《研究ノート》

ある種の同質的マルコフ過程の確率母関数について

磯　野　　修

時間について同質な，非負の整数値をとるマルコフ過程について，ある時点における確率母関数が簡単な積の形で表わされるとき，異時点変量の結合確率母関数に関する漸化式を示す．時間変数は，$[0, \infty)$ の上の連続型，非負整数値をとる離散型のいずれでもよい．

時間について同質なマルコフ過程において，時点 t における変量が m 次元行ベクトル $X(t)$ で示され，その第 j 元 $(j=1, 2, \cdots, m)$ を $X_j(t)$ とするとき，これらは非負の整数値をとるものとする．

r を任意の自然数とし，$0<t_1<t_2<\cdots<t_r$ を満たす r 個の時点 $t_i(i=1, 2, \cdots, r)$ を考える．$a_j(j=1, 2, \cdots, m)$ を非負整数とするとき，初期状態が行ベクトル $a=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ で示される場合の，$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_r)$ の結合確率母関数を F_r と書く．すなわち，$i=1, 2, \cdots, r$；$j=1, 2, \cdots, m$ に対して，n_{ij} は非負整数値をとる変数，z_{ij} は絶対値が1を越えない実数値をとる変数とするとき，行ベクトル $n_i=(n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{im})$，$z_i=(z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{im})$ を使って，

$$F_r(z_1, z_2, \cdots, z_r ; t_1, t_2, \cdots, t_r|a)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{n_i} P\Big(\bigcap_{i=1}^{r}(X(t_i)=n_i)|X(0)=a\Big)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{m} z_{ij}^{n_{ij}} \qquad (1)$$

と書く．右辺の $\sum_{n_i}$ は，ベクトル n_i の可能な値すべてについての総和を示す．

時間について同質なマルコフ過程であるから，

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{r+1}(X(t_i)=n_i)|X(0)=a\Big)$$

$$=P(X(t_1)=n_1|X(0)=a)P\Big(\bigcap_{i=2}^{r+1}(X(t_i)=n_i)|X(t_1)=n_1\Big)$$

$$=P(X(t_1)=n_1|X(0)=a)P\Big(\bigcap_{i=2}^{r+1}(X(t_i-t_1)=n_i)|X(0)=n_1\Big)$$

が成立する．これを使って，(1) から

$$F_{r+1}(z_1, \cdots, z_{r+1} ; t_1, \cdots, t_{r+1}|a)=\sum_{n_1} P(X(t_1)=n_1|X(0)=a)$$

$$\times F_r(z_2, z_3, \cdots, z_{r+1} ; t_2-t_1, t_3-t_1, \cdots, t_{r+1}-t_1|n_1)\prod_{j=1}^{m} z_{1j}^{n_{1j}} \qquad (2)$$

が出る．

以下では，F_1 が

$$F_1(z_1 ; t_1|a)=f(z_1 ; t_1)\prod_{j=1}^{m}\{f_j(z_1 ; t_1)\}^{a_j} \qquad (3)$$

という積の形で表現される場合について考える．

（2）で $r=1$ とおき，（3）を使えば，

$$F_2(z_1, z_2\,;\, t_1, t_2|a)=f(z_2\,;\, t_2-t_1)F_1(z_1{}^*\,;\, t_1|a) \qquad (4)$$

を得る．ただし

$z_1{}^*=(z_{11}f_1(z_2\,;\, t_2-t_1), z_{12}f_2(z_2\,;\, t_2-t_1), \cdots, z_{1m}f_m(z_2\,;\, t_2-t_1))$

であって，$z_1{}^*$ の各元の絶対値は1を越えることができないから，（4）を成立させる z_1, z_2 の変域は，それだけ狭められる．そのような変域が存在するか否かは，（3）の右辺に現われる f_j の形によって決まる．以下では，（4）が意味をもつ場合について考える．

2つのm次実数行ベクトル

$$u=(u_1, u_2, \cdots, u_m), \qquad v=(v_1, v_2, \cdots, v_m)$$

の関数 ψ を，次の式によって定義する．

$$\psi(u, v\,;\, t_{r+1}-t_r)=(u_1f_1(v\,;\, t_{r+1}-t_r), \\ u_2f_2(v\,;\, t_{r+1}-t_r), \cdots, u_mf_m(v\,;\, t_{r+1}-t_r)) \qquad (5)$$

これを使えば，

$$z_1{}^*=\psi(z_1, z_2\,;\, t_2-t_1) \qquad (6)$$

と書くことができる．

（4）右辺の F_1 に対して（3）の分解式を代入し，（2）で $r=2$ とおいたものを考えれば，次の式を得る．

$$F_3(z_1, z_2, z_3\,;\, t_1, t_2, t_3|a) \\ =f(z_3\,;\, t_3-t_2)f(z_2{}^*\,;\, t_2-t_1)F_1(z_1{}^{**}\,;\, t_1|a) \qquad (7)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} z_2{}^*&=\psi(z_2, z_3\,;\, t_3-t_2), \\ z_1{}^{**}&=\psi(z_1, z_2{}^*\,;\, t_2-t_1) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ここでも，$z_1{}^{**}$，$z_2{}^*$ の各元の絶対値が1を越えないような変域の存在を仮定している．

