

選好理論の展望

時子山和彦

一 古典的選好理論

本稿の目的はサミュエルソン P. M. Samuelson [20] にはじまる現代的選好理論の展望であるが、その前に現代的選好理論に至る歴史的過程をサーベイし、その位置づけをおこなっておかねばならない。

周知のように所与の価格ベクトル $p = [p_1, \dots, p_n]$ と所与の所得 M に対して消費者が選択する財ベクトル $x = [x_1, \dots, x_n]$ を与える需要関数 $x = d(p, M)$ の導出については、一九世紀後半以来いくつかの接近法が検討されてきた。最初に想定されたのは基数的効用概念であった。すなわち財空間 X のすべての点 x について、ある実数値を対応させる連続微分可能な関数 $U = U(x)$ を想定し、それを効用関数と名づけた。ここでこの効用なる概念は自明なものとされていた。消費者は予算制約条件 $\sum p_i x_i \leq M$

に従いつつ効用 U を最大にするように x を X から選択する。すなわち価格—所得空間 $[p, M]$ から財空間 X への写像 $\parallel$ 需要

関数は、条件つき最大値問題の解として得られたのである。

コッセン、ジェボンズ、ワルラス等はこの効用関数に加法的 Additivity, すなわち

$$U = U_1(x_1) + \dots + U_n(x_n) \quad (1)$$

を仮定していたが、エッジワースはさらに一般的な効用関数

$$U = U(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

を想定して周知の消費者均衡の条件

$$\frac{\partial U / \partial x_1}{p_1} = \dots = \frac{\partial U / \partial x_n}{p_n} = \lambda \quad (3)$$

$$p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = M \quad (4)$$

を導いた。

(注) 効用関数の加法的性にはちに再び検討される。ハウタッカー [11], [13] サミュエルソン [23] をみよ。

このような基数的効用概念は、その可測性に対する疑念から批判され、序数的効用関数すなわち選好指標関数へと修正された。ここではある財ベクトル x と他の財ベクトル x' について、それぞれに應ずる効用指標 $s(x)$ と $s(x')$ によって、そのいずれが選好されるのかあるいは無差別でいずれも選好されないのかが決定できればそれで十分である。 $s(x)$ より $s(x')$ がどれだけ大きいかすなわち x が x' よりどれだけ選好されるかという量的な情報は全く必要とされない。だからこの序数的効用関数は、その順序を保存するようなものであればどんな関数に交換しても、それから導出される需要関数は変らないのである。

これらの展開は一九三〇年代までに、バレット、スルツキ

1、ヒックス、アレンなどにより古典的選好理論としてはほぼ完成され、効用関数に先験的に仮定した性質からいくつかの需要関数の性質が確認された。

古典的選好理論には一つの大きな争点があった。効用指標関数 $U(x_1, \dots, x_n)$ において

$$U(x_1, \dots, x_n) = C \quad C: \text{const.} \quad (5)$$

をみたす x の集合は一つの無差別曲面を構成するが、このとき明らかに

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0 \quad (6)$$

が成立している。逆に、財の限界効用 $R_i(x_1, \dots, x_n)$ を既知として全微分方程式

$$R_1 dx_1 + \dots + R_n dx_n = 0 \quad (7)$$

を考えると、この全微分方程式は総効用が一定の x がみただけならばならない関係である。ところで $R_i(x_1, \dots, x_n)$ に任意の関数を想定するとき、(7) 式は解けるであろうか。つまり (7) 式をみたす関数 $U(x)$ が存在するだろうか。これが存在するための必要十分条件は $R_i(x_1, \dots, x_n)$ に適当な関数 $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ がみつかった

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\lambda(x_1, \dots, x_n) \cdot R_j(x_1, \dots, x_n)] = \frac{\partial}{\partial x_j} [\lambda(x_1, \dots, x_n) \cdot R_i(x_1, \dots, x_n)] \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8)$$

が成り立つことである。これはつぎの式

$$R_i \left(\frac{\partial R_j}{\partial x_k} - \frac{\partial R_k}{\partial x_j} \right) + R_j \left(\frac{\partial R_k}{\partial x_i} - \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \right) + R_k \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i, j, k = 1, \dots, n) \quad (9)$$

