《研究ノート》

ゲンツェンの定理と高階の述語論理

永島　孝

記號論理學に於ける重要な成果の一つに、ゲンツェンの基本定理がある。ゲンツェンは〔二〕に於いて第一階の古典述語計算の體系LK（及び第一階直觀主義述語計算の體系LJ）を提出し、證明可能な命題[1]は三段論法[2]なしで證明可能（卽ち「三段論法」の推論を含まぬ證明が存在する）であると云ふ「基本定理」を證明した。この基本定理を用ゐて種々の公理系の無矛盾性をはじめ、補間定理〔一〕、〔一四〕、〔一二〕などの諸結果が得られる。ゲンツェン自身、基本定理を用ゐて第一階の自然數論から數學的歸納法の公理を除いた系の無矛盾性を證明してゐる〔二〕。

一方、第一階の自然數論の無矛盾性は、基本定理の直接の適用のみによっては證明できない[3]が、新しい方法による證明がゲンツェンによって發表され、更に三つの別證明がアッケルマン、ゲンツェン、ゲーデルによって得られた。ゲンツェンの第二の證明〔三〕はLKを用ゐた美しい證明である。第一階の自然數論の公理系のうち數學的歸納法の公理系は推論法則として、その他の公理系は論理記號を含まぬ命題として、それぞれLKに添加した體系を考へる。その體系に對する一種の還元手續を定義し、超限歸納法によって、矛盾に到る證明の不存在を示すのが彼の方法である。この方法は自然數論の無矛盾性の證明のために有効であったのみならず記號論理學に於ける諸問題を解決する方法に影響を與へたのである。例へば竹內の基本予想（後述）に關する幾つかの部分的結果が同樣な方法で得られた。難波〔一一〕が補集合の概念を含まない集合論についてのスコーレムの結果を改良したのもゲンツェンと同樣な方法による結果である。更に、前原〔九〕はゲンツェンの方法を用ゐて所謂スコーレムの逆理の、セマンティクスによらない證明を得た。

第一階の自然數論の無矛盾性につづく問題は解析學の無矛盾性、卽ち高階の述語論理[4]に於ける自然數論の無矛盾性であらう。竹內〔一一〕はLKを高階の述語計算GLC[5]に擴張し、GLCについてもLKの基本定理に對應する定理「GLCで證明可能な命題はGLCで三段論法を用ゐずに證明可能」が成立するであらうと云ふ基本予想FC[6]を提出した。後に述べるやうに、FCを假定すれば解析學などの無矛盾性が構成的に導かれるのである。從って若しFCを構成的に證明できたとすれば解析學の無矛盾性が示されたことになる。

FCを構成的に證明しやうと云ふ困難な問題[7]に對し、ゲンツェン〔二〕、〔三〕に類似の方法をはじめ新たな方法が開發され、部分的な結果が得られた。卽ち種々の特別な場合[8]にFCの成立

することが構成的に證明され、[9]更にその應用として解析學の部分系などの無矛盾性が證明された。[10]また、ゲーデルによるＦＣの反例案は、實は反例にはならないことが示された。[11]

他方、ＦＣの成立するための必要十分條件を求める試み、[12]非構成的方法による部分的な結果などの後、[13]つひに、高橋によってＦＣの非構成的證明が得られたのである。[14]彼の證明にはシュッテ〔一六〕の賦値、ヘンキン〔六〕の一般モデルの概念が用ゐられる。ある命題が三段論法なしでは證明不可能とすると、その命題を僞とするやうな準賦値が存在する。この準賦値をもとにして一般モデルをつくり、與へられた命題を僞とするやうな全賦値を得る。故にその命題は證明不可能なものである。と云ふ方針で、ＦＣが證明される。それはツェルメロの集合論Ｚの内部において實行可能な證明である。

斯くて基本予想は提出後十餘年を經て肯定的に解決されたのであるが、同時にＦＣの一つの限界が明らかとなった。ＦＣが種々の無矛盾性證明に有效であるにも拘らず、我々はＦＣによって集合論の無矛盾性を示すことは斷念せざるを得ない。若しＦＣから集合論Ｚ（況やＺＦ）の無矛盾性が（Ｚの内部において許される論法を以て）導かれたとすれば、高橋の結果と併せて、直ちにゲーデルの定理に反することになるから[15]である。

