《研究ノート》

max, min 記法について

――応用数学と数学教育の観点から――

山　田　欽　一

0 問　題

経済学では主体の均衡条件の解明に，経営学では企業の意志決定原理の確立に，いわゆる極値原理を緒口とすることが非常に多い．極値に係わる数学としては，連続変数について微分法があり，離散変数について定差法がある．なお始原的には，考察対象の集合から極大，極小なものを選ぶ操作とその結果選ばれるものを示す記法 max, min がある．

この記法は多くの立論の中でまたは裏で活用されているにもかかわらずその基本性質は整理，明示されていないように思われる．その理由は「余りに初等すぎる話題である」ということなのかも知れない．だが，筆者は「初等」という言葉のもつ二つの面――初歩的と本質的――を忘れたくない．そんな心持から，二つの実例を通して，この記法の基本性質と考えられるものを書き留めてみたのが，このノートである．

1 配分問題

第 i 余裕場所にある r_i 個のものを第 j 不足場所に c_j 個だけ最適配分する型の問題としては，最大効率を目指す工員の配置計画，最低費用を目指す船舶の輸送計画などがある．

これらの問題の解法はいろいろ提唱されているが，条件の整理にあたっても，結果の表示にあたっても，よく利用されるのは，いわゆる $m\times n$ 分割表である．ここで m は余裕場所の総数，n は不足場所の総数を示す．配分計画は第 i 余裕場所から第 j 不足場所への配分数 x_{ij} $(i=1,2,\cdot\cdot\cdot,m;\ j=1,2,\cdot\cdot\cdot,m)$ が決まれば確定する．x_{ij} に必要十分な条件は

$$0\leqq x_{ij}\leqq \min(r_i,\ c_j)$$

	1 2……	j	………n	
1 2 ⋮				r_1 r_2
i		x_{ij}		r_i
⋮ m				r_m
	c_1 c_2 …	c_j	…… c_n	N

表 1

である．しかし

$$\sum_j x_{ij}=r_i,\ \sum_i x_{ij}=c_j$$

でなくてはならぬから，$(m-1)\times(n-1)$ 個だけが自由に指定できるだけである．その $(m-1)\times(n-1)$ 個として，$i=1,2,\cdot\cdot\cdot,m-1;\ j=1,2,\cdot\cdot\cdot,n-1$ に応ずる x_{ij} を採ることにし，この x_{ij}（基本配分数）について，上の条件を整頓することが，最適配分を図解

法，単体法などで解くときの第1段階である．とくに，$L(x, y, \cdots, z)$ を $x, y, \cdots, z$ の1次同次式として，上の条件と同値で

$$l_s \leqq L_s(x_{ij}, \cdots, x_{uv}) \leqq \lambda_s \qquad s=1, 2, \cdots, t$$

という形（標準型）の連立不等式に整頓することを考えてみる．これは，いわゆる適解集合の境界を見定めることに他ならない．

2×2 分割表

A から C に配分する数 x だけで，他の配分数が表2の通り定まる．これに基いて条件不等式を列記すれば

	C	D	
A	x	$a-x$	a
B	$c-x$	$b-c+x$	b
	c	d	N

表 2

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \min(a, c) \\ 0 \leqq a-x \leqq \min(a, d) \\ 0 \leqq c-x \leqq \min(b, c) \\ 0 \leqq b-c+x \leqq \min(b, d) \end{cases} \qquad (1)$$

移項して標準型に書き直した上で一つにすると

$$\max(0, a-\min(a, d), c-\min(b, c), c-b) \leqq x \leqq \min(a, c, \min(a, c), \min(b, d)+c-b) \qquad (2)$$

$0 \leqq a-\min(a,d), c-b \leqq c-\min(b,c)$

$\min(a,c) \leqq a, \min(a,c) \leqq c$

によって

$$\max(a-\min(a,d), c-\min(b,c)) \leqq x \leqq \min(\min(a,c), \min(b,d)+c-b) \qquad (3)$$

$x-\min(x,y)=\max(0,x-y)$

によって（3）の第1辺を書き直すと

$$\max(\max(0,a-d), \max(0,c-b)) \\ =\max(0,a-d,c-b)=\max(0,a-d,a-d) \\ =\max(0,a-d)=a-\min(a,d).$$

