

# 時変ベクトル自己回帰モデル

—— サーベイと日本のマクロデータへの応用<sup>1)</sup> ——

中島上智・渡部敏明

マクロ経済変数を分析する時系列モデルとして、時変ベクトル自己回帰(Time-varying VAR)モデルが注目されており、近年、様々な拡張が試みられている。本稿では、このモデルについて解説を行うとともに、モデルの構造および実証研究における最近の展開について概観する。このモデルはマルコフ連鎖モンテカルロ(Markov chain Monte Carlo, MCMC)法を用いてベイズ推定することが多いので、そうした推定方法に関して詳しく説明する。また、日本のマクロデータを用いたモデルの推定結果を紹介するほか、予測精度を基準としたモデル比較を行う。

JEL Classification Codes: C11, C15, C32, C51, C52, E52

## 1. 序論

ベクトル自己回帰(Vector autoregressive; VAR)モデルは、2011年ノーベル経済学賞を受賞したChristopher Simsの研究(Sims (1980))を先駆けに経済時系列データの有力な分析手法として広く用いられるようになった。特にマクロ経済学では、経済の内生的なシステムと外生的なショックを識別することにより、経済理論の実証分析や金融政策の波及効果等を定量的に分析するフレームワークとして定着した(例えば、Leeper *et al.* (1996), Christiano *et al.* (1999), 照山(2001), 宮尾(2006)を参照)。これまで様々な拡張が議論されてきたが、近年では、経済の構造や金融政策のスタンスが時期によって変化するという考え方を基に、システム内のパラメータが時間を通じて変化するという構造を加えた、時変VAR(Time-varying VAR)モデルが従来のVARよりも柔軟性の高いモデルとして注目を集めている。本稿では、この時変VARモデルについて詳しく解説するほか、日本のマクロデータを用いた実証分析を紹介する。

まず、時変VARモデルが提案されるまでの議論を概観する。従来のVARモデルは、その推計の容易さもあって、経済理論の検証に有用な手段として幅広く用いられてきたが、システム内のパラメータが時間を通じて一定であるという仮定に疑問が呈され、様々なモデルの拡張

が試みられた。その背景には、人々の経済行動および期待が変わることで、経済変数間の相互関係も変化するという、いわゆる「ルーカス批判」(Lucas(1976))がある。そのため、Canova(1993), Sims(1993), Stock and Watson(1996)等によって、VARモデルの係数がランダム・ウォーク過程やマルコフ・スイッチングモデル(Kim and Nelson(1999))等に従って、時間を通じて変化するモデルが開発された。

Cogley and Sargent(2001)はVARモデルの係数がランダム・ウォークに従う、時変係数(Time-varying coefficient)VARモデルを用いて米国のマクロデータの分析を行った。この論文に対してSims(2001)とStock(2001)は、係数だけでなく構造ショックの分散も時間を通じて変化している可能性を指摘した。もし現実には分散もショックの分散も時変である場合、分散を通期一定として係数のみを時変にしたVARモデルをあてはめると、分散の変動までも時変係数で捉えてしまうことになり、推定値にバイアスが生じる可能性を示唆した<sup>2)</sup>。この指摘に應える形で、Cogley and Sargent(2005)は時変係数VARの構造ショックの分散に確率的ボラティリティ(Stochastic volatility; SV)モデルを仮定し、米国データについて再推計した結果を報告している<sup>3)</sup>。さらにPrimiceri(2005)が構造ショックの同時相関のパラメータも時変にしたことによって、今日よく用いられている時変パラメータVAR(Time-varying parameter

VAR; TVP-VAR) モデルが確立する。

構造ショックの分散に用いられているSVモデルは、元々、計量ファイナンスの分野で株価や為替レート等の資産収益率の時系列データを分析する際、2次のモーメントであるボラティリティが時間を通じて変化するモデルとして広く用いられてきた(例えば、Ghysels *et al.* (2002), Shephard(2005), 渡部(2000)を参照)。SVモデルはボラティリティを潜在変数とする非線形状態空間モデルであるため、最尤法による推計が困難である。代わりに、ベイズ推定法の枠組みにおけるマルコフ連鎖モンテカルロ(Markov chain Monte Carlo, MCMC)法を用いた研究が多い。TVP-VARにおいても、係数だけが時変の場合はカルマン・フィルターを用いた最尤法で推定できるが、構造ショックの分散にSVモデルを仮定した場合は、Cogley and Sargent(2001, 2005), Primiceri(2005)に倣ってMCMC法で推定することがほとんどである。本稿では、MCMCによるTVP-VARモデルの推定方法を詳しく解説する。

本稿では、日本のマクロデータを用いてTVP-VARモデルを推定するほか、予測精度を基準としたモデル比較を行う。VARモデルのパラメータを時変にすることによって、予測精度がどのように向上するかを検討する。様々な時変パラメータの組み合わせを比較することにより、予測精度と時変パラメータの関係を分析しているのが本稿の特徴である。

本稿の構成は以下の通りである。まず、第2節でTVP-VARモデルの構造について説明する。次に、第3節では、MCMC法を用いたTVP-VARモデルの推定方法について解説する。第4節では、時変VARモデルの最近の展開について説明する。さらに、第5節では、日本のマクロデータを用いたモデルの推定結果および予測精度を基準としたモデル比較を紹介する。最後に第6節で本稿のまとめを行うとともに今後の発展について述べる。

## 2. TVP-VAR モデル

ここでは、Primiceri(2005)によって提案されたTVP-VARモデルを説明する。 $k$ 個の変数を  $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{kt})'$  とし、次のラグ次数  $s$  のVARモデルを考える。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c}_t + \mathbf{B}_{1t}\mathbf{y}_{t-1} + \dots + \mathbf{B}_{st}\mathbf{y}_{t-s} + \mathbf{u}_t, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_t), \quad t = s+1, \dots, n. \quad (2)$$

ここで  $\mathbf{c}_t$  は  $(k \times 1)$  の時変定数項ベクトル、 $\mathbf{B}_{it}$  は  $(k \times k)$  の時変係数行列 ( $i=1, \dots, s$ )、 $\mathbf{u}_t$  は  $(k \times 1)$  の誤差項ベクトルである。誤差項  $\mathbf{u}_t$  は、(2)式の通り、平均  $\mathbf{0}$ 、時変共分散行列  $\mathbf{\Omega}_t$  の  $k$  変量正規分布に従うと仮定する。時変共分散行列  $\mathbf{\Omega}_t$  は、通常、コレスキー分解によって次のように展開される。

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{\Sigma}_t \mathbf{\Sigma}_t' \mathbf{A}_t^{-1'}. \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{A}_t$  は対角成分が全て1の  $(k \times k)$  の下三角行列

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21t} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{k1t} & \dots & a_{k,k-1,t} & 1 \end{pmatrix},$$

また、 $\mathbf{\Sigma}_t$  は  $(k \times k)$  の対角行列

$$\mathbf{\Sigma}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1t} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_{kt} \end{pmatrix}$$

である。 $\sigma_{it}^2$  は変数  $i$  の構造ショックの時変分散、 $a_{ijt}$  は変数  $j$  の構造ショックが変数  $i$  に与える時変同時相関のパラメータである。式を見やすくするために、定数項と係数を横に並べた行列  $[\mathbf{c}_t, \mathbf{B}_{1t}, \dots, \mathbf{B}_{st}]$  の各要素を行ごととに1列に並べた  $(k(1+s) \times 1)$  ベクトルを  $\boldsymbol{\beta}_t$  とおく。また、これに対応するように  $\mathbf{X}_t = \mathbf{I}_k \otimes (1, \mathbf{y}_{t-1}', \dots, \mathbf{y}_{t-s}')$  と定義すると(ただし、 $\mathbf{I}_k$  は  $k \times k$  の単位行列、 $\otimes$  はクロネッカー積)、(1)-(3)式は、次の式に書き換えられる。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{\Sigma}_t \mathbf{e}_t, \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k). \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{e}_t = (e_{1t}, \dots, e_{kt})'$  は基準化された構造ショックである。

次に、時変パラメータの時系列構造を仮定する。 $\mathbf{A}_t$  の下三角成分を行ごととに1列に並べたベクトルを  $\mathbf{a}_t = (a_{21t}, a_{31t}, a_{32t}, a_{41t}, \dots, a_{k,k-1,t})'$  とおき、 $\mathbf{\Sigma}_t$  の対角成分を  $h_{it} = \log \sigma_{it}^2$  と変換した上で1列に並べたベクトルを  $\mathbf{h}_t = (h_{1t}, \dots, h_{kt})'$  と定義する。TVP-VARモデルにおける時変パラメータは  $(\boldsymbol{\beta}_t, \mathbf{a}_t, \mathbf{h}_t)$  であり、多くの場合、次のランダム・ウォークに従うと仮定される。

$$\boldsymbol{\beta}_{t+1} = \boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{u}_{\boldsymbol{\beta}t}, \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{a}_t + \mathbf{u}_{at}, \quad (7)$$

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{h}_t + \mathbf{u}_{ht}. \quad (8)$$

ただし、 $(\mathbf{e}_t', \mathbf{u}_{at}', \mathbf{u}_{ht}')' \sim N(\mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{I}_h, \Sigma_\beta, \Sigma_a, \Sigma_h))$ と仮定する。ここで、 $\text{diag}$ は引数の行列が対角要素に並ぶ行列を表わす。

ここで5つの留意点を述べる。1点目は、(3)式のコレスキー分解がVARのショックの識別方法としてのリカーシブ制約(Sims(1980))に相当することである。リカーシブ制約はその使いやすさから多くの文献で用いられているが、Christiano *et al.*(1999)等で指摘されているように複雑な経済理論に基づいた構造ショックの識別を目的とする場合は、 $\mathbf{A}_t$ に別の形の制約が必要となる。以下で述べるTVP-VARモデルの推定方法は、 $\mathbf{A}_t$ に下三角行列の制約以外の仮定をおいた場合でも適用可能である<sup>4)</sup>。

