減少することを示す．

この certanity equivalence のさらに具体的な関数型については，いくつかのものがあるが，

（6）　$$v=\mu-A\sigma$$

または

（7）　$$v=\mu-A\sigma^2$$

などが代表的である．ここでは A は危険回避係数（risk aversion constant）とよばれ，投資者が安全性を望む傾向が強いほど大きくなる．[***]

(6) の形は Thomas[(2)] や Charnes[(4)] によって導入され，筆者はこれを確率分布を考慮した最大化問題から理論的に導いた．[(3)(4)] また R. Freund[(2)] は利益 Z の効用関数を $1-e^{-2AZ}$ とおくことにより，Z が正規分布するとして (7) の形を導いている．

ところで Farrar は (7) の形の certainty equivalence を効用関数のテーラー展開の期待値としてつぎのように求めている．[(2)] すなわち $u(Z)$ を利益 Z の効用関数とすると，

（8）　$$u(Z)=u(\mu)+u'(\mu)(Z-\mu)+\frac{u''(\mu)}{2}(Z-\mu)^2+\cdots\cdots$$

となり，これを第3項まで取ってその期待値を求めると，

（9）　$$E(u(Z))=u(\mu)+\frac{u''(\mu)}{2}\sigma^2$$

をうる．そこで $u(Z)$ は線型変換に対して一意であるという性質を援用すると関数の原点を動して

(10)　$$E(u(Z))=\mu+\frac{u''(\mu)}{2}\sigma^2$$

を得る．ここで $u''(\mu)/2=-A$ とおけば (7) が再び得られることになる．

以上は Farrar が (7) を効用関数の期待値から導きだす筋道であるが，筆者には素朴な疑問が残る．その一つは (9) から (10) に移るとき $u(\mu)$ の線

型変換に対する一意性から $u(\mu)\to\mu$ となるならば，何故はじめから $u(Z)$ を Z とできないか．勿論そうなれば $u(Z)$ は (8) のようなテーラー展開とはならないし (7) 式を導きだすことも不可能である．したがって筆者には効用関数の展開の期待値から certainty equivalence (7) を導き出すことには無理があると思う．疑問の第二は，たとい効用関数の期待値を考えるにしても，当然この場合にも不確実性による危険というものがある筈で，その危険性の度合を効用関数の期待値を割引いたものを certainty equivalence として用いるのが妥当な考え方であろう．この意味からも Farrar の導出は作為的な感をまぬかれることはできない．したがって (7) はこれを経験的なものとして認めるか，あるいは他のある原理から導くかしかないように思われる．

** 投資の対象が複数個あるときは Z,μ はベクトルとなり，σ は行列となるが，ここではそのことも含めてある．

*** 普通 A は正であるが，もし負ならば，これは投資者の投機的な性向を示すことになる．

5 一般化した certainty equivalence

筆者はさきに (6) の形の certainty equivalence を確率分布を考慮した最大化問題から導いたが，ここではつぎの形のものを経験的なものとして，これについての数学的な性質，解法を考えたいと思う．

一つの線型計画問題:

$$\max \quad Z=\pi' x, \tag{11}$$

$$\text{subject to} \quad Ax\leqq b, \quad x\geqq 0, \tag{12}$$

を考える．ここで π' は確率変数の利益係数の行ベクトルで $\pi_1, \pi_2, \cdots\cdots \pi_n$ の元素からなり，x は計画の列ベクトルで $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ の元素からなる．また A は $m\times n$-行列，b は m-列ベクトルである．利益 Z の期待値 μ と分散 σ^2 は，π の期待値を $p(p_1, \cdots\cdots, p_n)$，分散共分散行列を $V(v_{ij})$ とし，これは正値行列であるとする (非負値行列には必ずなる)．このときわれわれは，

(13)　$$\mu=p'x=\sum_{j=1}^{n}p_jx_j$$

(14)　$$\sigma^2=x'Vx=\sum_{i,j=1}^{n}x_iv_{ij}x_j$$

と得る．そこで

$$v=\mu-\frac{1}{2}g(\sigma^2)$$

または

(15)　$$v(x)=p'x-\frac{1}{2}g(x'Vx)$$

という形の certainty equivalence を考える．このようなやや一般化された目的関数の条件付き最大化問題を考えるために，Arrow-Enthoven[(1)] よる準凹（凸）関数の概念を導入する．

〔**定義**〕　n 次元ベクトル x のスカラー関数 $f(x)$ があり，これが任意のベクトル x^0, x^1 に対し $0\leqq\theta\leqq1$ として

(16)　$f(\theta x^0+(1-\theta)x^1)\geqq min[f(x^0),\ f(x^1)]$

$(f(\theta x^0+(1-\theta)x^1)\leqq max[f(x^0),\ f(x^1)])$

という関係を満すとき $f(x)$ は準凹（凸）関数であるという．

これは従来の凹（凸）関数の概念を拡張したものであり，1 変数の関数を例にとれば正規分布関数は準凹関数となる．$f(x)$ が凹（凸）関数であるならば

(17)　$$f(\theta x^0+(1-\theta)x^1)\geqq\theta f(x^0)+(1-\theta)f(x^1)$$

$$(\leqq)$$

であり，　$\theta f(x^0)+(1-\theta)f(x^1)\geqq min[f(x^0),\ f(x^1)]$

(18)　$(\leqq max[f(x^0),\ f(x^1)])$

であるから，凹（凸）関数は準凹（凸）関数の中に含まれることになる．

さて（15）式の関数 $v(x)$ が準凹関数であるならば，Arrow-Enthoven[(1)] の定理 1 によりわれわれは適当な条件のもとで $v(x)$ の全域的最大を求めることができる．そこで問題は $-g(x'Vx)$ の準凹性ないしは $g(x'Vx)$ の準凸性が証明できればよいことになる．そのためにつぎの定理が与えられる．

