[redacted]

K. J. アロー，M. ホッフェンベルグ

『産業連関需要の時系列分析』

Kenneth J. Arrow and Marvin Hoffenberg, *A Time Series Analysis of Interindustry Demands*, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959, pp. vi+289. [Contributions to Economic Analysis]

1　本書の概観

本書は R. Strotz, J. Tinbergen, P. J. Verdoorn, H. J. Witteveen の編集になる有名な Contributions to Economic Analysis の第 XVII 巻として刊行されたもので，研究それ自身は 1951 年から 1957 年に亘って RAND Corporation の仕事として行われ，これに参加したものは上記の Arrow と Hoffenberg のほか Harry Markowitz と Ronald Shephard とがいる。本書の内容は産業連関分析であるが，とくに投入係数の推定について新らしい問題を提起している。

本書の構成は，本論とも見るべきものが 8 章に分れ，附録として利用された統計資料の解説が行われている。そして本論と附録とがほぼ全巻を折半している。

まず第 I 章「序論」では産業連関分析の解説に続いて，最終需要の構成にいちじるしい変化を与えるものとして平時経済から戦争経済への推移が考えられている。このような問題がとくに取り上げられるのは，本書がさきに述べたように RAND Corporation の仕事の結果を集録したことから来る帰結であろう。また関税その他貿易上の制限に由来する対外経済政策の変更は，輸出と輸入との構成に変化を与え，これが引いては国民経済に影響を与えるが，このような分析は産業間の中間需要の分析を必要とする。このことは財政政策および貨幣政策によって景気の調整をする場合にもいえることを明らかにする。その他この章では生産函数の理論的・実証的研究が概観されている。

第 II 章から第 IV 章にわたっては，モデルの構成およびその統計的推定法の問題が論ぜられているが，これが本書の理論的な中核をなすものと考えられるので，あとでやや詳しく紹介しよう。

第 V 章以下は，この理論的モデルに時系列の統計資料を適用する問題であって，推測統計学的な手法によって綿密な計算を行っている。

2　モデル構成と統計的推定

本書は多くの興味ある問題を含んでいるが，そのなかでとくに，モデル構成とそのなかに含まれるパラメーターの統計的推定の問題および投入係数の推定にあたって線型計画法を適用する方法について紹介してみよう。

第 1 が産業連関モデルの構成であって，これは第 II 章から第 III 章にわたって取り扱われている。まず周知のオープン・モデルに誤差項 u_i を加えた次式

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+f_i+u_i \tag{2.4}$$

から出発する[1]。ここに x_i は商品 i を生産する部門のアウトプット，f_i はその最終需要であり，a_{ij} はいわゆる投入係数である。そこで a_{ij} の値は伝統的な方法に加えて，(4) 式におけるそれを x_i と f_i との時系列観察値から推定しようとする。(p. 19) この場合問題となるのは投入係数 a_{ij} の不変性 (invariance) ということであるが，これには予測の立場からと a_{ij} の使用目的という観点から吟味を要するものとし，この両者についての文献を紹介しながら，つぎの第 III 章においてモデル選択の問題に移る。

$a_{ij}(t)$ はつぎの線型函数で与えられるものとする。すなわち，それは 1 人あたり実質可処分所得 $y(t)$，個人

1)　式につけた番号の最初の数字は章の番号，つぎの数字は本書につけてある番号をあらわす。したがって，(2.4) は第 II 章の (4) の数式をあらわす。以下同様。

粗国民所得に対する国防支出の比$w(t)$，経常産出高に対するまえの最高ピークよりの超過高の比(ratio of excess over the highest previous peak to current output) $v_j(t)/x_j(t)$ および時間 t の線型函数であるとする。これを式であらわせば

$$a_{ij}(t)=b_{ij}+c_{ij}t+d_{ij}w(t)+e_{ij}y(t)+f_{ij}[v_j(t)/x_j(t)] \qquad (3.1)$$

ここに

$$v_j(t)=\begin{cases}0\ (s<t\ \text{に対して}\ x_j(t)<x_j(s)\ \text{の場合}\\ x_j(t)\ (\text{その他の場合であって，}\max_{s<t} x_j(s))\end{cases}$$

(2.4)式に(3.1)式を代入すれば

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j(t)t+\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_j(t)w(t)+\sum_{j=1}^{n}e_{ij}x_j(t)y(t)+\sum_{j=1}^{n}f_{ij}v_j(t)+f_i(t)+u_i(t) \qquad (3.2)$$