2点目として、(6)-(8)式において、時変パラメータが非定常なランダム・ウォークに従うと仮定している。定常な自己回帰(AR)過程を考えることも可能であるが(例えば、Nakajima and West(2010))、多くの文献がランダム・ウォークを仮定している理由として、ARモデルよりもパラメータ数を節約できることが挙げられる。また、定常AR過程は定常値のまわりでパラメータが変化していくのに対して、ランダム・ウォークは非定常であるため、非再帰的な経済の構造変化(例えば、別の均衡点へのレジーム・シフト)を捉えるのに適しているとも考えられる。もちろん、推計データの期間において、ある定常的な経済モデルを想定している場合は、定常過程に従う時変パラメータを用いた方が整合的かもしれない。定常、非定常パラメータの違いを具体的に調べた論文は筆者の知る限り見当たらないが、モデルのあてはまりや予測精度における比較は興味深い論点である。

3点目として、共分散行列 $(\Sigma_\beta, \Sigma_a, \Sigma_h)$ は、推定を効率的にするためそれぞれに対角行列を仮定する場合もある。特に、 $\beta_t$ の次元 $(k(1+sk))$ が高い場合、 $\Sigma_\beta$ の推定が不安定になる可能性もある。Nakajima *et al.*(2011)では、 $\Sigma_\beta$ を一般的な行列としても、対角行列としても結果はあまり変わらないと報告している。また、後述のように $\Sigma_h$ はSVモデルの推定方法によって対角行列を仮定した方が推定が簡単になる場

合がある。この点についてNakajima(2011a)は、結果の違いはわずかであると報告している。

4点目は $(\Sigma_\beta, \Sigma_a, \Sigma_h)$ の事前分布に関する留意点である。以下、推定方法を簡単にするために $\Sigma_a$ および $\Sigma_h$ を対角行列と仮定し、それぞれ $i, j$ 番目の対角成分を $w_{ai}^2, w_{hj}^2$ とおく。本稿では、次の事前分布を設定する。 $\Sigma_\beta \sim IW(n_0, \mathbf{S}_0)$ ,  $w_{ai}^2 \sim IG(v_{a0}/2, V_{a0}/2)$ ,  $w_{hj}^2 \sim IG(v_{h0}/2, V_{h0}/2)$ 。ただし、 $IW$ は逆ウィッシュャート(Inverse Wishart)分布、 $IG$ は逆ガンマ(Inverse Gamma)分布を表わす。これらの事前分布により、時変パラメータの時間を通じた動きの度合いが、データから得られるモデルの整合性と合わせて決定される。TVP-VARモデルの推定では、 $\beta_t, \mathbf{a}_t, \mathbf{h}_t$ にどの程度の動きを許容するかがショックの識別において重要である。 $\beta_t$ に大きな動きを許容して、 $\mathbf{a}_t$ と $\mathbf{h}_t$ にほとんど動きを許容しなければ、データのほとんどの動きをVARの定数項やラグ係数の変動で捉えることになる。極端な場合、 $\beta_t$ に含まれる定数項 $\mathbf{c}_t$ が $\mathbf{y}_t$ のほぼ全ての変動を吸収してしまう可能性もある。これらの調整はデータの構造やラグ次数によって区々である上、一概に最適な方法はないが、 $\beta_t$ にある程度ゆるやかな動きを許容するのが現実的かもしれない。特に、定数項 $\mathbf{c}_t$ の動きには相対的に小さい分散を仮定する方が望ましい。

5点目として、時変パラメータの初期値の事前分布については次の正規分布を設定する。 $\beta_{s+1} \sim N(\mu_{\beta_0}, \Sigma_{\beta_0})$ ,  $\mathbf{a}_{s+1} \sim N(\mu_{a_0}, \Sigma_{a_0})$ ,  $\mathbf{h}_{s+1} \sim N(\mu_{h_0}, \Sigma_{h_0})$ とおく。この事前分布の平均と共分散行列にどのような値を設定するかは、主に2通りの方法がある。1つ目の方法は、データセットを事前データと本推計データに分けて、事前データに通常の固定パラメータVARモデルをあてはめた推定値を用いて事前分布を構成する。例えば、Primiceri(2005)は、 $T=195$ の四半期データから最初の40四半期(10年分)を事前データ、残り $n=155$ を本推計データに分割しており、事前データに固定パラメータVARモデルをあてはめて得られた推定値 $\hat{\beta}_0$ および共分散行列の推定値 $V(\hat{\beta}_0)$ を用いて、 $\beta_{s+1} \sim N(\hat{\beta}_0, 4V(\hat{\beta}_0))$ と設定している。つまり、本推計の時変係数の初期値は、それ以前の10年間の平均的な係数 $\beta_t (\equiv \beta)$ の値に近いだ

ろうという考え方である。ただし、共分散行列に4を掛けて(この数字自体に根拠はないが)、ある程度幅を持たせている。もう一つの方法は、十分にフラットな事前分布を設定する方法であり、Nakajima *et al.*(2010), Nakajima(2011a)等で使われている。例えば、Nakajima *et al.*(2010)では、 $\beta_{s+1} \sim N(\mathbf{0}, 10\mathbf{I})$ と仮定している。パラメータのスケールに関して事前の情報がないため、大きめの分散を設定している。両者を比較すると、前者の方法は本推計データの直近までのデータの情報を使うため確実な方法であるが、データの期間数が限られるときは事前データが確保できない状況もあるかもしれない。また、事前データを確保できたとしても、その期間が短いときは固定パラメータVARモデルの推計値が不安定になる可能性がある。後者の方法は事前データセットを必要としない上、フラットな事前分布を置くため恣意的にならずに、 $\mathbf{h}_{s+1}$ の事前分布が十分にフラットでない場合は推定が不安定になることもあるので注意が必要である。この事前分布に関する議論については、Primiceri(2005), Koop and Korobilis(2010)も参照されたい。

### 3. TVP-VARモデルのベイズ推定

本節では、TVP-VARモデルの推定方法を解説する。TVP-VARモデルは時変パラメータとして潜在変数の個数が多く、構造ショックの分散が非線形なSVモデルに従っているため、最尤法による推定が困難である<sup>5)</sup>。このため、ほとんどの場合、ベイズ推定法の枠組みにおけるMCMC法が用いられる。モデルの事後分布からパラメータの確率標本を乱数発生させて、得られた標本を基に統計的推測を行う。MCMC法は1回前にサンプリングされた値に依存させて次のサンプリングを行う方法の総称である(MCMC法について詳しくは、Koop(2003), Gamerman and Lopes(2006), 中妻(2007), 伊庭他(2001), 和合(2005), 小西他(2008)等を参照されたい)。

まず、 $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^n$ ,  $\beta = \{\beta_t\}_{t=s+1}^n$ ,  $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}_t\}_{t=s+1}^n$ ,  $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_t\}_{t=s+1}^n$ ,  $\omega = (\Sigma_\beta, \Sigma_a, \Sigma_h)$ と定義する。データ $\mathbf{y}$ が得られたときのTVP-VARモデルにおける同時事後確率密度関数 $\pi(\beta, \mathbf{a}, \mathbf{h}, \omega | \mathbf{y})$ からの確率標本は、MCMC法を用いたサン

プリングによって得ることができる。サンプリングの詳細についてはNakajima(2011a)が詳しく<sup>6)</sup>。以下、各パラメータのサンプリング方法を概観する。

#### 3.1 $\beta$ のサンプリング

$\beta_t$ を潜在変数とする以下の状態空間モデルを考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \mathbf{X}_t \beta_t + \mathbf{A}_t^{-1} \Sigma_t \mathbf{e}_t, \quad t = s+1, \dots, n, \\ \beta_{t+1} &= \beta_t + \mathbf{u}_{\beta t}, \quad t = s, \dots, n-1. \end{aligned}$$

ただし、 $\beta_s = \mu_{\beta_0}$ ,  $\mathbf{u}_{\beta s} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\beta_0})$ である。線形で誤差項が正規分布の状態空間モデルであるため、de Jong and Shephard(1995)やDurbin and Koopman(2002)によって提案されたsimulation smootherを用いて $\beta$ をサンプリングすることができる<sup>7)</sup>。簡単な方法としては、 $\beta_t \equiv \{\beta_\tau | \tau \neq t\}$ を条件として、 $\beta_t$ をその条件付事後分布 $\beta_t | \beta_{-t}, \mathbf{a}, \mathbf{h}, \Sigma_\beta, \mathbf{y}$ から $t = s+1, \dots, n$ の順にサンプリングすることは可能であるが、simulation smootherを用いて $(\beta_{s+1}, \dots, \beta_n)$ をその同時条件付事後分布 $\beta | \mathbf{a}, \mathbf{h}, \Sigma_\beta, \mathbf{y}$ から一度にサンプリングする方が効率的であることが知られている。

#### 3.2 $\mathbf{a}$ のサンプリング

$\mathbf{a}$ のサンプリングも同様にsimulation smootherを用いるため、 $\mathbf{a}_t$ を潜在変数とする状態空間モデルを考える。 $\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{X}_t \beta_t$ と定義し、その $i$ 番目の成分を $\hat{y}_{it}$ と表記する。また、

$$\hat{\mathbf{X}}_t = - \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \hat{y}_{1t} & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \hat{y}_{1t} & \hat{y}_{2t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{1t} & \dots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \hat{y}_{1t} & \dots & \hat{y}_{k-1,t} \end{pmatrix}$$

