

足立高德氏 博士論文審査要旨

ここ四半世紀ほどの間に、金融機関に求められる金融リスク計測・管理の在り方は断続的に各方面で見直しをされてきている。特に、(バーゼル合意と呼ばれる) 国際的に活動している銀行の(リスク対比で計算される) 最低自己資本比率などに関する国際統一基準は厳格化の方向に動いており、銀行の活動に大きな影響を及ぼしている。

こうした実務的な動きとある部分で呼応するように、学術的な面では「多期間」における金融リスク計測の在り方が最近議論されるようになってきた。従来から「1 期間」のリスク量を定量化するリスク尺度が用いられてきたが、そうした 1 期間リスク尺度では長期的な資産運用のリスク評価を適切に行えない側面があることが指摘されたためである。

数理ファイナンス分野では、このような「多期間」における不確実性の問題を扱う場合には、確率論におけるフィルトレーション (filtration, 増大情報系) と呼ばれる情報の時間発展構造の概念が問題の定式化において欠かせない。これによって、対象とする金融リスクに関係する確率変数を、評価時点において入手可能な情報に関する条件付き確率分布や条件付き期待値の計算を通じて、適切なリスク評価が行えることが期待される。

一方で、2008 年 9 月のいわゆるリーマンショックなどに象徴される想定外の出来事は、「一つの客観的な確率分布」を想定してリスク評価を完結させることに対する警鐘であるという論調も見られた。Frank H. Knight はその著書 *Risk, Uncertainty and Profit* の中で、確率分布が想定できる不確実性である「リスク (risk)」と、確率的に評価することが困難な「不確実性 (Knightian uncertainty)」を区別していた。そうした区別に立ち戻って考えると、金融機関のリスク計測という行為は、確率的な評価が本来難しい不確実性に対しても、何らかの客観的な確率分布の下で無理にでも「リスク」という数量を計算するということであると言えるが、そうした行為の正当性が疑わしくなったわけである。

実は、意思決定理論 (decision theory) の枠組みでは、1950 年代にはすでに「曖昧性 (ambiguity)」という概念で、一つの客観的確率ではなく複数の主観的確率に基づいて不確実性の問題を考えるというアイデアが論じられていたことは注意に値する。

こうした金融リスク計量に関する実務的・学術的な状況を背景として、足立氏の博士論文では「フィルトレーション」と「曖昧性」という二つの視点から、以下の三つのトピックを論じている。

一つ目のトピックでは、市場参加者が把握できる情報が確率的に遅延して伝達される状況を「追従過程 (follower process)」という新しい概念によって定式化し、その数学的性質を丁寧に解明している。また、基本的なファイナンスのモデルにおいて、追従過程によって特徴づけられる「追従フィルトレーション」に関する条件付き期待値を簡便に計算する手法が示され、信用リスクなどの評価の精緻化への応用が可能となっている。

二つ目のトピックでは、最初のトピックで扱われた (いわば外因性の) 情報の非対称性だけでなく、各市場参加者の直感力あるいは洞察力に起因するような「情報の精密さ」を表現する枠組みを「拡張状態 (extended state)」という新しい概念を導入して定式化することを試みている。これは従来の主観的確率の多様性による「事前確率による曖昧性 (prior ambiguity)」に対して、観察者の合理性の度合いに基づく「状態の曖昧性 (state ambiguity)」を扱っているものと解釈できる。

最後のトピックでは、多期間リスク尺度を論じるうえで「フィルトレーション」と「曖昧性」の両面を同時に扱うことができる新たな枠組みとして、従来のファイナンス研究では用いられていなかった「圏論」と

いう数学理論を用いるという斬新なアイデアを提唱している。特に、多期間リスク尺度を定義する際にどのような公理群を与えることが妥当であるのか、という基準を圏論の言葉で特徴づけることを目指し、一定の成果を得ている。

具体的には、同博士論文は、以下の五つの章と付録からなる。まず第1章 Introduction では、研究の目的およびその背景が説明されるとともに、論文全体で共通して用いられる数学的設定が与えられている。