と同値であるが、これを積分可能条件という。この積分可能条件は二財の場合は自動的に成立するが、三財以上ではそうではない。そのとき $R_i(x_1, \dots, x_n)$ に勝手な関数を想定しては効用（指標）関数を構成できないのである。

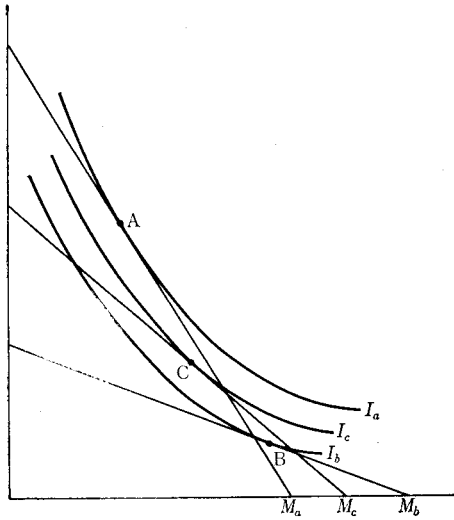
積分可能性に関するこの問題は、早くアントネルリ等により指摘されたけれども、積分条件が選好理論にもつ意味が言及されるようになったのは比較的新しい。ジョージ・エスクローエー・ジェン N. Georgescu-Roegen (6)。この問題はのちにまた及び言及される。

二 現代的選好理論の展開

古典的選好理論に比較して現代的選好理論を特徴づけるものは、第一にその実証的性格であり、第二に公理化への試みである。公理化への試みはのちにふれるとして実証的性格に注目しよう。

サミュエルソンは [20] において周知の顕示選好の理論を提示した。そこでは、消費者の合理的斉合的行動を仮定した上で、市場で実際に観察しうる価格と数量のみを手がかりに財ベクトル間の選好を明らかにすることが試みられる。ここで必要とされるのは、ある価格ベクトル p と所得 M に対してある財ベクトル x が現実には選択されたという事実だけである。このとき

$\sum p_i x_i \geq \sum p_i x_i'$ (I)
 であれば、 x が x' より選好されることが明らかである。なぜなら支配的市場価格 p において x' を購入することも可能であるのに、あえて x を購入しているからである。さて消費者がコンシステントな選好を行なうならば、このとき
 $\sum p_i x_i' > \sum p_i x_i$ (II)
 でなければならぬ。もし $\sum p_i x_i \geq \sum p_i x_i'$ ならば x が x' より選好されることになり、前の選好と矛盾するからである。消費者行動の斉合性を表わすこの法則は、顕示選好の弱公理とよ



ばれるが、この弱公理の導入により古典的な選好理論で得られた需要関数の諸性質はほとんどすべて顕示選好の理論によっても導かれることが明らかとなった。サミュエルソン [20]、[22]。

この弱公理は本来消費者選好の斉合性という先験的な要請ではあるが、現実のデータによって棄却される可能性を原理的にはもっている。その意味でサミュエルソンのいう meaningful な公理であり、顕示選好理論の実証的性格をよく示している。

さて(序数的)効用関数が存在すれば、それに基づく選好がこの弱公理をみたすことは明らかである。逆にこの弱公理が成立するとして序数的効用関数は存在するであろうか。すなわち弱公理は序数的効用関数の存在の必要条件であるばかりでなく、十分条件でもあるだろうか。

いま序数的効用関数があったとしてそれから無差別曲線を導いたとする。上図。予算制約線が M_a と M_b のときそれぞれA点およびB点が現実を選択されたでしょう。A点はB点より高い無差別曲線上にあるから、AはBよりも選好される。しかしこの場合顕示選好の理論ではAとBはいずれが選好されるか決定できない。したがって顕示選好の理論の示すところは序数的効用関数よりも弱いようにみえる。

しかしもし適当な予算制約線 M_c に対して点Cが存在して、AはCよりも選好され、CはBよりも選好されることが顯示されたとしたら、AはBよりも選好されることが間接的に顯示されたことになる。この間接的な顯示がAのBに対する選好を示

すものならば、顕示選好の理論は序数的効用関数と同等の情報を与える可能性が生れる。ところが間接的な顕示が直接的な顕示をつねに意味するか否かは明らかでない。すなわち

$$\sum p_i x_i \geq \sum p_i x_i' \text{ かつ } \sum p_i' x_i' \geq \sum p_i' x_i \quad (2)$$