と定義すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_t &= \hat{\mathbf{X}}_t \mathbf{a}_t + \Sigma_t \mathbf{e}_t, \quad t = s+1, \dots, n, \\ \mathbf{a}_{t+1} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{u}_{at}, \quad t = s, \dots, n-1. \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{a}_s = \mu_{a0}$ ,  $\mathbf{u}_{as} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{a0})$ である。この式は線形ガウス状態空間モデルであるため、simulation smootherを用いて $\mathbf{a}$ をサンプリングする。なお、 $\mathbf{A}_t$ が下三角行列でないような識別条件を仮定する場合、上の $\hat{\mathbf{X}}_t$ の定義式における $\hat{y}_{it}$ の配置を変えることによって、この

アルゴリズムがそのまま適用可能である。

### 3.3 $\mathbf{h}$ のサンプリング

SV モデルに従う潜在変数  $\mathbf{h}$  の条件付事後分布からのサンプリング法としては、 $\mathbf{h}_t$  に関して線形ガウス状態空間モデルで表現できないことから simulation smoother を直接適用することができない。そこで、主に single-move sampler, multi-move sampler, mixture sampler の3つがしばしば用いられる。multi-move (block) sampler は Shephard and Pitt(1997) および Watanabe and Omori(2004), Omori and Watanabe(2008)によって、mixture sampler は Kim *et al.*(1998) および Omori *et al.*(2007)によってそれぞれ提案された方法で、single-move sampler よりも効率的であることが知られている。(詳しくは、渡部(2000), 大森・渡部(2008)等を参照されたい)。Primiceri(2005)は  $\Sigma_h$  に一般的な行列を仮定し、Kim *et al.*(1998)の mixture sampler を用いている。Mixture sampler は  $\mathbf{h}$  の条件付事後分布を近似した密度関数からサンプリングする。その近似は非常に精密であることが知られており、その近似誤差を修正することも可能であるが、multi-move sampler を用いれば元の条件付事後分布から直接サンプリングできる。本稿では、Nakajima *et al.*(2011), Nakajima(2011a)に倣って、 $\mathbf{h}$  の推定に multi-move sampler を用いる。

$y_{it}^*, u_{hit}$  をそれぞれベクトル  $\mathbf{A}_i \mathbf{y}_t$  と  $\mathbf{u}_t$  の  $i$  番目の要素と定義すると、次の式が得られる。

$$y_{it}^* = \exp(h_{it}/2) e_{it}, \quad (9)$$

$$h_{i,t+1} = h_{it} + u_{hit}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} e_{it} \\ u_{hit} \end{pmatrix} \sim N \left( \mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w_{hi}^2 \end{pmatrix} \right). \quad (11)$$

ただし、 $u_{his} \sim N(0, w_{hi}^2)$  であり、 $w_{hi}^2$  は  $\Sigma_{h0}$  の  $i$  番目の対角成分である。いま、 $(h_{i,s+1}, \dots, h_{i,n})$  全体を  $K+1$  個のブロックに分割し、任意のブロックを  $(h_{i,(k_j-1+1)}, \dots, h_{i,k_j})$  と表す。ただし、 $j=1, \dots, K+1, k_0=s, k_{K+1}=n$  である。ブロックの分割方法は、例えば、Shephard and Pitt(1997)が提案している stochastic knots という方法があり、 $j=1, \dots, K$  に対して  $k_j = \text{int}[(n-s)(j+U_j)/(K+2)] + s$  と定める。ただし、 $U_i$  は区間  $[0, 1]$  で定義される一様分布からの

乱数を表し、 $\text{int}[\cdot]$  は整数部分を表す。MCMC 法のアルゴリズムにおいて、ブロックの節目である  $(k_1, \dots, k_K)$  を毎回ランダムに決めることにより、サンプリングの効率性を高めることができる。このようにして各ブロック  $(h_{i,(k_j-1+1)}, \dots, h_{i,k_j})$  を  $j=1, \dots, K$  の順に、それ以外の  $h_{it}$  および他の潜在変数を条件付けした事後確率密度関数からサンプリングする。このアルゴリズムを  $i=1, \dots, K$  に対してそれぞれ行う。具体的なサンプリング方法については、Nakajima(2011a)の Appendix A.2 を参照されたい。なお、 $\Sigma_h$  を対角行列でなく一般の共分散行列と仮定した場合でも、アルゴリズムはやや複雑になるが multi-move sampler が適用可能である (Omori and Watanabe(2008)を参照)。

### 3.4 $\omega$ のサンプリング

$\beta$  が与えられたときの  $\Sigma_\beta$  の条件付事後分布は、 $\Sigma_\beta | \beta \sim IW(\bar{n}, \bar{S})$  となる。ただし、 $\bar{n} = n_0 + n - s - 1$ ,  $\bar{S}^{-1} = S_0^{-1} + \sum_{i=s+1}^n (\beta_{i+1} - \beta_i)(\beta_{i+1} - \beta_i)'$  である。次に、 $\gamma \in \{\mathbf{a}, \mathbf{h}\}$  について、 $\mathbf{a}$  および  $\mathbf{h}$  が与えられたときの  $w_\gamma^2$  の条件付事後分布は、 $w_\gamma^2 | \gamma \sim IG(\bar{v}_\gamma/2, \bar{V}_\gamma/2)$  となる。ただし、 $\bar{v}_\gamma = v_{\gamma 0} + n - s - 1$ ,  $\bar{V}_\gamma = V_{\gamma 0} + \sum_{i=s+1}^n (\gamma_{i,t+1} - \gamma_{it})^2$  である。

## 4. 時変 VAR モデルの最近の展開

Primiceri(2005)により TVP-VAR モデルが確立されるまでの経緯は第1節で概観したが、本節ではその後の時変 VAR モデルによる分析例やモデルの発展について、いくつかのカテゴリに分けて紹介する。

### マクロ経済理論と実証分析

近年のマクロ経済学における大きな論点の1つとして Great Moderation がある。例えば、米国のマクロ経済であれば、失業率やインフレ率といった変数の動きを 1965 年から 1980 年の間とそれ以降の約 20 年間で比べると、後者が前者の期間に比べて安定している。その原因として、様々な理論が展開されているが、実証分析の枠組みでは大きく分けて 2つの可能性が指摘されている。1つは、経済システムに加わる外部からのショックの大きさが小さくなったことである。これは通称、“Good luck の要因”と

も呼ばれる。もう1つは、経済変数間の連関性の変化、特に金融政策のスタンスが変化したことである。これは前者に対して、“Good policyの要因”と呼ばれる。この論点に対して、TVP-VARモデルを用いると、データの変動の安定化は、ショックのボラティリティに当たる $h_t$ の低下によるものなのか、あるいは、経済変数間の連関性に当たる $\beta_t$ や $\alpha_t$ の変化によるものなのか、という問題として検証することができる。TVP-VARモデルを用いた実証研究として、米国のデータを用いたものにBenati and Surico(2008)、英国のデータを用いたものにBenati(2008)がある。どちらの論文も“Good luck”を支持しており、経済システムに加わるショックの大きさが以前に比べて小さくなったことにより経済の予見性が高まったことがGreat Moderationの要因であると主張しているが、その他の論文も含めて議論が続いている。この論点のように、経済変数間の構造変化について様々な検証ができるという点において、時変VARモデルは有益な計量モデルといえる。

TVP-VARモデルを用いた日本の実証分析として、Nakajima *et al.*(2010, 2011)、Franta(2011)等がある。Nakajima *et al.*(2010)は日本銀行が行ったゼロ金利政策および量的緩和政策におけるコミットメントの効果について、様々な期待代理変数を用いることにより、政策前後で実体経済変数と期待代理変数の連関性がどのように変化したかを議論している。Nakajima *et al.*(2011)は、日本のマクロ経済変数にTVP-VARモデルをあてはめた結果、1980年代から2000年代にかけての約30年間で変数間の連関性に大きな変化があったことを示している。また、固定パラメータVARモデルや一部のパラメータを時変にした準TVP-VARモデルに比べて、全てのパラメータが時変であるTVP-VARモデルの方が周辺尤度(marginal likelihood)が高く、データのあてはまりがよいことを報告している。別の観点から、西崎他(2011)はTVP-VARモデルを利用して時変パラメータ・フィリップス曲線を推計している。具体的には、TVP-VARモデルを推定した後、TVP-VARとフィリップス曲線の期待形成プロセスをマッチングさせることによって、フィリップス曲線の時変パラメータを推計している。

## 符号制約

固定パラメータVARモデルで議論される分析手法が時変VARモデルにも応用されている。VARモデルではショックを識別するために、構造ショックによって各変数が正と負のどちらに動くかという理論的制約を加えることが可能であり、符号制約(sign restriction)と呼ばれている(Uhlig(2005)等)。TVP-VARモデルは各時点において異なるインパルス応答が得られるため、全ての期間における符号制約だけでなく、個別の期間における符号制約を課すことが可能になる。例えば、金融緩和とショックに対して、生産は全期間において2期以上の上昇、マネタリーベースはある一定の時期のみ1期間以上の上昇、といったような制約を課することができる。

ただし、符号制約を課するためには推計方法の修正が必要である。原理的には、時変パラメータが符号制約を満たす場合にのみ正の値をとる指示関数(indicator function)を事前分布に加えればよいが、時変パラメータの推計にsimulation smootherを用いるため、このアルゴリズムに直接制約を加えることは難しい。単純な方法としては、MCMCで時変パラメータを発生させる度にインパルス応答を描いて符号制約を満たすかどうか確認し、満たさなければそのサンプルを棄却し、制約を満たすまで繰り返しサンプルを発生させるという方法が考えられる。ただ、この方法では、データや制約条件によっては、棄却率が高くなることにより計算負荷が増加する。そこで、ショックと同時点の相関関係を表す行列 $A_t$ に回転行列を掛け合わせることによって、基準化された構造ショックを符号制約を満たすショックに変換する方法が提案されている(例えば、Baumeister and Benati(2010)、Franta(2011))。実証例として、Canova and Gambetti(2009)は符号制約付きTVP-VARモデルを米国データにあてはめた結果を報告している。また、Baumeister and Benati(2010)も符号制約付きTVP-VARモデルを用いて、最近の金融危機においてイールドカーブを緩やかにする政策が経済にどのような影響を与えたかをユーロ地域、米国、英国、日本のデータで検証している。