第2章 Follower processes (追従過程) では、実際の時刻 t において市場参加者が入手できる情報は $f_t \leq t$ という不等式条件などを満たすランダムな時刻 f_t までに起こった事象に整合的な情報であると解釈することで、情報遅延 (ひいてはある種の情報の非対称性) が起こる世界を想定する。元々は信用リスクの構造型モデルにおける「企業の真の財務状態」に関する情報の遅延によって信用リスク評価がどのように影響されるかという問題を考えることが動機である。

上記のような非減少な確率時刻の系 $\{f_t\}$ を確率過程と見なして「追従過程」と定義している。追従過程は、Guo, Jarrow and Zeng が導入した時変過程 (time change process) のうち「各確率時刻 f_t が停止時刻である」という条件を外すことによって、再生過程 (renewal process) などの自然な情報遅延の例が含まれるよう一般化された形になっている。また、 $f_{f_t} = f_t$ という関係を常に満たす追従過程のクラスを、冪等追従過程 (idempotent follower process) と呼び、これは時変過程では表現しがたいことや、honest times と呼ばれる確率時刻のクラスと関係づけられることなどを証明している。

さらに、追従過程によって生成される「追従フィルトレーション」の厳密な定義を与えて、いくつかの性質を証明するとともに、応用例として、離散時間二項モデルにおいては、冪等追従過程で特徴づけられた追従フィルトレーションに関する条件付き期待値に対するある種のマルコフ性を示すことで、クレジットデリバティブ評価への応用可能性が示唆されている。

第3章 Extended states では、観測者の情報把握能力あるいは直観力も表現できるように従来の根元事象の集合である Ω という標本空間に対して、観測者がどのように真の事象を認識していくかという「観測者の情報把握の履歴」を表現した「拡張状態 (extended state)」という概念を導入している。これは西田幾多郎の純粹経験 (主客の別なく、何ら考えをめぐらす前の直接経験で、それ自体は何ら解釈されていないもの) に近い概念を表象したいというのが動機とされている。

あるフィルトレーション付き可測空間を構成している標本空間 Ω とフィルトレーション \mathbb{G} に対して、拡張状態は「空でない可測集合に値をとる確率過程で、集合の包含関係を順序としたときに単調非増加な性質を有するもの」として定義され、そうした拡張状態全体は $\Omega[\mathbb{G}]$ と表される。拡張状態 $e \in \Omega[\mathbb{G}]$ に対して、 $e(t)$ が時点 t での純粹経験を表し、 $\omega \in e(t)$ を選択することが純粹経験 $e(t)$ を解釈することに対応するというものである。そこで、観測者の能力を、周囲の環境 (外的理由) と観測者本人の直観力 (内的理由) の両面で特徴づけられる $\Omega[\mathbb{G}]$ の何らかの部分集合で定式化することを提唱し、特に外的理由を追従フィルトレーションによって特徴づけ、内的理由を「支配部分集合」と呼ばれるクラスで特徴づけられるような能力 S の性質を論じている。

また、拡張状態の多期間選択理論への応用として、離散時間において状態曖昧性を考慮した再帰的効用関数を定義することを試みている。

第4章 A categorical framework for filtrations and ambiguity は、フィルトレーションと曖昧性を圏論 (category theory) の枠組みで定式化し、特に多期間貨幣価値測度 (dynamic monetary value measure) の

理論を展開している。圏論は、何らかの「構造」を持った対象 (objects) とその構造を反映する対象間の射 (arrows) の集まりで与えられる「圏」と呼ばれるものの数学的構造を研究する学問分野で、数学・物理学・計算機科学などの多くの領域で広く使われているが、これまでにファイナンス分野に応用した研究はない。

圏論の枠組みを用いて貨幣価値測度を導入すると、自動的に多期間の尺度となることが分かり、なおかつ従来は多期間尺度を定義する際の公理として導入されていた時間一貫性 (time consistency) の条件が、より少ない公理だけから満たされることが示されている。一方で、時間一貫性と分布不変性 (law invariance) の両方の公理を満たす多期間リスク尺度は entropic なリスク尺度に限定されるという結果を考えると、時間一貫性は強すぎることも考えられる。そこで、圏論の言葉で特徴付けされる「観測者の主観構造」から決まる関数の族として一般化貨幣価値測度 (generalized monetary value measure) を定義することで、必ずしも時間一貫性を持たないが分布不変性を持つリスク尺度を検討できる可能性が示唆されている。