同じような推論を繰り返すことによって，次の結果を得る．r を任意の自然数とするとき，

$$F_{r+1}(z_1, \cdots, z_{r+1}\,;\, t_1, \cdots, t_{r+1}|a)=f(z_{r+1}\,;\, t_{r+1}-t_r) \\ \times f(z_r{}^*\,;\, t_r-t_{r-1})\cdots f(z_2{}^{\overbrace{*\cdots*}^{r-1}}\,;\, t_2-t_1)F_1(z_1{}^{\overbrace{*\cdots*}^{r}}\,;\, t_1|a) \qquad (9)$$

ただし，$i=1, 2, \cdots, r$ に対して，

$$z_i{}^{\overbrace{*\cdots*}^{r-i+1}}=\psi(z_i, z_{i+1}{}^{\overbrace{*\cdots*}^{r-i}}\,;\, t_{i+1}-t_i) \qquad (10)$$

であって，(10) の各元の絶対値が1を越えないような変域が存在するものと仮定する．

以下，簡単な実例を示す．

（イ）　ポアソン過程

瞬間的生起率 λ のポアソン過程で，$m=1$, $X_1(t)$ は時点 t までの生起回数とする．1次元ベクトルであるから，ベクトルの成分を示す添字を省略することにすれば．a を非負整数とするとき，

$F_1(z_1\,;\, t_1|a)=z_1{}^a\exp\{\lambda t_1(z_1-1)\}$ であり，

$f(z_1\,;\, t_1)=\exp\{\lambda t_1(z_1-1)\}, \qquad f_1(z_1\,;\, t_1)=z_1$

とすれば．（3）の分解式が成立する．（4）（6）から

$z_1{}^* = z_1 z_2,$

$$F_2(z_1, z_2\,;\, t_1, t_2 | a) = (z_1 z_2)^a \exp[\lambda\{(t_2 - t_1)(z_2 - 1) + t_1(z_1 z_2 - 1)\}]$$

を得る．一般には，（9）（10）から

$$F_r(z_1, \cdots, z_r\,;\, t_1, \cdots, t_r | a) = (z_1 z_2 \cdots z_r)^a \exp[\lambda\{(t_r - t_{r-1})(z_r - 1) + (t_{r-1} - t_{r-2})(z_r z_{r-1} - 1) + \cdots + t_1(z_1 z_2 \cdots z_r - 1)\}]$$

が出る．

（ロ） 分裂過程

$m=2$, $X_1(t)$=時点 t における個体数，$X_2(t)$=時点 t までの累積個体数，初期状態 $a=(a_1, a_2)$ について $1 \leqq a_1 \leqq a_2$ とすれば，

$$F_1(z_1\,;\, t_1 | a) = \sum_{n_{11}} \sum_{n_{12}} P(X_1(t_1) = n_{11} \cap X_2(t_1) = n_{12} | X_1(0) = a_1 \cap X_2(0) = a_2) z_{11}{}^{n_{11}} z_{12}{}^{n_{12}}$$

$$= \sum_{n_{11}} \sum_{n_{12}} P(X_1(t_1) = n_{11} \cap X_2(t_1) = n_{12} + a_1 - a_2 | X_1(0) = a_1 \cap X_2(0) = a_1)(z_{11}{}^{n_{11}} z_{12}{}^{n_{12} + a_1 - a_2})(z_{12}{}^{-a_1 + a_2})$$

$$= \{F_1(z_1\,;\, t_1 | (1, 1))\}^{a_1} z_{12}{}^{-a_1 + a_2}$$

であるから，

$f(z_1\,;\, t_1) = 1,$

$f_1(z_1\,;\, t_1) = F_1(z_1\,;\, t_1 | (1, 1)) / z_{12},$

$f_2(z_1\,;\, t_1) = z_{12},$

とおけば，（3）の分解式が成立する．（4）（6）から

$$z_1{}^* = \left(\frac{z_{11}}{z_{22}} F_1(z_2\,;\, t_2 - t_1 | (1, 1)), \quad z_{12} z_{22}\right),$$

$$F_2(z_1, z_2\,;\, t_1, t_2 | (1, 1)) = F_1(z_1{}^*\,;\, t_1 | (1, 1))$$

を得る．同じように，（7）（8）からは，

$$z_2{}^* = \left(\frac{z_{21}}{z_{32}} F_1(z_3\,;\, t_3 - t_2 | (1, 1)), \quad z_{22} z_{32}\right),$$

$$z_1{}^{**} = \left(\frac{z_{11}}{z_{22} z_{32}} F_1(z_2{}^*\,;\, t_2 - t_1 | (1, 1)), \quad z_{12} z_{22} z_{32}\right),$$

$$F_3(z_1, z_2, z_3\,;\, t_1, t_2, t_3 | (1, 1)) = F_1(z_1{}^{**}\,;\, t_1 | (1, 1))$$

が出る．

（一橋大学教授）