他の論点として、VARモデルは係数の推定値によって発散的な(explosive)システムにな

ってしまうことがあり、経済データを分析する上では好ましくない性質としてそのような解を排除することが多い。TVP-VAR モデルにおいても同じことが言える(Cogley and Sargent (2001))。係数は時間を通じて変化するため、厳密には各時点において係数  $\beta_t$  が発散解であるかどうかをチェックする必要がある。ベイズ推定の枠組みでは、符号制約と同様に、そのような発散解となる係数の値について密度がゼロとなる事前分布を置けばよい。ただ、通常の simulation smoother を用いた係数のサンプリングでは全ての係数 ( $\beta_{s+1}, \dots, \beta_n$ ) をサンプリングしてから個々の係数について発散解かどうかチェックし、1 つでも発散解があればそのサンプル全体を捨てて、全ての係数が発散解でないという条件を満たすまでサンプリングを続けなければならない。この計算負荷を軽減させるため、Koop and Potter(2011)は発散解を排除する条件を入れた制約付きフィルタリングを開発し、実証例を紹介している。

### 時変パラメータの検証

TVP-VAR モデルにおいては全てのパラメータが時間を通じて変化すると仮定されているが、実際のデータにあてはめた場合、その仮定が正しいかどうか(モデルのあてはまりがよくなるのかどうか)を検証している研究がいくつかある。例えば、Nakajima *et al.*(2011)は調和平均(Harmonic mean)法により固定パラメータ VAR と TVP-VAR モデルの周辺尤度(Marginal likelihood)を計算、比較することにより、日本のマクロデータにおいて後者の方があてはまりがよいと結論付けている。また、D'Agostino *et al.*(2012)は米国のマクロデータを用いて予測精度を検証しており、TVP-VAR モデルが単純なランダム・ウォークモデルや固定パラメータ VAR モデルに比べて予測精度が高いことを報告している。

パラメータが時変かどうかをベイズ推定の枠組みで検証する方法として、Koop *et al.*(2009)は時変パラメータの状態方程式を  $\gamma_{i,t+1} = \gamma_{it} + \lambda_i u_{it}$ 、ただし  $\gamma \in (\beta_i, a_i, h_i)$ ,  $\lambda_i \in (0, 1)$  と仮定することにより、 $\lambda_i = 0$  であれば固定係数、 $\lambda_i = 1$  であれば時変係数となる混合分布を提案している。これは誤差項がゼロかゼロ以外の値を取る

というマルコフ・スイッチングモデルに相当する。米国のマクロデータを用いた実証分析では、 $(\beta, a, h)$  の全てが時変であり、その中でも特に  $\beta$  と  $h$  の時変性が重要であるという結果を報告している。さらに、Chan *et al.*(2010)は上式の  $\lambda_i$  を  $\lambda_{it}$  と置き換えて、各時点で時変であるかどうかを検証するモデルを一変数の回帰モデルで提案しており、TVP-VAR モデルへの応用も可能であると考えられる。

VAR モデルは変数やラグ次数が増えるにつれて係数の個数が飛躍的に増えてしまい、推定の不確実性も高まると考えられる。そこで、George *et al.*(2008)や Korobilis(2008)はベイズ推定における確率的探索変数選択法(Stochastic search variable selection; 例えば、George and McCulloch(1997), Clyde and George (2004)等を参照)を固定パラメータ VAR の係数に適用している。具体的には、各係数( $b_i$  とおく)の事前分布として、 $\pi(b_i) = p_i \delta_0(b_i) + (1 - p_i) f_N(0, \tau^2)$  とおく。ただし、 $0 < p_i < 1$ ,  $f_N$  は正規分布の密度関数、および  $\delta_0(b_i)$  はディラックのデルタであり、 $b_i = 0$  でのみ密度をもつ関数である。 $\pi(b_i)$  は確率  $p_i$  でゼロ、確率  $(1 - p_i)$  で正規分布にしたがう混合分布である。VAR モデルにおいて各係数を入れるか入れないかという全てのモデルを考えてモデル選択することは不可能に近いが、このような事前分布を設定することにより、効率的にモデル選択をすることができる。Korobilis(2010)はこの方法を TVP-VAR モデルの時変係数に適用し、各時変係数 ( $\beta_{1t}, \dots, \beta_{mt}$ ) がモデルに含まれるかどうかというモデル選択を議論している。また、時変係数 ( $\beta_{1t}, \dots, \beta_{mt}$ ) が推移する中でそれに関連するパラメータに構造変化が起こる可能性のあるモデルも提案している。

### ゼロ金利制約

Nakajima *et al.*(2011)や Nakajima(2011a)で言及されているように、日本のマクロデータを用いた分析で、短期金利がゼロに近くなる期間を含む場合、通常の TVP-VAR モデルではこのゼロ金利期間中も短期金利に関するパラメータが動いてしまうことになり、現実的ではないという指摘が考えられる。Iwata and Wu (2006)は、固定パラメータ VAR について、潜

在金利(implied interest rate)という変数を導入してトービット(Tobit)モデル型の非線形な関数を考えた。そこで、Nakajima(2011b)はこのIwata and Wu(2006)のトービットモデル型変数をTVP-VARモデルに応用し、ゼロ金利期間を含む日本のマクロデータで推計した。通常のTVP-VARモデルと比較すると、短期金利に関して構造ショックのボラティリティが十分に小さく推定されることから、金利に関するインパルス応答以外はほとんど差異がなく、通常のTVP-VARモデルでもゼロ金利期間を含むことによるバイアスはほとんどないと結論付けている。

このような非線形性をTVP-VARモデルに取り入れた研究がいくつかある。Nakajima and West(2010)は時変パラメータ(の絶対値)がある潜在的な閾値(latent threshold)より小さくなったとき、観測方程式におけるそのパラメータの値がゼロになるというモデルを提案している。具体的には、TVP-VARモデルの時変係数を $b_{it} = \beta_{it} s_{it}$ と定義して、 $\beta_{it}$ は式(6)のようなランダム・ウォークやAR(1)モデルに従う潜在変数とし、 $s_{it} = I[|\beta_{it}| \geq d_i]$ とモデル化している。ただし、 $I[\cdot]$ は括弧内の条件が満たされれば1、そうでなければ0となる指示関数、 $d_i$ は閾値である。各時変パラメータが、ある期間はゼロ、それ以外の期間は閾値以上の値を動くというモデルになっており、被説明変数を説明するのに統計的に寄与していないラグ変数を各時点で除くことができ、推定の不確実性を減らすと同時に、予測の精度を上げることを米国および日本のマクロデータを用いて示している。また、日本のデータのゼロ金利期間には関連する時変パラメータがゼロとなることにより、その期間は短期金利の効果がゼロになるようなインパルス応答が得られる。

また、Franta(2011)は、前述の符号制約付きTVP-VARモデルを用いて同じようなゼロ金利時期の政策について分析している。ゼロ金利政策時期および金利がゼロに近い時期において、金融緩和とショックに対するマネタリーベースの応答は1四半期以上の上昇を仮定するほか、コールレートについては、ゼロ金利政策時期に5bp(ペーシスポイント)以下の下落、量的緩和政策時期に1bp以下の下落、金利がゼロに近

い時期に50bp以下の下落を仮定して推定を行っている。

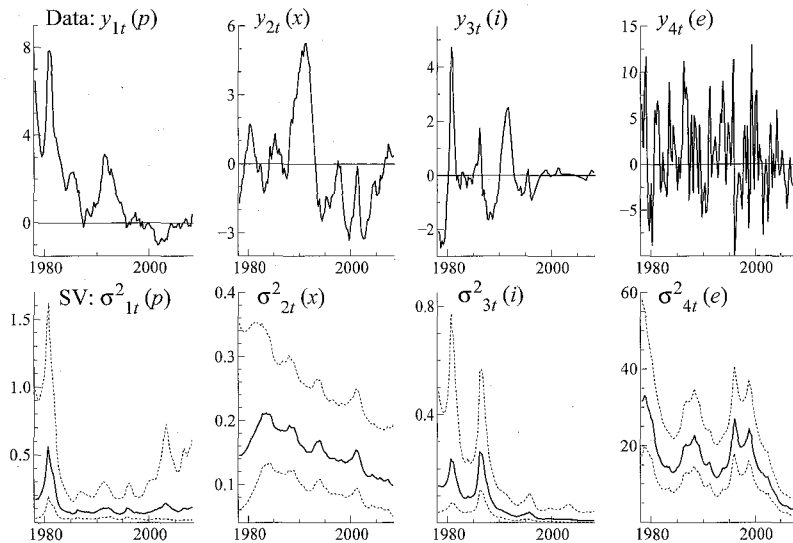
## TVP-FAVAR

VARモデルの発展形として、Bernanke *et al.*(2005)によって提案されたFactor augmented VAR(FAVAR)に時変パラメータの仮定を加えたTVP-FAVARモデルがKorobilis(2009)、Baumeister *et al.*(2010)、Mumtaz *et al.*(2011)によって提案されている。これらの論文は米国のデータで数百の系列を用意し、そこから抽出される3~6個のファクター(factor; 因子)と政策金利の構造変化をTVP-VARによって計測している。なお、ファクターと数百の系列の連関も時変パラメータを用いてモデル化されている(詳しくはKoop and Korobilis(2010)を参照されたい)。Moussa(2010)はTVP-FAVARモデルを日本のデータに当てはめて、日本銀行によって行われた量的緩和政策の生産や物価に与えた影響について従来の実証研究よりも大きな効果があったと主張している。類似の研究として、Mumtaz and Surico(2009)やBianchi *et al.*(2009)は、イールドカーブを3つの因子で表わすネルソン・シーゲル(Nelson-Siegel)モデル(Nelson and Siegel(1987)、Diebold *et al.*(2006))をTVP-FAVARの枠組みに応用し、前者は米国のデータ、後者は英国のデータをそれぞれ分析している。