さて、ＦＣから解析學の無矛盾性が構成的に導かれることを[16]證明しやう。即ち、次の定理を證明する。

定理。ＦＣが成立すれば自然數論の公理系はＧＬＣにおいて無矛盾である。

自然數論の公理系のうち、數學的歸納法の公理のみがその冠頭に單項述語變數を束縛する第二階の全稱作用素を一個もつ第二階の公理であり、[17]他は第一階の公理であると考へてよい。そこで次の二つの補助定理を證明すればよい。

補助定理一。數學的歸納法なしの自然數論がＧＬＣにおいて無矛盾ならば、（數學的歸納法を含む）自然數論がＧＬＣにおいて無矛盾である。

補助定理二。ＦＣが成立すれば、數學的歸納法なしの自然數論はＧＬＣにおいて無矛盾である。

補助定理一は〔二一〕の定理七・二二である。即ち、それは竹内の相對化の理論[18]によって得られる。

補助定理二の證明。歸納法なしの自然數論がＧＬＣにおいて矛盾してゐると假定する。それは歸納法なしの自然數論から矛盾に到るＧＬＣにおける證明圖の存在を意味する。その證明圖の最終の命題[19]は、その左邊[20]に自然數論の公理（但し歸納法を除く）を表はす式[21]（それらは全て閉ぢた[22]第一階の式である）が並び、またその右邊[23]は空である。ＦＣが假定されてゐるから、同じ命題を最終にもつ三段論法なしの證明圖が存在する。[24]この證明圖について考へやう。そこに現れる推論はＧＬＣの推論のうち三段論法以外のものである。最終の命題が第一階[25]の式のみから成るので、個々の推論圖の形を檢討することにより、[26]この證明圖に現れる式は全て第一階の式に限ることがわかる。從ってこれはＬＫの證明圖になってゐる。故に歸納法なしの自然數論がＬＫにおいて矛盾してゐる。このことは前述のゲンツェンの

定理[27]に反する。故に、歸納法なしの自然數論はＧＬＣにおいて無矛盾である。證明終り。

以上の證明をみると、自然數論の無矛盾性を一旦、歸納法なしの自然數論の無矛盾性に還元してからＦＣを適用する、と云ふ方針によってゐるが、これは何故であらうか。直接に、(歸納法を含む) 自然數論から矛盾が導かれたと假定してその證明圖にＦＣを適用する、と云ふ方針で證明できないのであらうか？　この問題を考へてみる。先づ、最終の命題の左邊は自然數論の公理、右邊は空であるやうなＧＬＣにおける證明圖を考へ、これにＦＣを適用して三段論法を除去する。その結果の證明圖について考へても、終の命題の左邊に歸納法の公理があるために、證明圖の内部構造に關して (例へばそこに現れる全ての式が一定階數以下のものであると云ふやうな性質を) 殆ど知ることが出來ないのである。第二に、いま考へてゐるやうな、終の命題の左邊に數學的歸納法の公理をもつ證明圖――實は、數學的歸納法に限らずある種の第二階の公理、例へば「全ての命題は排中律をみたす」と云ふ公理、を終の命題の左邊にもつ證明圖[28]――については、ＦＣの成立することが殆ど自明なのである。このやうな場合にＦＣが成立つことの證明は第一階の自然數論の内部において容易に實行し得るものであり、從って (ゲーデルの定理によって) このやうな場合についてのＦＣから自然數論の無矛盾性など到底導き出し得ないのである。斯かる理由によって、問題の公理系を先づ第一階のものに還元して後はじめてＦＣを適用すると云ふ方針をとらざるを得なかったのである。