（3）の第3辺を

$$\min(b,d)+c-b=\min(\mathrm{c},d+c-b) \\ =\min(c,a)$$

によって書き直すと．

$$\min(\min(a,c), \min(b,d)+c-b)=\min(a,c).$$

この2式によって，（3）は

$$a-\min(a,d) \leqq x \leqq \min(a,c) \qquad (4)$$

となる．

後に示す通り（4）から（1）が導かれる．したがって（4）が表2を分割表とする配分問題の適解集合を示す連立不等式である．

2×3 分割表

A から C に配分する数 x と D に配分する数 Y だけで，他の配分数が表3の通り定まる．これに基いて条件不等式を列記すれば

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \min(a,c), 0 \leqq c-x \leqq \min(b,c) \\ 0 \geqq y \leqq \min(a,d), 0 \leqq d-x \leqq \min(b,d) \\ 0 \leqq a-x-y \leqq \min(a,e) \\ 0 \leqq b-d-d+x+y \leqq \min(b,e) \end{cases} \qquad (5)$$

	C	D	E	
A	x	y	$a-x-y$	a
B	$c-x$	$d-y$	$b-c-d+x+y$	b
	c	d	e	N

表 3

となる．$x, y, x+y$ それぞれについての標準型に書き直した上でまとめれば

$$\begin{cases} \max(0, c-\min(b,c)\leqq x\leqq \min(\min(a,c),c) \\ \max(0, d-\min(b,d)\leqq y\leqq \min(\min(a,d),d) \\ \max(a-\min(a,e), c+d-b) \\ \quad \leqq x+y\leqq \min(a, \min(b,e)+c+d-b) \end{cases} \quad (6)$$

となる．

$o\leqq p-min(p,q)$ によって x と y の左辺，右辺を書直すと，また $c+d-b=a-e$ と同式によって $x+y$ の左辺，右辺を書直すと (6) は

$$\begin{cases} c-\min(b,c)\leqq x\leqq \min(a,c) \\ d-\min(b,d)\leqq y\leqq \min(a,d) \\ a-\min(a,e)\leqq xy\leqq \min(b,e)+a-e \end{cases} \quad (7)$$

となる．

後に示す通り (7) から (5) が導かれる．したがって (7) が表 3 を分割表とする配分問題の適解集合を示す連立不等式である．

2　max, min 記号の基本性質

ここで max, min 記号の基本性質を列挙し，配分問題の条件整理でどのように使われているかを確かめておく．

基本性質

Ⅰ　$\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)\geqq a_i$

$\min(a_1, a_2, \cdots, a_n)\leqq a_i$

Ⅱ　$l_1\leqq x\leqq u_1,\ l_2\leqq x\leqq u_2,\ \cdots,\ l_n\leqq x\leqq u_n$

は次式と同値である．

$\max(l_1, l_2, \cdots, l_n)\leqq x\leqq \min(u_1, u_2, \cdots, u_n)$

Ⅲ　$\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$=\max(\max(a_1, \cdots, a_i), \max(a_{i+1}, \cdots, a_n))$

Ⅳ　$\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)+c$

$=max(a_1+c, a_2+c, \cdots, a_n+c)$

Ⅴ　$k>o$ ならば

$k\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$=\max(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$

Ⅵ　$a-\min(b_1, b_2, \cdots, bn)$

$=\max(a-b_1, a-b_2, \cdots, a-b_n)$

Ⅶ　$\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$=-\min(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$

ⅢからⅦまでは max と min を書き換えても成立つ．

これらの基本性質を証明するには高等学校の教程にある不等式の理論で十分である．

(1) を (2) にまとめるにはⅡを，(2) を (3) に書き直すには第1辺，第3辺でⅢとⅠを，(3) の第1辺の変形にはⅥとⅢを，(3) の第3辺の変形には min についてのⅢを使って，(4) が導かれたのである．

逆に (4) から (1) を導くにもⅠ～Ⅵを使う．すなわち (4) とⅠから (1・1)，(4) の後半とⅠから (1・2) の前半，(4) の前半から (1・2) の後半が導かれる．(4) から