が成立して

$$\sum p_i' x_i \geq \sum p_i' x_i' \quad (注1)$$

の不等号は不確定なのである。しかしここでも選好が斉合性を保持するとすれば

$$\sum p_i' x_i \geq \sum p_i' x_i' \quad (3)$$

の成立は自然でない。序数的効用関数があるとすれば、(4)式は明らかに成立しえないからである。それゆえ(2)式の成立するとき

$$\sum p_i' x_i > \sum p_i' x_i' \quad (4)$$

が成立するのと、より一般的には

$$\sum p_i x_i \geq \sum p_i x_i', \dots, \sum p_i^{T-1} x_i^{T-1} \geq \sum p_i^{T-1} x_i'^{T-1}$$

ならば

$$\sum p_i^T x_i^T > \sum p_i^T x_i'^T$$

が成り立つことを公理として要請しよう。これを顕示選好の強公理^(注2)という。

(注1) 二財の場合には弱公理が強公理を含意している。D・ニーマン P. Newman [17] 定理7。ただしこの定理の証明は不完全である。

(注2) 強公理もまた meaningful で検証可能性をもっている。ター, Koo, A. Y. C. [15] を参照。

以上のようにして導入された強公理が序数的効用関数の十分条件であることを示したのはハウタッカー [9] であった。すでに二財の特殊なケースについてはリットル Little, I. M. D. [16] が、弱公理と需要関数の正則条件を仮定すれば無差別曲線と同等の行動ラインを構成しうることを明らかにしていたが、三財以上の場合はさらに強公理が必要なことをハウタッカーは主張したのである。

(注) サミュエルソン [21] は別証を与えた。

ハウタッカーのこの基本的論文はのちにコレット Corlett, W・J・ニーマン [2] の修正をうけた。またニーマン [17] はハウタッカー論文の公理化の試みであったけれども、その欠陥をハウタッカー [10] で指摘されニーマン自身 [18] でそれを受け入れた。グリーン Green, H. A. J. [7] は強公理に代えて Geating Axiom を提唱したが、その誤りをニーマン [18] で指摘された。

選好理論の各アプローチを公理化し、それら相互の関係を明らかにしようとする試みはすでにウォルト Wold, H. [26] にみられるが、厳密な公理化はアロウ Arrow, K. J. [1] で成功した。ここではより包括的な字沢 [25] の公理を中心に選好理論の現在までの到達点を展望しよう。

三 選好理論の公理化

選好理論の公理化を行なう前に選好理論と序数的効用関数の関係を明らかにしておかねばならない。

a 序数的効用関数の基礎づけ

デブリュー Debreu, G. は [3] においてつぎの定理を証明し、序数的効用関数の存在の条件を明らかにした。

定理 X を有限次元ユークリッド空間の完全順序部分集合とせよ。 X に含まれるすべての x_0 について、集合 $\{x; x \in X, x_0 P x\}$ と $\{x; x \in X, x P x_0\}$ が閉集合ならば、 X 上に連続な実数値順序保存関数すなわち序数的効用関数が存在する。ただし P は順序を示す記号。

デブリュー [3] では順序が preorder の場合を扱い、レイダー Rader, T. [19] はデブリューよりも弱い条件で序数的効用関数の存在を示した。

この定理の逆は明らかである。すなわち序数的効用関数 $U(x)$ が存在すれば、 $U(x) \leq U(y) \Leftrightarrow x P y$ また $U(x) < U(y) \Leftrightarrow x P y$ によって財空間 X を順序づけるのをみるのは容易であらう。