## TVP-VECM

また、別の発展系として、Koop *et al.*(2011)がベクトル誤差修正モデル(vector error correction model; VECM)に時変パラメータの仮定を加えたTVP-VECMを提案している。ラグ係数だけでなく、共和分を表わすパラメータも時変にすることによって、自由度の高いモデルとなっているのが特徴である。彼らは、このモデルを英国の短期金利とインフレ率の2変数データに適用しており、フィッシャー効果(Fisher effect)の有無を検証している。推定の結果、1970年代の数年間にフィッシャー効果が示唆されるが、それ以外のほとんどの時期で確認されなかったと結論付けている。

図1. 日本のマクロデータ(上段)と TVP-VAR モデルによって推定された構造ショックの分散(下段:  $\sigma_t^2 = \exp(h_{it})$ ). データは, 消費者物価指数( $p$ ), GDP ギャップ( $x$ ), 金利ギャップ( $i$ ), 名目実効為替レート( $e$ ). 分散の推定値は事後平均(実線)と  $\pm 1$  標準偏差のバンド(点線).



## 5. 日本のマクロデータへの応用

### 5.1 データと事前分布

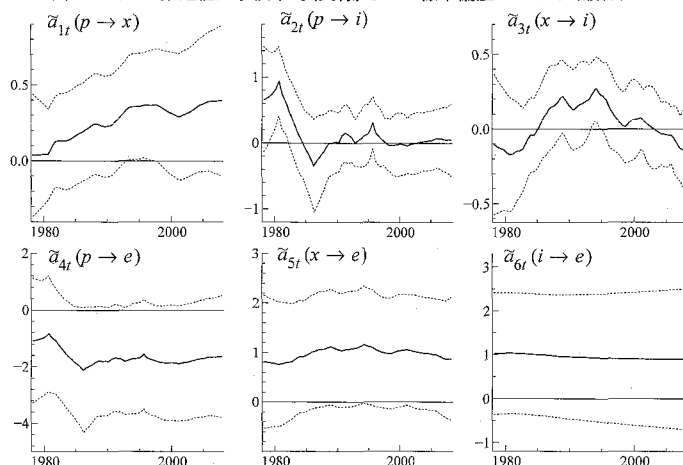
本節では, TVP-VAR モデルを第3節で解説したベイズ推定法により日本のマクロデータに応用する. 推定に用いたデータ(四半期ベース)は, 消費者物価指数( $p$ ), GDP ギャップ( $x$ ), 金利ギャップ( $i$ ), 名目実効為替レート( $e$ )の4変数である. 消費者物価指数(総合除く生鮮食品, 季節調整済み)は前年比をとってインフレ率とし, GDP ギャップは日本銀行作成系列, 金利ギャップはコールレート(オーバーナイト物)にHP フィルターをかけた趨勢の動きからの対数乖離を用いた. また, 為替レートは前期比を用いた<sup>8)</sup>. 期間は1977年第I四半期から2007年第IV四半期までを推定に用いた. 図1に時系列プロットが描かれている. モデルのVAR ショックの識別には2節で説明したコレスキー分解を用いており,  $y_t$  の変数の順序は上で説明した順である. 物価は他の同時点の変数の動きにあまり左右されず, また, 金融政策決定の情報には実物変数の動きが考慮されると仮定し, コールレートを物価やGDP ギャップよりも内生的な変数として識別している. 為替レートは経済変数の動きに敏感に反応するため, 最も内生的で他の全ての変数に同時点で反応す

ると仮定している.

ラグ次数を1から5まで変えてモデルを推定し, 周辺尤度(marginal likelihood)を計算したところ, ラグ次数3のときに最大となったため, 以下の結果はラグ次数3のモデルについて報告する<sup>9)</sup>. 事前分布は次のように設定した.  $\Sigma_\beta \sim IW(100, 0.1I)$ ,  $w_{ai}^2 \sim IG(2, 0.01)$ ,  $w_{bi}^2 \sim IG(2, 0.01)$ ,  $a_{t+1} \sim N(0, 10I)$ ,  $h_{s+1} \sim N(0, 100I)$ . 時変パラメータの分散については,  $\beta_t$  が比較的緩やかに推移する一方,  $a_t$  と  $h_t$  には相対的に大きな動きを許容しているといえる. 時変パラメータの初期値に関しては, フラットな事前分布を設定している. MCMC 法による推定は, 稼動検査(burn-in)期間として最初の5,000個を捨てた後, 50,000個のサンプルを発生させた<sup>10)</sup>.

### 5.2 時変パラメータの推定結果

図1の下段には構造ショックの分散, つまり  $\sigma_{it}^2 = \exp(h_{it})$  の推定値が描かれている. 実線が事後平均, 点線が事後平均から  $\pm 1$  標準偏差の幅をもつバンドである. 物価は1970年代末の第二次石油危機を主因としてボラティリティが高まっている. その後は, 比較的安定しているようにみえるが, 2000年代に入ってからデフレ化の状況で事後標準偏差が大きくなっており, VAR のシステムで捉えきれないショック

図2.  $A_t^{-1}$ の推定値、事後平均(実線)と $\pm 1$ 標準偏差のバンド(破線)。

のボラティリティが上昇していた可能性がある。GDPギャップのボラティリティは1980年以降、低下してきている。金利の動きをみると、1980年代に2度の大きな金融政策ショックが推定されている。また、1990年代後半からはゼロ金利政策、量的緩和政策によりボラティリティはほぼゼロに近づいている。為替レートは他の変数に比べてボラティリティの水準が高いが、1970年代末、80年代末、90年代末にそれぞれボラティリティの上昇がみられる。

次に、図2はショックの同時点相関である  $A_t^{-1}$  の事後平均および事後平均から $\pm 1$ 標準偏差の幅をもつバンドを描いたものである<sup>11)</sup>。いずれの同時点相関も標準的な経済理論とおおむね整合的である。特に、金利ギャップへの波及経路である、 $\tilde{a}_{2t}(p \rightarrow i)$ と $\tilde{a}_{3t}(x \rightarrow i)$ は1980年代と1990年代に変化がみられる。

次に、TVP-VARの推定値から得られるインパルス応答関数について議論する。各時点で異なるパラメータの値となるため、インパルス応答関数も各時点で異なるものが描かれる。まず、加えるショックのサイズは、特に理由がなければ、サンプル期間を通じて一定とすることが多い。本稿では、構造ショックのボラティリティ(標準偏差)の期間平均値、 $\tilde{\sigma}_i = \Sigma_{t=s+1}^n \exp(h_{ii}/2)$ を用いる。すなわち、サンプル期間で推定された構造ショックの平均的なサイズがシステムに加わった場合のインパルス応答を考える。時点  $t$  において、 $\varepsilon_{it} \equiv \sigma_{ii} e_{it} = \tilde{\sigma}_i$  の構造ショックが加わり、同時点相関  $a_t$  を用いてショック時点でのインパルス応答が得られる。

1期先のインパルス応答は、 $\beta_{t+1}$ を用いて計算され、同様に  $\tau$  期先までのインパルス応答は、 $\beta_{t+1}, \dots, \beta_{t+\tau}$  を用いて順に計算される。サンプル期間の終盤 ( $t > n - \tau$ ) は  $\beta_{t+\tau}$  を得ることができないため、 $\beta_{t+\tau} = \beta_{t+\tau-1}$  とする。このインパルス応答関数はMCMCで毎回計算することにより、事後平均や事後分散を得ることができる<sup>12)</sup>。

TVP-VARモデルによって得られたインパルス応答関数はそれぞれの変数のショック及び応答について、(1)サンプルにおける時点、(2)ショックからの経過時間、(3)応答のサイズの3次元プロットが得られる。例えば、図3はGDPショックに対する物価のインパルス応答 ( $\varepsilon_x \rightarrow p$ ) を3次元で描いたものである。インパルス応答の形状は時期によって大きく異なっているのがわかる。1980年代前半と1990年代中頃に他の時期より大きなインパルス応答が観察されるが、前者がショックから6四半期後にピークを迎えて減衰する一方、後者はショックから3、4年後に至るまで緩やかに上昇している。2000年以降はインパルス応答のサイズが小さくなっており、長期的なデフレーションにおいてGDPショックによる物価の上昇圧力が弱まっていたものと推測される。

インパルス応答の形によっては、3次元プロットでは全体像が把握し難いことがあるため、上述(1)か(2)のどちらかを固定して2次元プロットで表わすことが多い。例えば、図4は図3のインパルス応答を1980年、1990年、2000年の3時点(全て第I四半期)で描いたものである。

図 3. GDP ショックに対する物価のインパルス応答関数 ( $\varepsilon_x \rightarrow p$ ).  $x$  軸 (Year) はデータ期間の各時点,  $y$  軸 (Horizon) はショックからの経過時間 (四半期),  $z$  軸は応答のサイズ (事後平均) を表す.