$c-\min(a,c)\leqq c-x\leqq c-a+\min(a,d).$

第1辺にⅠを使うと (1・3) の前半となり，第3辺を min についてのⅣで書き直すと

$\min(c,c+d-a)=\min(c,b)$

を得て，(1・3) の後半となる．(4) から

$b-c+a-\min(a,d)\leqq b-c+x\leqq b-c+\min(a,c)$

すなわち

$d-\min(a,d)\leqq b-c+x\leqq b-c+\min(a,c)$

第1辺にⅠを使うと (1・4) の前半となり，第3辺を min についてのⅣで書き直すと

$\min(b-c+a,b)=\min(d,b)$

を得て，(1・4) の後半となる．

また (7) と (5) の関係についても同じである．すなわち，(7・1, 2) の左辺と右辺にⅠを使って (5・1, 3) が (7・1, 2) の前半から (5・2, 4) の後半が，(7・1,2) の後半にⅠを使って (5・2,4) の前半が導かれる．(7・3) から

$e-\min(b,e)\leqq a-x-y\leqq\min(a,e)$

この左辺にⅠを使うと (5・5) を得る．また (7・3) から

$a+b-c-d-\min(a,e)\leqq b-c-d+x+y$

$\leqq b-c-d+\min(b,e)+a-e.$

すなわち，

$e-\min(a,e)\leqq b-c-d+x+y\leqq\min(b,e).$

この左辺にⅠを使うと (5・6) を得る．

3 順序付け問題

n 個の仕事それぞれが前段と後段に分かれている．第 i の仕事の前段を A_i，後段を B_i，この仕事を $J_i=(A_i,B_i)$ で表わす．B_i は A_i が済んでいなくては始められない．A_s と A_t，また B_s と B_t も同時には行えない．A_i と B_i の所要時間をそれぞれ a_i,b_i とする．なるべく速く作業が完了するように，n 個の仕事の順序を定めるのがいわゆる $2\times n$ 型の順序付け問題である．それぞれの仕事が前段，中段，後段に分れているときが $3\times n$ 型の順序付け問題である．

$2\times n$ 型の順序付け．

B_i の待時間を x_i とすれば

$$x_i=\max(o,\sum_{i=1}^{i}a_j-\sum_{j=1}^{i-1}(x_j+b_j))\qquad i=1,2,\cdots,n$$

である．Ⅳによって書き直すと

$$\sum_{j=1}^{i}x_j=\max(\sum_{j=1}^{i-1}x_j,\sum_{j=1}^{i}a_j-\sum_{j=1}^{i-1}b_j)$$

$$=\max(\max(\sum_{j=1}^{i-2}x_j,\sum_{j=1}^{i-1}a_j-\sum_{j=1}^{i-2}b_j),\sum_{j=1}^{i}a_j-\sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{b}_j)$$

Ⅲによって書き直すと

$$\sum_{j=1}^{i}x_j=\max(\sum_{j=1}^{i-2}x_j,\sum_{j=1}^{i-1}a_j-\sum_{j=1}^{i-2}b_j,\sum_{j=1}^{i}a_j-\sum_{j=1}^{i-1}b_j)$$

この書直しを $i-1$ 回行った上で $x_1=a_1$ を使うと

$$\sum_{j=1}^{i}x_j=max(a_1,\sum_{j=1}^{2}a_j-\sum_{j=1}^{1}b_j,\cdots,\sum_{j=1}^{i-1}a_j-\sum_{j=1}^{i-2}b_j,\sum_{j=1}^{i}a_j-\sum_{j=1}^{i-1}b_j)$$

この順序で作業を完了するときの総待時間を $I_{12\cdots kk+1\cdots n}$ と書けば，それは $\sum_{j=1}^{n}x_j$ に他ならない．したがって，次の定理が成立つ．

〔**定理 1**〕 $d_s=\sum_{j=1}^{s}a_j-\sum_{j=1}^{s-1}b_j$ とおけば作業完了までの時間は

$$\sum_{j=1}^{n}b_j+\max(d_1,d_2,\cdots,d_k,d_{k+1},\cdots,d_n)$$

一般に $J_{p_1},J_{p_2},\cdots,J_{p_n}$ の順で作業を完了するときの総待時間を $I_{p_1p_2\cdots p_n}$ と書く．

仕事順 $J_1,J_2,\cdots,J_{k+1},J_k,\cdots,J_n$ に応ずる d を $\bar{d}$ と書けば

$$I_{12\cdots k+1k\cdots n}=\max(\bar{d}_1,\bar{d}_2,\cdots,\bar{d}_k,\bar{d}_{k+1},\cdots,\bar{d}_n)$$

であるが

$$\bar{d}_i=d_i \qquad i\neq k,k+1 \tag{8}$$

$$\bar{d}_k=\sum_{j=1}^{k-1}a_j+a_{k+1}-\sum_{j=1}^{k-1}b_j,\quad \bar{d}_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}a_j-\sum_{j=1}^{k-1}b_j-b_{k+1} \tag{9}$$