こうして残された問題は、デブリューの与えた条件をもつ順序集合と需要関数との関係を追求することである。

b 需要関数の公理

価格—所得空間 (p, M) から財空間 X への写像 $x = d(p, M)$ がつぎの条件をみたすとき需要関数^(注)という。

CI 任意の価格ベクトルと正の所得 M について一価関数である。

CI 任意の正の財ベクトル x に対して $x = d(p, M)$ をみたす p, M が存在して、それはスカラー倍を除けば唯一つにき

まる。

CI すべての $p > 0, M > 0$ について予算制約式 $p \cdot d(p, M) = M$ が成立する。

CI $d(p, M)$ は正の所得についてリブシツの条件を満足している。

(注) 需要関数 $d(p, M)$ を字沢は選択関数 Choice Function と呼ぶ。

c 選好関係の公理

財空間 X 上で定義された二項関係 P はつぎの公理をみたすとき選好関係とよばれる。

PI X 上の任意の x, y について、 $x P y$ ならば $y P x$ となることはない。

PII X 上の任意の x, y, z について、 $x P y$ か $y P z$ ならば $x P z$ 。

PIII X 上のすべての x, y について、 $x N y$ ならば $x P y$ 。

PIV $x \# y$ としても $x P y$ とはならない任意の x, y について、 $0 \leq \lambda < 1$ なら

$$(1-\lambda)x + \lambda y P x$$

PV X 上の任意の x_0 について、集合 $\{x; x \in X, x_0 P x\}$ が閉集合である。

ここで注意しなければならないのは、この二項関係 P は任意の x, y について $x P y$ と $y P x$ の少なくとも一方が成立するという順序の公準をみたしておらず、またデブリューの定理を適用するには連続性の条件も不十分であることである。しかし

xPy の否定を新しい二項関係 P' と考えれば、この P' はデブリューの要求したすべての要件をみたすことになる。
C I—C IV で定義された需要関数を用いれば顕示選好はつぎのように定義できる。

$$x_1 = d(p_1, M), x_2 = d(p_2, M) \text{ とするとき、不等式}$$

$$p_1 \cdot x_1 \geq p_1 \cdot x_2$$

が成立すれば、 x_1 は x_2 より選好されることが顕示されたといふ、これを x_1Rx_2 で示す。また

$$x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_{n-1}Rx_n$$

が成り立つとき、 x_1 は x_n より選好されることが間接的に顕示されたといふ、 $x_1R^*x_n$ でこれを示す。

この二項関係 R および R^* により、サミュエルソンの弱公理は xRy ならば yRx となることは決してない。

ハウタッカーの強公理は

xR^*y ならば yR^*x となることは決してない

と表わすことができる。

d 需要関数と選好関係との同値性

以上の公理系のもとに字沢は、需要関数 $d(p, M)$ が強公理を満足するならば、二項関係 R^* が財空間 X 上で選好関係の公理 P I—P V を満足すること、しかも R^* はこの $d(p, M)$ を導く唯一つの選好関係であることを示した。逆に非負の財空間 X 上に P I—P V を満す選好関係があれば、C I、C III および強公理をみたす需要関数が存在する。この需要関数が連続であるためには P I—P V は不十分であるが、その条件についての吟味

も行なわれている。

この字沢の公理に対して、レイダー [19] ソネンシャイン Sonnenschein, [24] は Alternative な公理を提示し、それに対応した定理を証明した。すなわちレイダーは字沢の推移律公理 P II に代えて

P II a X 上の任意の x, y, z について xPy かつ yIz ならば xPz を要請し、これが P' の推移律を保証するための条件を検討した。同様にゾネンシャインは

P II b X 上の任意の x, y, z について xIy かつ yIz ならば xIz 。

P II c X 上の任意の x, y, z について、 xIy かつ yPz ならば xPz をそれぞれ P II に代えたときに、この公理が P' の推移律を保証する条件を吟味している。以上の四ケースで P' と I とのすべての組合せがつきているわけである。

e 弱公理と強公理

これらの諸定理によって需要関数と選好関係は強公理を媒介として同値になることが明らかとなった。こうしてハウタッカーの議論は厳密な基礎を得たが、アロウの指摘した残された問題がある。すなわち強公理が弱公理を含意することは明らかであるが、逆に弱公理も強公理の十分条件ではないかという疑問である。

アロウ自身 [1] において、ある条件のもとでは弱公理と強公理が同値であることを示した。したがって弱公理だけで財空間の順序づけが可能となる。しかしこのアロウの証明は選択が

有限個の alternative の間で行なわれるという制約条件を伴っていた。これに対して字沢は、選択が無限の alternative の間で行なわれる場合も、ある正則条件のもとに同様の同値関係が成立することを証明した。しかしこの正則条件の意味は明らかでない。この正則条件とは関数

$$\rho_{\alpha}(M^{\alpha}) = \sup \{ M : d(p^{\alpha}, M^{\alpha}) R^* d(p^{\beta}, M) \}$$