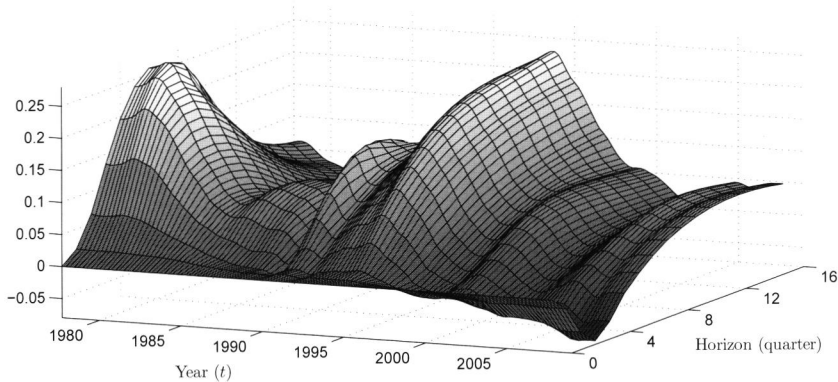
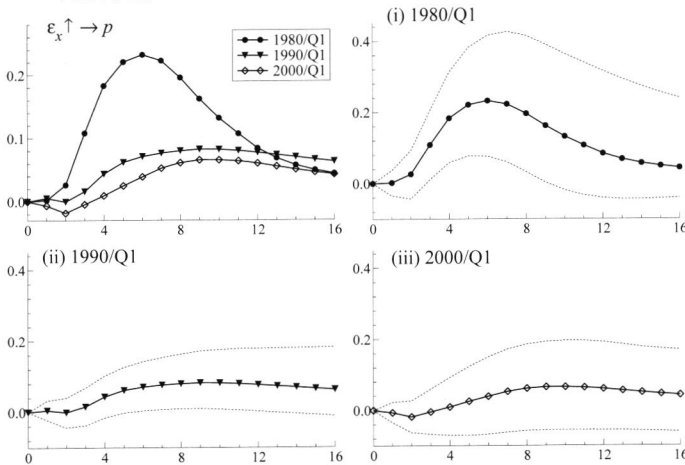


図 4. GDP ショックに対する物価のインパルス応答関数 ( $\varepsilon_x \rightarrow p$ ). 事後メディアン (実線) と, 25%-75% の信用区間 (点線).  $x$  軸はショックからの経過時間 (四半期).



図には事後メディアン (50% 分位点; 実線) と 25%-75% の信用区間 (点線) が描かれている. 1980 年は他の 2 時点よりも大きなインパルス応答となっているほか, 1990 年と 2000 年は事後メディアンの大きさは大差ないが後者の方が信用区間が広がっており, GDP ショックから物価への波及経路の不確実性がそれ以前に比べて高まったと考えられる.

また, 図 5 はショックから 1 年後, 2 年後, 3 年後の応答のサイズを全ての変数間の応答について時系列プロットしたものである. 全体的に, 同じサンプル期間で  $(p, x, i)$  の 3 変数 TVP-VAR を推計した Nakajima (2011a) と整合的な結果が得られており, 多くのインパルス応答で時期による違いが観察されている. 例えば, 物価ショックに対する GDP ギャップの応

答 ( $\varepsilon_p \rightarrow x$ ) は, 1990 年代前半までは負の連関がみられるが, それ以降は逆に正の連関になっている. これは長期的な不況の中で物価の下落が GDP ギャップの下落につながるデフレ・スパイラルの可能性を示唆している. また, 為替レートショックに対する GDP ギャップの応答 ( $\varepsilon_e \rightarrow x$ ) をみると, サンプル期間を通じておおむね正の連関がみられるが, 2000 年代に入ると負の方向にシフトしている. これは円安の恩恵を受けて経済が拡大したこの時期の構造を反映しているものと考えられる. 以上の

ように, TVP-VAR モデルは時期による構造ショックの変動や経済構造の違いを様々な側面から吟味することができる.

### 5.3 予測精度の比較

本節では, TVP-VAR モデルの予測精度を固定パラメータモデルと比較することにより, 時変パラメータの役割を検討する. 予測精度のモデル比較には様々な方法が考えられるが, 本稿では以下のように予測分布に基づいた予測値を用いる. TVP-VAR モデルを例にとると,  $n$  時点までのデータ ( $\mathbf{Y}_n$  とおく) が得られたときの 1 期先予測値  $\mathbf{y}_{n+1}$  の事後確率密度関数は次のように表せる.

$$g(\mathbf{y}_{n+1} | \mathbf{Y}_n)$$

図5. インパルス応答関数の事後平均。ショックから1年後(実線), 2年後(破線), 3年後(点線)のインパルス応答。

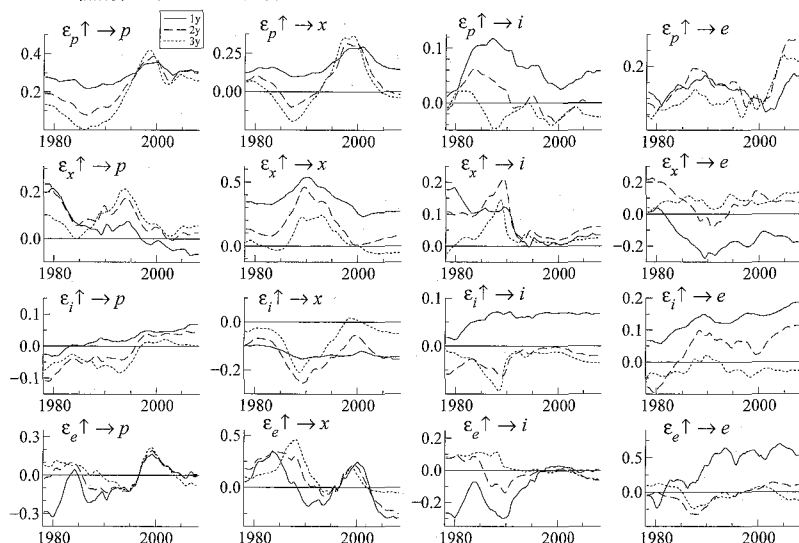


表1. 予測精度によるモデル比較。

| 時変パラメータ           | 物価( $p$ ) | GDP( $x$ ) | 金利( $i$ ) | 為替( $e$ ) | 合計    |
|-------------------|-----------|------------|-----------|-----------|-------|
| (1) $\beta$       | 2.630     | 1.055      | 0.825     | 0.995     | 1.047 |
| (2) $\beta, a$    | 1.386     | 1.010      | 1.438     | 1.050     | 1.061 |
| (3) $h$           | 0.809     | 1.008      | 0.731     | 1.002     | 0.996 |
| (4) $a, h$        | 0.755     | 0.999      | 0.691     | 0.992     | 0.985 |
| (5) $\beta, h$    | 0.738     | 0.977      | 0.573     | 0.979     | 0.971 |
| (6) $\beta, a, h$ | 0.733     | 0.980      | 0.605     | 0.976     | 0.968 |

注) 数値は固定パラメータ VAR モデルに対する相対 RMSE を表わす。

$$\propto \int f(y_{n+1} | \beta, a, h, \omega, Y_n) \pi(\beta, a, h, \omega | Y_n) d\beta da dh d\omega. \quad (12)$$

ただし、 $g(\cdot|\cdot)$ ,  $f(\cdot|\cdot)$ ,  $\pi(\cdot|\cdot)$  はすべて条件付密度関数を表す。

第3節で説明した MCMC 法のアルゴリズムに次のステップを加えることによって、 $y_{n+1}$  の予測分布からの確率標本を得ることができる。

- (1)  $(\beta_{n+1}, a_{n+1}, h_{n+1}) | \beta_n, a_n, h_n, \omega$  からサンプリングする。
- (2)  $y_{n+1} | \beta_{n+1}, a_{n+1}, h_{n+1}, y_n, \dots, y_{n-s+1}$  からサンプリングする。

$h$  期先予測値  $y_{n+h}$  ( $h=2, 3, \dots$ ) も同様にしてサンプリングすることができる<sup>13)</sup>。

前節で用いたマクロデータから1~4期先の予測分布を推定し、その事後平均と実現値の差を予測誤差とする。具体的には、まず1977年第I四半期~1991年第IV四半期をデータとして1992年第I~IV四半期を予測する。つまり、前年末までのデータを入手した状態でその年の4四半期分の推移を予測することを考える。次

に1992年第IV四半期までの期間をデータとして翌年の1993年第I~IV四半期を予測する。このようにして、2007年第I~IV四半期までの合計16年間の予測誤差を集計する。予測精度としては平均二乗誤差(RMSE; Root Mean Square Error)を用いる。なお、GDPおよび金利については、全期間の趨勢の動きから算出されたギャップを用いているので、サンプル期間の途中で実際に利用可能であった値とは異なることに留意が必要である。

表1には、予測精度によるモデル比較の結果が報告されている。固定パラメータ VAR モデルのほか、 $(\beta, a, h)$  のうちいくつかが時変でそれ以外が固定となっている5種類の VAR モデル

(表の1列目に時変と仮定されたパラメータのセットが記されている)、および TVP-VAR モデル(表の(6))を比較しており、表中の数値は固定パラメータ VAR モデルの RMSE を1としたときの相対 RMSE を表している。結果を見ると、ボラティリティを固定にしたモデル(1)と(2)が固定パラメータモデルよりいくつかの変数で予測精度が悪化している。これは Sims(2001)や Stock(2001)の指摘にもある通り、時変係数が(モデル(2)の場合、同時点相関も)本来の分散変動を吸収してしまうことにより、余計な変動を捉えてしまっている可能性が示唆される。一方、分散を時変にすると係数が固定であっても予測精度は改善している(モデル(3)、(4))。同時点相関( $a$ )の時変性についてモデル(5)と(6)を比較すると、ほぼ同程度の予測精度であるため、追加的な予測精度の向上は $\beta$ や $h$ に比べると小さいのかもしれない。全てを時変にした TVP-VAR モデル(6)は、固定パラメータ VAR モデルに比べてどの変数でも予測精度を改善していることがわかった。