がえられる。これが本書において最終モデル(final model)と名づけるものである。

第Ⅳ章「統計方法」では(3.2)式を連立方程式法によってパラメーターを推定しようとする。いま(3.1)式に1947年の値を採用し，これを

$$\bar{a}_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\bar{t}+d_{ij}\bar{w}+e_{ij}\bar{y}+f_{ij}(\bar{v}_j/\bar{x}_j) \qquad (4.1)$$

とする。文字因数のうえの—はすべて1947年の値を示す。(3.10)式を(3.1)式から差し引き

$$a_{ij}(t)=\bar{a}_{ij}+c_{ij}(t-\bar{t})+d_{ij}[w(t)-\bar{w}]+e_{ij}[y(t)-\bar{y}]+f_{ij}\{[v_j(t)/x_j(t)]-(\bar{v}_j/\bar{x}_j)\} \qquad (3.11)$$

これを(3.4)式に代入し，そこで

$$c_{ij1}=c_{ij},\ c_{ij2}=d_{ij},\ c_{ij3}=e_{ij}$$

$$y_{j1}(t)=x_i(t)(t-\bar{t}),\ y_{j2}(t)=x_j(t)[w(t)-\bar{w}] \qquad (31.3)$$

$$y_{j3}(t)=x_j(t)[y(t)-\bar{y}],\ y_j(t)=v_j(t)-(\bar{v}_j/\bar{x}_j)x_j(t)$$

とおき，かつ実際のアウトプット x_i とその予測値 $\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_j+f_i$ との差 r_i〔これを constant-coefficient residual と名づける(p. 25)〕であらわし

$$r_i(t)=x_i(t)-\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_j(t)-f_i(t) \qquad (3.1)$$

とすれば，$r_i(t)$ は次式によってあらわされる。

$$r_i(t)=\sum_{k=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{n}c_{ijk}y_{jk}(t)+\sum_{j=1}^{n}f_{ij}y_j(t)+v_i(t) \qquad (3.14)$$

これは通常の線型方程式の形であって，このなかの c_{ijk} と f_{ij} の2つの係数を推定することが問題となる。この推定にあたってH. Theilの方法を採用するのであるが[2]，その方法が簡明に紹介されている。(pp. 48—55)

3 モデルの線型計画推定値

第2の問題は(3.11)式であらわされる $a_{ij}(t)$ の値が通常仮定せられるように非負でなければならないが，そのような a_{ij} を求めるにはどうすればよいかの点について，線型計画法を考えている。これは興味深い問題であると同時に，推定論に新らしい方法論を提供したものといえよう。(3.11)と(3.13)の両式から

$$0\leq\bar{a}_{ij}+c_{ij1}(t-\bar{t})+c_{ij2}[w(t)-\bar{w}]+c_{ij3}[y(t)-\bar{y}]+f_{ij}\{[v_j(t)/x_j(t)]-(\bar{v}_j/\bar{x}_j)\} \qquad (3.58)$$

でなければならない。

これからさきの分析は2つに分れるが，そのうち第1の場合として，$f_{ij}=0$，すなわち加速度変数$[v_j/x_j-\bar{v}_j/\bar{x}_j]$の項がない場合を取り上げて説明しよう。このとき(3.58)式は

$$a_{ij}(t,w,y)=\bar{a}_{ij}+c_{ij1}(t-\bar{t})+c_{ij2}(w-\bar{w})+c_{ij3}(y-\bar{y}) \qquad (3.59)$$

となるが，これは

$$a_{ij}(t,w,y)\geqq 0$$

という非負の条件にしばられる。このような場合の c_{ijk} の推定値の求め方としてつぎの方法を採用する。(a) (t_1, w_1, y_1) と (t_2, w_2, y_2) とが2つの可能な組とすれば，他の任意のconvex combinationが同様に可能であり，したがってここに可能な(t,w,y)の組の集合は凸集合となり，これはその頂点で定義される。(3.59)式は線型であることから，ある所与の頂点における非負の性質はそのすべてのconvex combinationについて非負を保証する。したがって充分に可能な端点を選ぶことができる。(b)実際に起った任意の組(t,w,y)がこの可能な組の集合に属する確実性は考えられることである。(c)可能な t の値の範囲は将来時点に向っても拡張することは多少可能である。(d) y はトレンドを持つものと思われる。そこで y の時間変化率を1929年から1950年までの実績から求めると1.52となる。(e) w の高い値においては完全雇用が期待されるから，そこでは y の範囲は狭くなろう。他方 w の低い値においては景気循環の様相があらわれるから，y の範囲は大きくなるであろう。そこで t が一定であるとすると，w と y との組合わせは3角形を形成すること