が strictly な増加関数であることである。サッポホルンはこの正則条件が積分可能条件の変種ではなからという予想をたてている。

ゲール Gale, D [5] はこれらの問題に対して、連続ではほとんどいたるところ微分可能というきわめて普通の需要関数で、しかも弱公理はみたすが強公理は満足しない実例をあげ、一応否定的な解答を与えた。しかしこれらの問題は完全に解決してはいないのである。

弱公理と強公理の關係について神谷 [14] は任意の x_i に関

つ

(弱公理) $x_i R x_j$ ならば $x_j R x_i$ が成り立つことはな

(強公理) $x_i R x_j$ かつ $x_j R x_k$ ならば $x_k R x_i$ が成り立つこ

とはなる。(2, $j=1, \dots, n$)

の二つが成立している

(一般的強公理) $x_i R x_j, x_j R x_k, \dots, x_l R x_m$ ならば $x_m R x_i$ が成立することはな

が必ずしも成立しないことを実例で示した。

- [1] Arrow, K.; "Rational Choice Functions and Orderings," *Economica*, Vol. 26, May 1959.
- [2] Corlett, W. J. and P. K. Newman; "A Note on Revealed Preference and the Transitivity Condition," *Review of Economic Studies*, 20, 1952,
- [3] Debreu, G.; "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function," in *Decision Process*, (ed.) Thall, M., Coombs, C. H., and R. L. Davis, New York, 1954.
- [4] —; *Theory of Value*, Cowles Foundation Monograph 17, New York, 1959.
- [5] Gale, D.; "A Note on Revealed Preference," *Economica*, Vol. 27, Nov. 1960.
- [6] Georgescu-Roegen, N.; "The Pure Theory of Consumer's Behavior," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 50, 1936.
- [7] Green, H. A. J.; "Some Logical Relations in Revealed Preference Theory," *Economica*, Vol. 24, 1957.
- [8] Hicks, J. R.; *A Revision of Demand Theory*, Oxford, London, 1959.
- [9] Houthakker, H. S.; "Revealed Preference and the Utility Function," *Economica*, Vol. 17, 1950.
- [10] —; "Mr. Newman on Revealed Preference," *Qa-*

- ford Economic Paper*, Vol. 9, 1957.
- [11] —; “Additive Preference,” *Econometrica*, Vol. 28, April, 1960.
- [12] —; “The Present State of Consumption Theory,” *Econometrica*, Vol. 29, Oct., 1961
- [13] —; “A Note on Self-Dual Preferences,” *Econometrica*, Vol. 33, Oct. 1965.
- [14] Kamiya, D.; “A Note on the Strong Axiom of Revealed Preference,” *Economica*, Vol. 30, 1963.
- [15] Koo, A. Y. C.; “An Empirical Test of Revealed Preference Theory,” *Econometrica*, Vol. 31. Oct. 1963.
- [16] Little, I. M. D.; “A Reformulation of the Theory of Consumer’s Behavior,” *Oxford Economic Paper*, Vol. 1, 1949
- [17] Newman, P.; “The Foundation of Revealed Preference Theory,” *Oxford Economic Paper*, Vol. 7, 1955.
- [18] —; “A Further Note on Revealed Preference,” *Economica*, Vol. 26, May 1959.
- [19] Rader, T.; “The Existence of a Utility Function to Represent Preference,” *Review of Economic Studies*, Vol. 30. Oct. 1963.
- [20] Samuelson, P. A.; “A Note on the Pure Theory of Consumer’s Behavior and an Addendum,” *Economica*, Vol. 5, 1938.
- [21] —; “Consumption Theory in Terms of Revealed Preference,” *Economica*, Vol. 15, Nov. 1948.
- [22] —; *Foundation of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, 1947.
- [23] —; “Using Full Duality to Show That Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand,” *Econometrica*, Vol. 33, Oct. 1965.
- [24] Sonnenschein, H.; “The Relationship between Transitive Preference and the Structure of the Choice,” *Econometrica*, Vol. 33, July 1965.
- [25] Uzawa, H.; “Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption,” in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959, (ed.) Arrow, K. J., Karlin, S. and P. Suppes. Stanford University Press, California, 1960.
- [26] Wold, H. and Jureén, L.; *Demand Analysis*, Wiley, New York, 1953.

(1 橋大学大学院学生)