## 6. まとめと今後の課題

本稿では、TVP-VAR モデルの推定方法を解説するとともに、関連文献における最近の展開および日本のマクロデータを用いたモデルの推定例を紹介した。日本のマクロデータはここ30年間で変数間の相互関連性に大きな変化が起きたことが示された。また、予測精度を基準としたモデル比較を行い、時変係数や時変ボラティリティによってVARの予測精度が大きく高まることを確認した。こうした時変VARモデルの開発は、様々なマクロデータを用いて実証研究が蓄積されているところである。以下、今後の課題について述べる。

1点目は、ゼロ金利期間に関する問題である。第4節で触れた通り、TVP-VARモデルはデータがゼロの値を続けてもパラメータが動いてしまうので、データにゼロ金利期間が含まれると実感にそぐわない結果が得られることがある。Nakajima(2011b)やNakajima and West(2010)がそれぞれ非線形性を取り入れた解決法を提示しているが、Koop *et al.*(2009)やChan *et al.*(2010)の方法をゼロ金利期間を含むデータに適用するのは興味深い。また、Franta(2011)のように符号制約によるアプローチもあるが、頑健性も含めてさらなる研究の蓄積が期待される。日本だけでなく主要先進国において政策金利がゼロに近づいている昨今の状況下では、ゼロ金利制約を加えた推定が重要であると思われる。

これに関連して、2点目は時変パラメータのモデル選択についてである。TVP-VARモデルには非常に多くのパラメータが潜在変数として含まれるため、その数を統計的に減らすことによってモデルのあてはまりおよび予測力を改善しようとする研究が増えてきた。例えば、Koop *et al.*(2009)、Nakajima and West(2010)、Chan *et al.*(2010)等である。ただ単純に基本的なTVP-VARモデルをデータにあてはめるだけでなく、統計的に不要なパラメータが含まれていないかということに関して、頑健性のチェックが重要である。

3点目は、TVP-VARモデルの予測精度について他のモデルとの比較も興味深い。時変パラメータについてランダム・ウォークを仮定する場合が多いが、例えば定常なAR(1)モデルを

仮定した場合や、マルコフ・スイッチングを仮定した場合との予測精度の比較、また、AR過程等の時系列モデルとの比較は、特に中央銀行や民間機関の実務においても重要な論点であると思われる。

最後に4点目は、最近の金融危機におけるリーマンショック等、非常に不規則な観測値をデータに含める場合、SVモデルに従う誤差項だけでは十分でなく、誤差項が従う分布として $t$ 分布等の正規分布よりも裾の厚い分布を仮定する必要があるかもしれない。直近までのデータを用いた分析としては、このような発展形についても考えていく必要があると思われる。

(デューク大学統計学部博士課程・一橋大学経済研究所)

## 注

1) 本研究は、一橋大学グローバルCOEプログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」、文部科学省科学研究費基盤研究(A)「金融危機下のマクロ経済政策の計量分析」(代表者：渡部敏明)、文部科学省科学研究費基盤研究(A)「金融リスクと経済行動のベイズ計量経済分析」(代表者：大森裕浩)から助成を受けている。一橋大学経済研究所定例研究会参加者および討論者の石原庸博氏(一橋大学経済学研究科)から多くの貴重なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。

2) どのようなバイアスが生じるか、Nakajima(2011a)がシミュレーション・データを使って議論している。

3) それ以前にUhlig(1997)等が構造ショックの分散に確率的ボラティリティを用いている。

4) リカーシブ制約を用いた構造ショックの識別は $y_t$ の変数の順序に依存する。従来の固定パラメータVARモデルの場合、共分散行列 $\Omega$ を推定してから $\Omega$ をコレスキー分解することで構造ショックを識別するため、係数 $\beta$ の推定値は $y_t$ の変数の順序によって影響を受けない(つまり、変数順序によって尤度は変わらない)。ここで、固定パラメータVARモデルでは、共分散行列や係数が一定なので、 $\Omega, \beta$ の添え字 $t$ を削除した。しかし、TVP-VARモデルの場合は、構造ショックの同時相関パラメータ $a_t$ が時間を通じて変化するため、 $y_t$ の変数順序は係数 $\beta_t$ の推定値にも影響を与える(変数順序によって尤度が変わる)。このことに注目して、Nakajima and Watanabe(2011)はTVP-VARモデルにReversible jump MCMC法を適用し、あてはまりの良い変数順序を選択する方法を提案している。

5) 構造ショックの分散が一定の場合は、カルマン・フィルターを使って最尤推定が可能である。

6) 時変VARモデルの推定プログラムがいくつか

公開されている。Koop and Korobilis(2010)が固定パラメータ VAR, TVP-VAR, TVP-FAVAR モデルのベイズ推定について包括的に解説を行っており、MATLAB による推計プログラムを提供している (Gary Koop のホームページ <http://personal.strath.ac.uk/gary.koop/research.htm> からダウンロード可能)。また、Nakajima(2011a)は TVP-VAR モデルのサーベイおよび解説を行っており、MATLAB および Ox によるプログラムを提供している (中島のホームページ <https://sites.google.com/site/jnakajimaweb/tvpvar> からダウンロード可能)。

7) 中島・渡部(2012)の補論を参照されたい。

8) 消費者物価指数は1989年4月の消費税導入と1997年4月の消費税率引き上げの影響を調整した。コールレートの原系列は1988年11月以前は有担保コールレート、それ以降は無担保コールレートをを用いた。GDPギャップ以外は月次データを取得し、四半期平均を計算してからフィルタや階差等の加工を行った。

9) さらに、時変定数項  $\alpha_t$  を含むモデルと含まないモデルでモデル選択を行った結果、含まないモデルの方が周辺尤度が高かったため、 $\alpha_t$  を除いた TVP-VAR モデルの推定結果を報告する。TVP-VAR モデルの周辺尤度の計算については、Nakajima *et al.* (2011)を参照されたい。

10) MCMC の収束判定や非効率性因子 (inefficiency factor) についての結果は、注7と同じく、中島・渡部(2012)を参照されたい。なお、本稿における数値計算は全て行列言語 Ox5.0 (Doornik(2006)) を用いている。

11) MCMC でサンプリングされた  $a_t$  から  $A_t^{-1}$  を計算し対応する時変パラメータを  $\bar{a}_t$  として事後分布を推定した。 $A_t^{-1}$  も対角成分が1の下三角上列であり、 $\bar{a}_t$  は  $\{a_{it}\}_{i=1}^q$  の線形結合で表される。

12) 簡便な方法として、時変パラメータの事後平均を用いてインパルス応答関数を描くこともできる。実際、本稿のデータについて MCMC で毎回計算して求めたインパルス応答関数の事後平均と比較すると、ほとんど変わらなかった。厳密に両者は一致しないが、インパルス応答関数の計算はパラメータのサンプリングに比べて計算負荷が高いため、時変パラメータの事後平均を用いた方が計算時間の短縮になる。ただし、この方法はあくまでも近似的であり、また、インパルス応答の信用区間を得ることもできない。

13) これらの予測分布から Bank of England 等の中央銀行が公表している予測ファン・チャート (Fan chart) に相当する図を描くこともできる。TVP-VAR モデルを用いたファン・チャートについて、Cogley *et al.* (2005) が詳しく議論している。

## 参 考 文 献

- 伊庭幸人・種村正美・大森裕浩・和合肇・佐藤整尚・高橋明彦(2001)『計算統計Ⅱマルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』岩波書店。  
小西貞則・越智義道・大森裕浩(2008)『計算統計学の方法——ブートストラップ、EM アルゴリズム、MCMC』朝倉書店。  
宮尾龍蔵(2006)『マクロ金融政策の時系列分析』日本

経済新聞社。

中島上智・渡部敏明(2012)「時変ベクトル自己回帰モデル——サーベイと日本のマクロデータへの応用——」Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 232, Hitotsubashi University.

中妻照雄(2007)『入門ベイズ統計学』朝倉書店。

西崎健司・上野陽一・田中昌宏(2011)「日本の物価変動の背景：事実と論点の整理」日本銀行ワーキングペーパーシリーズ No. 11-J-9.

大森裕浩・渡部敏明(2008)「MCMC とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」国友直人・山本拓(編)『21世紀の統計科学Ⅰ社会・経済と統計科学』東京大学出版会、第9章、pp. 223-266.

照山博司(2001)「VAR による金融政策の分析：展望」『フィナンシャル・レビュー』第59号、pp. 74-140.

和合肇(編)(2005)『ベイズ計量経済分析 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社。

渡部敏明(2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店。

Baumeister, C. and L. Benati (2010) "Unconventional Monetary Policy and the Great Recession — Estimating the Impact of a Compression in the Yield Spread at the Zero Lower Bound," Working Paper Series 1258, European Central Bank.

Baumeister, C., P. Liu and H. Mumtaz (2010) "Changes in the Transmission of Monetary Policy: Evidence from a Time-Varying Factor-Augmented VAR," Working Paper No. 401, Bank of England.

Benati, L. (2008) "The "Great Moderation" in the United Kingdom," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 40, No. 1, pp. 121-147.

Benati, L. and P. Surico (2008) "Evolving U.S. Monetary Policy and the Decline of Inflation Predictability," *Journal of the European Economic Association*, Vol. 6, No. 2-3, pp. 643-646.

Bernanke, B., J. Boivin and P. Elias (2005) "Measuring the Effects of Monetary Policy: A Factor-augmented Vector Autoregressive (FAVAR) Approach," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 120, No. 1, pp. 387-422.

Bianchi, F., H. Mumtaz and P. Surico (2009) "The Great Moderation of the Term Structure of UK Interest Rates," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 56, No. 6, pp. 856-871.