である．

Ⅲ，(8) によって

$$\max(d_k,d_{k+1})\leqq\max(\bar{d}_k,\bar{d}_{k+1}) \tag{10}$$

ならば

$$I_{12\cdots kk+1\cdots n}\leqq I_{12\cdots k+1k\cdots n}$$

となる．

Ⅳによって

$$\max(d_k,d_{k+1})=\max(-a_{k+1},-b_k)+\sum_{j=1}^{k+1}a_j-\sum_{j=1}^{k-1}b_j$$

$$\max(\bar{d}_k,\bar{d}_{k+1})=\max(-a_k,-b_{k+1})+\sum_{j=1}^{k+1}a_j-\sum_{j=1}^{k-1}b_j$$

この２式によって (10) は

$$\max(-a_{k+1},-b_k)\leqq\max(-a_k,-b_{k+1})$$

これはまたⅦによって

$$\min(a_k,b_{k+1})\leqq\min(a_{k+1},b_k)$$

となり，次の定理を得る．

〔**定理 2**〕 $\min(a_k,b_{k+1})\leqq\min(a_{k+1},b_k)$ ならば

$$I_{12\cdots kk+1\cdots n}\leqq I_{12\cdots k+1k\cdots n}.$$

$a_i\leqq b_i$ の成立つ仕事を第１種といい，その集合を E, $a_i>b_i$ の成立つ仕事を第２種といい，その集合を Z と書く．これらについては次の定理が成立つ．

〔**定理 3**〕 次の３条件をみたす仕事順は最適順である．

（i） 第１種を第２種より優先し，

（ii） 第１種同士では a の大きくない方を

（iii） 第２種同士では b の小さくない方を優先する．

証明： $J_k\in Z$ とすれば (i) によって，$J_{k+1}\in Z$ であり

$$a_k>b_k,\ a_{k+1}>b_{k+1} \tag{11}$$

が成立ち，(iii) によって

$$b_k>b_{k+1} \tag{12}$$

が成立つ．Ⅰ，(11)，(12) によって

$\min(a_k, b_{k+1}) \leqq b_{k+1} \leqq a_{k+1}, b_k$

となるから，IIによって

$\min(a_k, b_{k+1}) \leqq \min(a_{k+1}, b_k)$

$J_k \in E, J_{k+1} \in Z$ とすれば

$$a_k \leqq b_k,\ a_{k+1} > b_{k+1} \tag{13}$$

I，(13・1) によって

$\min(a_k, b_{k+1}) \leqq a_k \leqq b_k$

I，(13・2) によって

$\min(a_k, b_{k+1}) \leqq b_{k+1} < a_{k+1}$

この2式とIIによって

$\min(a_k, b_{k+1}) \leqq \min(a_{k+1}, b_k)$

$J_{k+1} \in E$ とすれば (i) によって $J_k \in E$ であり

$$a_k \leqq b_k, \quad a_{k+1} \leqq b_{k+1} \tag{14}$$

が成立ち，(ii) によって

$$a_k \leqq a_{k+1} \tag{15}$$

が成立つ．I，(14)，(15) によって

$\min(a_k, b_{k+1}) \leqq a_k \leqq a_{k+1}, b_k$

となるから，IIによって

$\min(a_k, b_{k+1}) \leqq \min(a_{k+1}, b_k)$.

これを一括して，この仕事順では定理2の条件がいつも満されていることになる．

これに基いて，$I_{12\cdots k\cdots n}$ と $I_{p_1p_2\cdots p_n}$ を比較する

相隣る2仕事の入替ばかりで，$J_1J_2\cdots J_n$ を $J_{p_1}J_1J_2\cdots J_n$ になおすと，定理2によって

$I_{12\cdots n} \leqq I_{p_112\cdots n}$.