〔**定理 1**〕　$g(t)$ が単調非減少関数ならば $g(x'Vx)$ は準凸関数である．

証明　いま $f(x)=x'Vx$ とおけば行列 V は分散共分散行列であるから非負確定であり，したがって $f(x)$ は凸関数となる．また凸関数は準凸関数でもあるから (16) 式により

$$f(\theta x^0+(1-\theta)x^1)\leqq max[f(x^0),\ f(x^1)]$$

を満す．この両辺を g の argument に入れると $g(t)$ は単調減少関数であるから

$$(19)\qquad g(f(\theta x^0+(1-\theta)x^1))\leqq g\,(max\ [f(x^0),\ f(x^1)])$$
$$=max[g(f(x^0)),\ g(f(x^1))]$$

となる．この関係は (16) 式を参照すれば $g(f(x))$ が準凸関数であることを示している．(**終**)

この定理1により今考えている certainty equivalence $v(x)=p'x-\frac{1}{2}g(x'Vx)$ は $g'\geqq 0$ であるならば準凹関数であることがわかった．したがって非線型計画

$$(20)\qquad \max\ v(x)=p'x-\frac{1}{2}g(x'Vx),$$
$$\text{subject to } Ax\leqq b,\ x\geqq 0$$

の最適解は $v(x)$ の局所的最大を与える解と一致するので，Kuhn-Tucker 定理によって得られる局所解が最適解となる．Lagrange 関数

$$F_I(x,\ y)=p'x-\frac{1}{2}g(x'Vx)+y'(b-Ax),$$
$$y'=(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_n)\geqq 0$$

とすると，Kuhn-Tueker 条件は

$$(21)\qquad \frac{\partial F_I}{\partial x_j}=p_j-(x'V)_j g'(x'Vx)-(y'A)_j\begin{cases}=0, & x_j>0,\\ \leqq 0, & x_j=0\end{cases}$$

$$(22)\qquad \frac{\partial F_I}{\partial y_i}=b_i-(Ax)_i\begin{cases}=0, & y_i>0,\\ \geqq 0, & y_i=0\end{cases}$$

となる．つぎに筆者が前にも示したと同様な手続をとる．すなわちいま2次計画

(23)　$$\max\ \lambda p'x-\frac{1}{2}x'Vx,$$

$$\text{subject to } Ax\leqq b,\ x\geqq 0$$

を考え，これに Kuhn-Tucker 条件をあてはめると，Lagrange 関数を

$$F_{II}(x,\ y)=\lambda p'x-\frac{1}{2}x'Vx+y'(b-Ax)$$

とおき

(24)　$$\frac{\partial F_{II}}{\partial x_j}=\lambda p_j-(x'V)_j-(y'A)_j\begin{cases}=0,\ x_i>0,\\ \leqq 0,\ x_j=0,\end{cases}$$

(25)　$$\frac{\partial F_{II}}{\partial y_i}=b_i-(Ax)_i\begin{cases}=0,\ y_j>0,\\ \geqq 0,\ x_i=0\end{cases}$$

となる．そこで前と同じ考察によりつぎの定理を得る．

〔**定理 2**〕　2 次計画

$$\max\ \lambda p'x-\frac{1}{2}x'Vx$$

$$\text{subject to } Ax\leqq b,\ x\geqq 0$$

を λ をパラメーターとして $x(\lambda)$ 解いたとする．このとき

(26)　$$1/\lambda=g'(x(\lambda)'Vx(\lambda))$$

を満す $\lambda=\lambda^*$ を決めると，非線型計画

$$\max\ v(x)=p'x-\frac{1}{2}g(x'Vx)$$

$$\text{subject to } Ax\leqq b,\ x\geqq 0$$

の最適解は $x(\lambda^*)$ で与えられる．（**終**）

この定理 2 により，$g'>0$ であるような任意の関数に対して certainty equivalence を目的関数とする非線型計画法の解を具体的に求めることができる．

文　献

（1）Arrow K. J., A. C. Enthoven, "Quasi-Concave Programming," Econometrica, vol. 29, pp. 779-800 (1961)

（2）Farrar D. E., *The Investment Decision Under Uncertainty*, Prentice-Hall,

Inc., 1962

(3) Kataoka S., "A Stochastie Programming Model, "Econometrica, vol. 31, pp 181-196 (1963)

(4) 片岡信二, "確率論的計画法における確率最大化モデルについて", 一橋大学研究年報, 自然科学研究 10, 1967

(5) Kataoka S., "Methodolgy for Planning and Decision-Making under Uncertainty," Jahrbuch der Wirtschaft Osteuropas Bd. 1, 1969, Osteuropa Institut, München, Deutschland (in printing)

(一橋大学教授)