Canova, F. (1993) "Modelling and Forecasting Exchange-Rates with a Bayesian Time-Varying Coefficient Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, No. 1-2, pp. 233-261.

Canova, F. and L. Gambetti (2009) "Structural Changes in the US Economy: Is there a Role for Monetary Policy?" *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 2, pp. 477-490.

Chan, J. C. C., G. Koop, R. Leon-Gonzalez, and R. W. Strachan (2010) "Time Varying Dimension Models," Discussion papers in Economics, No. 11-16, Department of Economics, University of Strath-

- cllyde, Glasgow.
- Christiano, L. J., M. Eichenbaum and C. L. Evans (1999) "Monetary Policy Shocks: What Have We Learned and to What End?" in J. B. Taylor and M. Woodford eds. *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 3, Amsterdam, Elsevier Science B. V., pp. 65-148.
- Clyde, M. and E. I. George (2004) "Model Uncertainty," *Statistical Science*, Vol. 19, No. 1, pp. 81-94.
- Cogley, T., S. Morozov and T. J. Sargent (2005) "Bayesian fan Charts for U.K. Inflation: Forecasting and Sources of Uncertainty in an Evolving Monetary System," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 29, No. 11, pp. 1893-1925.
- Cogley, T. and T. J. Sargent (2001) "Evolving post World War II U.S. Inflation Dynamics," *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 16, pp. 331-373.
- Cogley, T. and T. J. Sargent (2005) "Drifts and Volatilities: Monetary Policies and Outcomes in the Post WWII U.S.," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 8, No. 2, pp. 262-302.
- D'Agostino, A., L. Gambetti and D. Giannone (2012) "Macroeconomic Forecasting and Structural Change," *Journal of Applied Econometrics*, in Press.
- de Jong, P. and N. Shephard (1995) "The Simulation Smoother for Time Series Models," *Biometrika*, Vol. 82, No. 2, pp. 339-350.
- Diebold, F., G. Rudebusch and S. Aruoba (2006) "The Macroeconomy and the Yield Curve," *Journal of Econometrics*, Vol. 131, No. 1-2, pp. 309-338.
- Doornik, J. A. (2006) *Ox: Object Oriented Matrix Programming*, London, Timberlake Consultants Press.
- Durbin, J. and S. J. Koopman (2002) "Simple and Efficient Simulation Smoother for State Space Time Series Analysis," *Biometrika*, Vol. 89, No. 3, pp. 603-616.
- Franta, M. (2011) "Identification of Monetary Policy Shocks in Japan Using Sign Restrictions within the TVP-VAR Framework," IMES Discussion Paper, 2011-E-13, Bank of Japan.
- Gamerman, D. and H. F. Lopes (2006) *Markov Chain Monte Carlo, Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2nd edition.
- George, E. I. and R. E. McCulloch (1997) "Approaches for Bayesian Variable Selection," *Statistica Sinica*, Vol. 7, pp. 339-373.
- George, E. I., D. Sun and S. Ni (2008) "Bayesian Stochastic Search for VAR Model Restrictions," *Journal of Econometrics*, Vol. 142, No. 1, pp. 553-580.
- Geweke, J. (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith eds. *Bayesian Statistics*, Vol. 4, New York, Oxford University Press, pp. 169-188.
- Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault (2002) "Stochastic Volatility," in C. R. Rao and G. S. Maddala eds. *Statistical Methods in Finance*, Amsterdam: North-Holland, pp. 119-191.
- Iwata, S. and S. Wu (2006) "Estimating Monetary Policy Effects When Interest Rates are Close to Zero," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 53, No. 7, pp. 1395-1408.
- Kim, C. J. and C. R. Nelson (1999) *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, MIT Press.
- Kim, S., N. Shephard and S. Chib (1998) "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," *Review of Economic Studies*, Vol. 65, No. 3, pp. 361-393.
- Koop, G. (2003) *Bayesian Econometrics*, Hemel Hempstead, Wiley-Interscience.
- Koop, G. and D. Korobilis (2010) "Bayesian Multivariate Time Series Methods for Empirical Macroeconomics," *Foundations and Trends in Econometrics*, Vol. 3, No. 4, pp. 267-358.
- Koop, G., R. Leon-Gonzalez and R. W. Strachan (2009) "On the Evolution of the Monetary Policy Transmission Mechanism," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 4, pp. 997-1017.
- Koop, G., R. Leon-Gonzalez and R. W. Strachan (2011) "Bayesian Inference in a Time Varying Cointegration Model," *Journal of Econometrics*, Vol. 165, No. 2, pp. 210-220.
- Koop, G. and S. M. Potter (2011) "Time Varying VARs with Inequality Restrictions," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 35, No. 7, pp. 1126-1138.
- Korobilis, D. (2008) "Forecasting in Vector Autoregressions with Many Predictors," *Advances in Econometrics*, Vol. 23, pp. 403-431.
- Korobilis, D. (2009) "Assessing the Transmission of Monetary Policy Shocks Using Dynamic Factor Models," University of Strathclyde, Discussion Papers in Economics, No. 09-14.
- Korobilis, D. (2010) "VAR Forecasting Using Bayesian Variable Selection," Working Paper, The Rimini Centre for Economic Analysis (RCEA), Universite Catholique de Louvain.
- Leeper, E. M., C. A. Sims and T. Zha (1996) "What Does Monetary Policy Do?" *Brookings Papers on Economic Activity*, Vol. 2, No. 2, pp. 1-63.
- Lucas, R. E. (1976) "Econometric Policy Evaluation: A Critique," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 1, pp. 19-46.
- Moussa, Z. (2010) "The Japanese Quantitative Easing Policy under Scrutiny: A Time-Varying Parameter Factor-Augmented VAR Model," MPRA Paper 29429, University Library of Munich, Germany.
- Mumtaz, H. and P. Surico (2009) "Time-Varying Yield Curve Dynamics and Monetary Policy," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 24, No. 6, pp.

- 895-913.
- Mumtaz, H., P. Zabczyk and C. Ellis (2011) "What Lies Beneath? : A Time-Varying FAVAR Model for the UK Transmission Mechanism," Working Paper Series 1320, European Central Bank.
- Nakajima, J. (2011a) "Time-Varying Parameter VAR Model with Stochastic Volatility: An Overview of Methodology and Empirical Applications," *Monetary and Economic Studies*, Vol. 29, pp. 107-142.
- Nakajima, J. (2011b) "Monetary Policy Transmission under Zero Interest Rates: An Extended Time-Varying Parameter Vector Autoregression Approach," *The B. E. Journal of Macroeconomics*, Vol. 11, Issue 1(Topics) Article 32.
- Nakajima, J., M. Kasuya and T. Watanabe (2011) "Bayesian Analysis of Time-Varying Parameter Vector Autoregressive Model for the Japanese Economy and Monetary Policy," *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 25, No. 3, pp. 225-245.
- Nakajima, J., S. Shiratsuka and Y. Teranishi (2010) "The Effects of Monetary Policy Commitment: Evidence from Time-Varying Parameter VAR Analysis," IMES Discussion Paper, 2010-E-6, Bank of Japan.
- Nakajima, J. and T. Watanabe (2011) "Bayesian Analysis of Time-Varying Parameter Vector Autoregressive Model with the Ordering of Variables for the Japanese Economy and Monetary Policy," Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 196, Hitotsubashi University.
- Nakajima, J. and M. West (2010) "Bayesian Analysis of Latent Threshold Dynamic Models," Working Paper 10-25, Department of Statistical Science, Duke University.
- Nelson, C. and A. Siegel (1987) "Parsimonious Modeling of Yield Curves," *Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp. 473-487.
- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard and J. Nakajima (2007) "Stochastic Volatility with Leverage: Fast Likelihood Inference," *Journal of Econometrics*, Vol. 140, No. 2, pp. 425-449.
- Omori, Y. and T. Watanabe (2008) "Block Sampler and Posterior Mode Estimation for Asymmetric Stochastic Volatility Models," *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 52, No. 6, pp. 2892-2910.
- Primiceri, G. E. (2005) "Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy," *Review of Economic Studies*, Vol. 72, No. 3, pp. 821-852.
- Shephard, N. ed. (2005) *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford, Oxford University Press.
- Shephard, N. and M. Pitt (1997) "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika*, Vol. 84, No. 3, pp. 653-667.
- Sims, C. A. (1980) "Macroeconomics and Reality," *Econometrica*, Vol. 48, No. 1, pp. 1-48.
- Sims, C. A. (1993) "A 9Variable Probabilistic Macroeconomic Forecasting Model," in J. H. Stock and M. W. Watson eds. *Business Cycles, Indicators and Forecasting*, *NBER Studies in Business Cycles*, Vol. 28, pp. 179-214.
- Sims, C. A. (2001) "Comment on Sargent and Cogley's 'Evolving post World War II U.S. Inflation Dynamics'," *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 16, pp. 373-379.
- Stock, J. H. (2001) "Discussion of Sargent and Cogley's 'Evolving Post World War II U.S. Inflation Dynamics'," *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 16, pp. 379-387.
- Stock, J. H. and M. W. Watson (1996) "Evidence on Structural Instability in Macroeconomic Time Series Relations," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 14, No. 1, pp. 11-30.
- Uhlig, H. (1997) "Bayesian Vector Autoregressions with Stochastic Volatility," *Econometrica*, Vol. 65, No. 1, pp. 59-79.
- Uhlig, H. (2005) "What are the Effects of Monetary Policy on Output? Results from an Agnostic Identification Procedure," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 52, No. 2, pp. 381-419.
- Watanabe, T. and Y. Omori (2004) "A Multi-Move Sampler for Estimating Non-Gaussian Time Series Models: Comments on Shephard and Pitt (1997)," *Biometrika*, Vol. 91, No. 1, pp. 246-248.