J_{p_1} を除いても上の3条件が保たれているから，相隣る2仕事の入替ばかりで，$J_{p_1}J_{p_2}J_1J_2\cdots\cdots J_n$ になおすと，定理2によって

$I_{p_112\cdots n} \leqq I_{p_1p_212\cdots n}$

これを続けて

$I_{12\cdots n} \leqq I_{p_1p_2\cdots p_n}$

すなわち，最適順である（了）．

3×n 型の順序付け．

第 i の仕事 $J_i=(A_i, B_i, C_i)$ で A_i, B_i, C_i の所要時間をそれぞれ a_i, b_i, c_i とする．B_i の待時間を x_i とすれば，前に示した通り，

$$\sum_{j=1}^{i} x_j = \max(d_1, d_2, \cdots, d_i) \tag{16}$$

$d_s = \sum_{j=1}^{s} a_j - \sum_{j=1}^{s-1} b_j$

であり，C_i の待時間を y_i とすれば

$y_i = \max(0, \sum_{j=1}^{i}(x_j+b_j) - \sum_{j=1}^{i-1}(y_j+c_j))$

である．IVと (16) によって

$\sum_{j=1}^{i} y_j = \max(\sum_{j=1}^{i-1} y_j, max(d_1, d_2, \cdots, d_i)+\delta_i)$

$\delta_i = \sum_{j=1}^{i} b_j - \sum_{j=1}^{i-1} d_j$

IIIを使って右辺から y を消せば

$\sum_{j=1}^{i} y_j = \max(d_1+\delta_1, \max(d_1, d_2)+\delta_2, \cdots,$

$$\max(d_1, d_2, \cdots, d_i)+\delta_i) \qquad (17)$$

(17)，Ⅳ，Ⅲによって次の定理が成立つ．

〔定理 4〕 $3\times n$ 型の作業完了までの時間は

$d_s=\sum_{j=1}^{s}a_j-\sum_{j=1}^{s-1}b_j,\ \delta_s=\sum_{j=1}^{s}b_j-\sum_{j=1}^{s-1}d_j$

とおけば

$$\sum_{j=1}^{n}b_j+\max(d_1+\delta_1\,;\,d_1+\delta_2, d_2+\delta_2\,;\,\cdots\,;\,d_1+\delta_n\,;\,\cdots\,;\,d_n+\delta_n)$$

とくに $\max b_i \leqq \min a_i$ のときは d_i の定義によって $d_i \leqq d_{i+1}$．したがって

$\max(d_1+\delta_i, \cdots, d_i+\delta_i)=d_i+\delta_i,$

これとⅢを使って，定理４の第２項は

$\max(d_1+\delta_1, d_2+\delta_2, \cdots, d_n+\delta_n)$

となる．

また $\max b_i \leqq \min c_i$ のときは δ_i の定義によって $\delta_i \geqq \delta_{i+1}$，したがって

$\max(d_i+\delta_i, \cdots, d_i+\delta_n)=d_i+\delta_i.$

このときも上と同じになる．

すなわち，作業完了までの時間は

$$\sum_{j=1}^{n}c_j+max(d_1+\delta_1, d_2+\delta_2, \cdots, d_n+\delta_n) \qquad (18)$$

となる．ところが

$d_i+\delta_i=\sum_{j=1}^{i}(a_j+b_j)-\sum_{j=1}^{i-1}(b_j+c_j)$

であるから，(18) の第２項は定理１の第２項と同じ形である．したがって定理３が適用できて，次の定理を得る．

〔定理 5〕 $\max b_i \leqq \min a_i$ または $\max b_i \leqq \min c_i$ ならば，$3\times n$ 型の順序付けは (A_i, B_i) (B_i, C_i) それぞれを第 i 仕事の前段，後段と考えて $2\times n$ 型の順序付けとして解くことができる．

4 註　釈

配置，輸送などの最適配分については西北隅法その他でまず適解の一つを求め，改良を繰返して，最適解に一歩一歩近付くという，いわば試行錯誤法が工夫され，教えられている．だが，ひどく，ぎこちないという印象を受ける．原理的には線型計画として，単体表に載せて処理できるが，条件式がみな等式であることから来る厄介さを伴う．１に示した方法で条件を不等式にしておいて解くのも一つの工夫ではなかろうか．

$2\times n$ 型，$3\times n$ 型の順序付け問題はどの教科書にも載っているが，証明を完記したものは非常に少いようである．また，決定の手法がよく整理されていない．すなわち，「すべての a_i，すべての b_i の中で最小のものを捜せ．それがもし a ならば･･･，それがもし b ならば･･･」という手法である．定理３の方が明確である，その証明を整備するのがこのノートの１つの目的であった．

max, min 記法がこのように活躍するものであり，その基本性質が初歩的に扱えるものであってみれば，初等数学の教程の一項目に「max 記号と min 記号」を加えてほしいという筆者の希望もそう無理なものではないと考えている．

（1967—5—10）（一橋大学教授）