ＦＣが時には解析學の無矛盾性を含むほど強く、また時には殆ど無力となってしまふ、と云ふ不安定さを示すのは何故であらうか。それを考へるにはゲンツェンの基本定理について反省してみることが必要であらう。ＦＣは基本定理の如何なる擴張であったのかをあらためて考へねばなるまい。基本定理もＦＣも三段論法の除去、「證明可能ならば三段論法なしで證明可能」として知られてゐる。然し、基本定理の内容はこれで云ひ盡くされてはゐない。基本定理の眞の意味はゲンツェンの論文の内容や基本定理のいろいろな應用を再檢討することによって理解できるであらう。證明圖から三段論法が如何にして除去され、その結果得られた證明圖が如何なる性質をもつものか、と云ふ點まで含めて基本定理の内容を考へるべきであらう。先づ三段論法を含まぬ證明圖の性質を考へる。三段論法のない證明圖に現れる式は最終の命題に含まれる式の部分式[29]に限る、と云ふ性質[30]がある。三段論法のない證明圖はつねに簡單なものから複雜なものに向かって推論を重ねてゆく證明、證明のすぢみちに沿って命題の複雜さが單調に增加してゆくやうな證明であり[31]、基本定理の應用においてこの事實が有效なのである。これに反してＧＬＣの場合は三段論法以外の推論と雖も前提が結論より簡單であるとは限らないから、三段論法が除去されてゐても複雜さについての單調性は一般に成立たないのであり[32]、これが前述のやうな不安定さの原因となるのである。次に、三段論法が如何にして除去されるかを考へる。ゲンツェンによる基本定理の

證明は、與へられた證明圖から三段論法を除去するアルゴリズムを定めることによって構成的に行はれる。制限つきのＦＣを構成的に證明しやうとするときも、同樣に三段論法除去のアルゴリズムをつくるのである。卽ち、一定の手續に從って證明圖を變形してゆくと、必ず三段論法なしの證明圖に到達するやうに、その手續を考へ出すのである。これに對し、ＦＣの非構成的證明は證明圖變形のアルゴリズムではないから、證明可能な命題に對して三段論法なしの證明圖の存在が云へるのみであって、その證明圖の構造が與へられた證明圖の構造と如何なる關係をもつのか知ることはできないのである。

更に基本定理について考へやう。基本定理はＬＫにおいて三段論法が不要である事を意味するものではない[33]。寧ろ三段論法の除去できることが保證されてゐるのであるから、證明圖をつくる時に三段論法は自由に用ゐてよいのである。また、基本定理がＬＫと云ふ系に固有の結果であって第一階の古典述語論理に關する一般的な定理でないと考へるのは誤解であらう。第一階の古典述語計算の種々の系における證明圖をＬＫの證明圖に變換するアルゴリズムが得られてゐるからである[34]。

第一階の述語計算[35]における證明圖が與へられたとき、これを複雜さが單調に增加するやうな證明圖――つねに簡單なものから複雜なものへと推論をすすめてゆく證明圖――に變形することができる、と云ふことがゲンツェンの偉大な發見の內容であると筆者は信ずる。高階の論理への擴張を考へる時はこのことを考慮すべきであり、また、高階の論理への擴張などを通じての反省により、基本定理の內容について理解を深めることができるのである。

注

（0）本稿は、作行會の援助によって開催された數學基礎論小グループ第二回夏期セミナー（一九六七年六月、於神奈川縣三浦市。「數學」第二十卷第三號一七三頁參照）に於ける講演の內容の一部分をまとめたものである。

（1）「命題」は正しくは命題のＬＫに於ける形式的表現、卽ち Sequenz と呼ぶべきものであるが、適當な譯語がないので、本稿に於いては誤解の恐れのない限り Sequenz のことを命題と記すことにする。

（2）Schnitt. ゲンツェン〔二〕。

（3）この事實はゲーデル〔四〕の定理から導かれる。

（4）單純な（卽ち非分岐の）型の論理。

（5）無限公理、選擇公理はこの系に含まれない。高階の述語論理を考へると云っても、論理から數學を導き出さうと云ふのではないから、無限公理などを論理系に含めておく必要はなからう。尙、ＧＬＣには高階の述語が獨立變數としてとり得る述語の型は單項型のものに限る、と云ふ制限があるが、〔一一〕の議論はこの制限を除いても成立する（大芝〔一四〕）。

（6）Fundamental Conjecture.

