[redacted]

ドーフマン，サムエルソン，ソロー
『線型計画法と経済分析』

Robert Dorfman, Paul A. Samuelson and Robert M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958, viii+527 pp.

1. は し が き

線型計画法が問題とされ出したのは戦後のことであるが，その発展は極めて顕著であって，しかも今日経済理論を研究するものにとっては不可欠の分析用具であるといっても過言ではないであろう。これがさらにT.C.コープマンスを中心とするコウルズ・コミションの研究グループによってアクティヴィティ・アナリシスもしくは活動分析(activity analysis)の名のもとにとくに経済理論への適用が考えられ出してからすでに7年を経過している[1]。今日線型計画法の名のもとに出版されている内外の著書はおびただしい数に上るにもかかわらずこれと経済分析との関係を徹底的に追求したものとしてはおそらく本書の右に出るものはなかろう。しかもその内容は出来うるかぎり平易に説明せられ，マトリックス算法に縁遠い読者にも親しむことが出来るように配慮されている。

3人の著者のうちドーフマンはいうまでもなく線型計画法そのものに最も多く貢献した学者の1人であり，またサムエルソンは経済学者としての貫録充分であり，最後のソローは将来サムエルソンの衣鉢を継ぐ少壮学者として嘱望せられている点を考えれば，線型計画法と経済分析とを問題とする本書こそは最適の陣容をえたものということができよう。

本稿では，まず浩瀚な本書の内容を素描し，そのあとで若干の読後感を述べることとする。

4)　本文でのべた実例のほかに，生産的労働の概念規定にかんする論争(SS. 24—47)とか，外国貿易と国民所得との関連にかんする短かい示唆(SS. 126—132)，さらにこまかい点をいうと，社会主義的には再分配はないというボールの説の紹介と批判(S. 141)などあるが，それらの吟味はここでは省略しておく。

1)　T.C. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, 1951.

2. 歴 史 的 背 景

まず緒論において線型経済学(linear economics)という新らしい言葉が登場して，注目を浴びる。ここに「線型」という用語をあえて導入したのは，厚生経済学や生産の理論に見られるような基本的条件式はすべての数学的な函数のうち一番簡単な線型の形をとることに，とくに注意を向けるためであるとする。このような線型経済学のうち一番早く問題とされたものは1928年におけるノイマンの「社会遊戯論[2]」であり，これが1944年ノイマン，モルゲンシュテルンによる『ゲームの理論』[3]となったことは周知のところであろう。

線型経済学の第2の発展は「投入産出分析」である。その先駆者レオンチエフが最初に所説を発表したのは1936年であるが[4]，その考え方は1930年当時に遡る。しかし当初はいわゆるclosed modelであって，今日一般に使用せられるopen modelへ移行したのは戦争直後のことであり，ここにおいて投入産出分析と線型計画法との密接な関係が論ぜられるにいたった。

線型経済学の第3の分科が本書に全面的に展開される線型計画法である。この方法はダンチヒによって1947年アメリカ空軍の作戦活動の計画に初めて用いられたものである[5]。空軍計画における目標と作戦活動との間の関係はちょうどレオンチエフ模型における最終生産物と産業部門の産出物との間の関係に類似している。線型計画法は2つの応用面を持つ。そのうちの1つが企業経営への応用であり，他が経済理論への応用であって，前者はカーネギー工科大学のグループ，後者はコープマンスのグループによって展開せられた。

3. 本 書 の 内 容

緒論に次いで第2章「線型計画法の基本的概念」では，栄養食問題と国際経済の2つの例によって線型計画法がいかに応用せられるかを説明し，第3章「評価の問題，市場問題の解法」では，経済量の有効な配分の問題と評価の問題(problem of valuation)とが表裏の関係にあることを示す。次いで第4章「線型計画法の代数」でその数学的形式化と解法とを取り扱う。

いま栄養食問題を例にとり，n個の相異る食品$X_1, \cdots,$

2)　John von Neumann, Zur Theorie der Gesellschatsspiele, *Mathematische Annalen*, Vol. 100, 1938.

3)　John von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944.

4)　Wassily W. Leontief, Quantitative Input and Output Relation in the Economic System of the United States, *Review of Economic Statistics*, Aug. 1936.

5)　G. B. Dantzig, Maximization of a Linear Function fo Variables Subject to Linear Inequalities, *Activity Analysis of Production and Allocation*, ed. by T. C. Koopmans, 1951.