2) H. Theil, "Estimation and Simultaneous Correlation in Complete Equation Systems" および "R_s(k)-Estimation in Girshick's and Haavelmo's Model of the U. S. Food Market, 1922—1941" の2つの論文であるが，これらはともに *Mimeographed Memoranda of the Central Planning Office of the Netherlands*, 1953であって，われわれは現在これを見ることができない。なお本書では，この点についてTheil, "Estimation of Parameters of Econometric Models", *Bulletin of the International Statistical Institute*, Tome XXXIV, 2 d Part, 1954, pp. 3—10. を引用している。

が考えられる。この3角形はy軸に対してほぼ平行で，しかもその頂点はwの相当大きな値のところに来るであろう。(pp. 58—59)

この最後の3角形が(t,w,y)のtにある値をあてはめたときのクロス・セクションの形を与える。そこで$t=t_1$のとき$y=y_1$，$t=t_2$のとき$y=y_2$とすれば，(d)から

$$y_1-y_2=1.52(t_1-t_2)$$

がえられる。つぎに横軸に$w-\bar{w}$，縦軸に$y'-\bar{y}$ [$y'=y-1.52(t-\bar{t})$]をとった平面上でこの3角形の頂点を求めると

$w-\bar{w}$	$y'-\bar{y}$
40.74	16.74
−4.00	−23.57
−4.00	5.00

この値は1947年のクロス・セクションのグラフを示すものであるから，1929年と1965年とではさきのy'を使ってyだけを修正する。その結果は(1929年は$t-t'=-18$，1965年は$t-t'=18$)

	$t-\bar{t}$	$w-\bar{w}$	$y-\bar{y}$
A.	−18	40.74	−10.62
B.	−18	−4.00	−50.93
C.	−18	−4.00	−22.36
D.	18	40.74	44.10
E.	18	−4.00	3.79
F.	18	−4.00	32.36

(3.62)

となる。(3.62)の値を(3.59)式に代入すれば，つぎの6個の不等式がえられる。

A. $\bar{a}_{ij}-18c_{ij1}+40.74c_{ij2}-10.62c_{ij3}\geqq 0$

B. $\bar{a}_{ij}-18c_{ij1}-4.00c_{ij2}-50.93c_{ij3}\geqq 0$

C. $\bar{a}_{ij}-18c_{ij1}-4.00c_{ij2}-22.36c_{ij3}\geqq 0$ (3.63)

D. $\bar{a}_{ij}+18c_{ij1}+40.74c_{ij2}+44.10c_{ij3}\geqq 0$

E. $\bar{a}_{ij}+18c_{ij1}-4.00c_{ij2}+3.79c_{ij3}\geqq 0$

F. $\bar{a}_{ij}+18c_{ij1}-4.00c_{ij2}+32.36c_{ij3}\geqq 0$

そこでa_{ij}の推定にあたって，(3.63)式を条件式とするのであるが，この場合の目的函数は

$$\sum_{t\neq 1947}\left| x_i(t)-\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_j(t)-f_i(t)-\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}c_{ijk}y_{jk}(t)-\sum_{j=1}^{n}f_{ij}y_j(t)\right| \qquad (3.57)$$

であって，これを最小ならしめるようにする。ただし，(3.57)式は(3.1)および(3.14)式から導かれるものであって，その意味は実際値と予測値との開きの絶対値の和を最小にすることである。

4 む す び

すでに述べた如く，モデル構成およびその統計的推定において新らしい工夫が見られ，とくに投入係数の推定法は示唆に富んだものといえよう。ただ線型計画法を使ってa_{ij}の非負の条件を導くに際して行われた凸集合の仮定にはいまだ充分われわれを納得せしめるに足るだけのものとはいえない。とくに(c)においてtを将来時点まで拡張したとき標本点がなおこのような凸集合のなかにあるとする点には実際問題としては疑問の余地を残すものと考えられる。本書においても，この可能性が全面的に妥当することは主張せず，多少(somewhat)という言葉を使って譲歩している。(p. 58)これらの点に関しては将来さらに研究が続けられるであろう。

〔山 田 勇〕