（7）その困難さはゲーデルの定理から當然、予想されることである。曾てはＦＣの眞僞さへも予想し難く、證明が試

みられる一方、反例案もいくつか提出された。

(8) 高階の限定作用素に關する推論の形に對するいろいろな制限を設けた場合など。

(9) 竹內〔二二〕、〔二三〕、〔二四〕、〔二五〕、〔二六〕、〔二八〕、〔二九〕、〔三〇〕の他、幾人かの結果がある。尙、GLC(又はその部分系)以外の系に關しても、前原〔一〇〕、難波〔一二〕等、類似の結果がある。

(10) 竹內〔二二〕(第一階の自然數論の無矛盾性の別證明)、〔二八〕、〔三〇〕、〔三一〕(解析學の部分系の無矛盾性)、紀〔七〕(アッケルマンの順序數論の無矛盾性)、花谷〔五〕(原始歸納的汎函數の計算可能性)など。

(11) 竹內〔二九〕。ゲーデルの提出した命題はGLCにおいて三段論法を用ゐずに證明可能なることが、構成的な方法で確かめられた。

(12) シュッテ〔一六〕、千谷〔三二〕。

(13) 赤・前原・西村〔一七〕。第一階の命題(LKの命題)がGLCで證明可能ならば、それは三段論法を用ゐずに證明可能である。

(14) 高橋〔一八〕、〔一九〕、〔二〇〕。尙、この結果を以て解析學の無矛盾性が證明されたと考へるべきでないことは云ふまでもない。

(15) 實際、以下の議論は第一階の自然數論の內部において行ひ得るものと考へられる。それを確かめるためには通常の方法による算術化を實行すればよいのである。

(16) この事實は〔二一〕の序文に證明なしに述べられてゐる。證明は〔二七〕に發表されてゐるが、十分に知られてはゐないと思はれるので、ここに再び述べる。

(17) 等號の公理に關する問題は省略する。〔二一〕第七節參照。

(18) Restriction theory. 〔二一〕第七節參照。

(19) 卽ち證明された命題。Endsequenz.

(20) Antezedens.

(21) 論理式 (Formel) を略して式と呼ぶ。

(22) 自由變數を含まない、と云ふ意味。

(23) Sukzedens.

(24) ここで、大芝〔一四〕の結果により、一般性を失ふことなくGLCは高階の函數記號を含まぬものと假定することが許される。

(25) 實は限定作用素に關する推論、そのうちでも全稱左邊と存在右邊についてのみ調べれば十分であらう。

(26) 嚴密には推論の個數についての歸納法による。

(27) 〔二〕第二部、基本定理の精密化の應用。

(28) 例へば〔二九〕にはこれに類する例が見られる。別の例がシュッテ〔一六〕の第一節に證明なしに述べられてゐる。筆者の知る限りでは、一般論が扱はれたことはない。

(29) Teilformel.

(30) ゲンツェンはこれを Teilformeleigenschaft と名づけてゐる〔二〕。

(31) 何故ならば、三段論法以外のLKの推論の各々が、前提は結論よりも簡單、と云ふ性質をもつ。

(32) GLCについて、複雜さが單調增加するやうな證明圖が得られるか、と云ふ問題はFCとは別の問題である。ゲーデルによるFCの反例案〔一九〕は寧ろこの問題に對する反例となるものであらうと思はれる。

(33) 三段論法が不要でないことについては〔一一〕一四八頁參照。

(34) 〔二〕第二部。

(35) LKに限らず、NKでもヒルベルト流の系でもよい。

文献

〔一〕 Craig, W., Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem. *J. Symbolic Logic* **22** (1957), 250—268.

〔二〕 Gentzen, G., Untersuchungen über das logische Schliessen I, II. *Math. Z.* **39** (1934—5), 176—210, 405—431.

〔三〕 Gentzen, G., Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, neue Folge* **4** (Leipzig, 1938), 19—44.

〔四〕 Gödel, K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatsh. Math. Phys.* **37** (1930), 173—198.