X_n と m 個の相異る栄養素とをとり，a_{ij} をもって第 j 番目の食品1単位中に含まれる第 i 番目の栄養素の分量とする。そこで主婦が X_i 食品を x_i だけ購入するものとすれば，この主婦の購入する第 $1, 2, \cdots, m$ 番目の栄養素の分量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &\equiv a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

となる。ところで，この主婦の家族が必要とする m 個の栄養素の分量をそれぞれ $c_1, c_2, \cdots, c_m$ とすれば，つぎの不等式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq c_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq c_m \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

この際 x が経済的に意味を持つためには

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \qquad (2)$$

であることが必要である。いま n 個の食品の価格をそれぞれ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とすれば，この家族の食費 z は

$$z = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n \qquad (3)$$

となり，主婦はこのような食費を最小ならしめるように努めるであろう。そこで問題は，(1)，(2) の条件のもとに (3) を最小にするような $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求めることにある。これが線型計画法の基本的な性格であって，しかも経済行動が，ある種の条件のもとにその目的とする経済量の最大，最小値を求めることにあり，しかも経済諸量の関係が線型で考えられるかぎり，線型計画法は，従来の伝統的な極値解法に代って，有効かつ実際的な方法であるということになる。何となれば，ここでは，従来の解法が無視した(2)の「非負の条件」(non-negativity condition) を陽表的に考慮するからにほかならない。

以上を「本来の問題」(original problem) とすれば，これに対して「双対の問題」(dual problem) が考えられる。すなわち，いまの(1)，(2)，(3)に対して

$$\left.\begin{aligned} a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m &\leq P_1 \\ a_{12}u_1 + \cdots + a_{m2}u_m &\leq P_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m &\leq P_n \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

$$u_1, u_2, \cdots, u_m \geq 0 \qquad (2a)$$

の条件を満足する

$$w = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m \qquad (3a)$$

の最大値を求める問題である。「本来の問題」では $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が未知数であり，他がすべてパラメーターであるのに対して，「双対の問題」では $u_1, u_2, \cdots, u_m$ が未知数であり，他がすべてパラメーターである。ここで重要なことは，「本来の問題」が解を持つならば，「双対の問題」も必ず解を持つということである。

第5章「輸送の問題」，第6章「企業の線型計画法による分析」，第7章「企業への応用，評価と双対の問題」はともに線型計画法の応用面の解説である。第8章は非線型計画法(non-linear programming)の簡単な解法が述べられ，その際重要なファルカス (Farkas) の定理が紹介されている。非線型の経済的意味は，売上高と売上数量とが線型をなすような完全競争の状態にない企業の問題を分析することにある点を，本書は強調している。

3. 投入産出分析と資本蓄積の有効計画

経済学を専攻するものがおそらく本書から期待すると思われる果実はつぎの4章からえられるであろう。すなわち第9章「静学的レオンチエフ体系」，第10章「その続き」，第11章「線型モデルの動学的局面」，第12章「資本蓄積の有効計画」がこれであり，前2章では投入産出分析の静学的な open model が線型計画法によって手際よく述べられ，とくに第9章では，各経済部門の生産物に対してインプットのただ1つの組合わせが存在するという，いわゆる「レオンチエフの最強仮定」が証明されている。後2章では，前章の静学モデルの動学化を取り上げ，中間財と最終財の在庫がこの最強仮定を否定して上述の組合せの選択を不可避ならしめ，資本蓄積の有効径路について新らしい結果を導いている。

線型計画法の見地から，第 13 章「線型計画法と一般均衡理論」ではワルラス体系を吟味し，第 14 章「線型計画法と厚生経済学」では厚生経済学の基本定理を導出する。最後の2章すなわち第15章「ゲームの理論要説」，第 16 章「線型計画法とゲームの理論との関係」によって本書が結ばれている。

5. む　す　び

本書の特色を要約すれば，経済理論に線型計画法をいかに応用するかを実例をもって初等的に解説したものということができよう。そのために，第2章から第7章までの部分には重複したところが多い。また数学的な厳密性を求める読者からは，条件が不完全であるという非難を浴びるかも知れない。しかし本書のいま述べた特色を考え合わせれば，かえって経済学徒のためには，この方が理解し易い。以上のような意味で本書の価値を高く評価するに吝さかではない。　〔山田　勇〕

[redacted]