またより一般に、時間一貫性や分布不変性などの様々な公理が提案されてきたなかで、多期間リスク尺度を定義する際にどのような公理の集合を選べばよいかという規範的な問いに対する理論的な判定基準を考え、公理群の妥当性の必要十分条件が、圏論の言葉で表現されなおかつダイアグラムを通じて特徴付けられるある性質を満たすことであることを証明している。

第5章 Concluding remarks では、全体のまとめに加えて、将来の課題とそれに対する展望にも言及されている。

また、本論の中では十分に触れることができなかつた数理ファイナンスおよび圏論の内容は、付録として Appendices においてきちんと記述されている。

以上で見てきたように、足立氏の研究内容それ自体は、一般化・抽象化するという数学的指向が強いものである。しかしながら、研究動機は、金融戦略・経営財務における根幹と言える不確実性の問題を「どのように定式化して論じるべきか」という記述的かつ規範的な問題として整理・解決しようという点にあり、その問題解決のためのアプローチとして一般化・抽象化が最適であるという判断がなされたものであると博士論文を通じて理解することができる。

もちろん、「追従過程」は新しい信用リスクの不完全情報モデルの提示、「拡張状態」は経済学に関連する意思決定理論に対する新しいアプローチの提示、「圏論による定式化」は多期間リスク尺度の公理系を議論するための新しい枠組の提示、という点で、それぞれのトピックにおいてファイナンスやリスク計量の分野への学術的貢献が少なからず認められることも評価できる。

本研究で与えられたいくつかの新しい理論的な枠組みの妥当性はデータによって今後の検証を待つ必要性はあるが、金融リスク計量における問題点とそれを解決するアプローチを従来とは異なる視点から提示して、関連分野における学術研究の地平を上げたという点は十分に評価できると考える。よって、足立氏の研究は、本研究科金融戦略・経営財務コースの目標を十分体現したものであると高く評価される。最終試験の結果とあわせて、審査員一同は、足立氏の博士学位請求論文が、博士 (経営学) の学位を与えるに十分に値すると判断する。

最後に、今後の課題をいくつか列挙しておく。まず、「追従過程」の研究については、例えば、追従過程と honest times の関係性をもう少し深掘りできる可能性や、二項モデルではなくより一般的なモデルで、冪等追従過程のマルコフ性のような結果を得られる可能性などがあるので、数学的性質の点でも信用リスク評価のようなファイナンスへの応用という点でも、より完成度を高めることができると考えられる。

次に、「拡張状態」の研究は、最初の定式化の段階で検討すべき部分がまだ多い。足立氏が本当に表現し

たい「曖昧性」が、拡張状態やその部分集合である「能力」の定式化では完全に表現できていないのではないと思われる。また、全体を通じて簡単な例を通じて概念の整理をしている段階で、それを基にした強力な定理と呼べるものがまだ提示されていないと判断される。したがって、問題意識の整理を含めて定式化やその応用という面でよりいっそう慎重に検討してほしい。

最後の「圏論による定式化」についても、一般的な議論に終始していて、理論的にきれいに整理できた側面もある反面で、圏論の枠組みだからこそ見だすことができた興味深い結果や事例というものが示されていないように思われる。ファイナンス分野では学術・実務のいずれも圏論に詳しい人はほとんどいない状況であるので、圏論による定式化の効能を伝えやすくするためにも、具体的に興味をひく結果や事例を示せるように努めてほしい。

以上、課題をいくつか述べたが、これらは本論文の水準および評価を損なうものではなく、さらなる研究の継続と発展を願ってのものである。今後も、現実の金融リスクにまつわる諸問題に根差した問題意識を持ちつつ、理論面の追究に加えて理論のインプリケーションにも努力されることを切に期待する。