〔五〕 Hanatani, Y., Calculabilité des fonctionnelles récursives primitives de type fini sur les nombres naturels. *Ann. Japan Assoc. Philos. Sci.* **3** (1966), 19—30.

〔六〕 Henkin, L., Completeness in the theory of types. *J. Symbolic Logic* **14** (1950), 81—91.

〔七〕 Kino, A., A consistency-proof of a formal theory of Ackermann's ordinal numbers. *J. Math. Soc. Japan* **10** (1958), 287—303.

〔八〕 Kleene, S. C., *Introduction to metamathematics.* (Amsterdam, Groningen, Toronto and New York, 1952).

〔九〕 Maehara, S., Another proof of Takeuti's theorems on Skolem's paradox. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.* I, **7** (1958), 541—556.

〔一〇〕 Maehara, S., Cut-elimination theorem concerning a formal system for ramified theory of types which admits quantifications on types. *Ann. Japan Assoc. Philos. Sci.* **2** (1962), 55—64.

〔一一〕 前原昭二、數理論理學序說。(東京、一九六六)。

〔一二〕 Namba, K., On a comprehension axiom without negation. *Ann. Japan Assoc. Philos. Sci.* **2** (1965), 258—271.

〔一三〕 Nagashima, T., An extension of the Craig-

Schütte interpolation theorem. *Ann. Japan Assoc. Philos. Sci.* **3** (1966), 12—18.

〔一四〕 Oshiba, T., On elimination of function-types of GLC. *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli* **10** (1962), 75—109.

〔一五〕 Schütte, K. Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik. *Math. Ann.* **148** (1962), 192—200.

〔一六〕 Schütte K., Syntactical and semantical properties of simple type theory. *J. Symbolic Logic* **25** (1960), 305—326.

〔一七〕 Seki, S., Maehara, S. and Nishimura, T., Non-constructive proofs of a metamathematical theorem concerning the consistency of analysis and its extension. *Ann. Japan Assoc. Philos. Sci.* **1** (1960), 269—288.

〔一八〕 Takahashi, M., A proof of cut-elimination theorem in simple type theory. *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 399—410.

〔一九〕 Takahashi, M., Simple type theory of Gentzen style with the inference of extensionality. *Proc.Japan Acad.* **44** (1968), 43—45.

〔二〇〕 高橋元男、Simple type theory について。数學二〇（一九六八）、一二九—一四一。

〔二一〕 Takeuti, G., On a generalized logic calculus. *Japan. J. Math.* **23** (1953), 36—96; Errata to 'On a generalized logic calculus'. *Japan. J. Math.* **24** (1954), 149—156.

〔二二〕 Takeuti, G., On the fundamental conjecture of GLC I. *J. Math. Soc. Japan* **7** (1955), 249—275.

〔二三〕 Takeuti, G., On the fundamental conjecture of *GLC* II. *J. Math. Soc. Japan* **7** (1955), 394—408.

〔二四〕 Takeuti, G., On the fundamental conjecture of *GLC* III. *J. Math. Soc. Japan* **8** (1956), 54—64.

〔二五〕 Takeuti, G., A metamathematical theorem on functions. *J. Math. Soc. Japan* **8** (1956), 65—78.

〔二六〕 Takeuti, G., On the fundamental conjecture of GLC IV. *J. Math. Soc. Japan* **8** (1956), 145—155.

〔二七〕 Takeuti, G., Remark on the fundamental conjecture of *GLC*. *J. Math. Soc. Japan* **10** (1958), 44—45.

〔二八〕 Takeuti, G., On the fundamental conjecture of *GLC* V. *J. Math. Soc. Japan* **10** (1958), 121—134.

〔二九〕 Takeuti, G., An example on the fundamental conjecture of *GLC*. *J. Math. Soc. Japan* **12** (1960), 238—242.

〔三〇〕 Takeuti, G., On the fundamental conjecture of GLC. VI. *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 440—443.

〔三一〕 Takeuti, G., Consistency proofs of subsystems of classical analysis. To appear.

〔三一〕 Titani, S., An algebraic formulation of cut-elimination theorem. *J. Math. Soc. Japan* **17** (1965), 72—83.

（一橋大學專任講師）