Stochastic Programming についての二，三のノート

片岡信二

最近 stochastic programming ないし chance constrained programming と呼ばれる数理計画法の一分野が問題になっている．それは不確定条件のもとでの計画を考えるためのものであるが，提出されたいくつかの定式化の中で，Charnes-Cooper による確率化された条件式 (chance constraint) を用いる方法が，非線型計画のアルゴリズムの開発と相俟ってその研究が盛んになってきたようである[1, 2, 3, 4, 5, 6]．

本稿では，文献5で取扱われている同時分布を考えた場合の確率化された条件式の quasi-concavity などについての二，三の覚え書を記し，最後に付録として，文献3に示した方法による計算プログラムを説明したいと思う．

1. 条件式の確率化

つぎのような線型計画：

$$\max x_o, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i, \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, m) \tag{2}$$

$$x_j \geqq 0 \tag{3}$$

において，a_{ij}, b_i が定数であるときは通常の線型計画であるが，それらが確率変数の場合，条件式 (2) を確率化するのに Charnes-Cooper のやり方と，これを一般化した Miller-Wagner のやり方 (同時分布を考慮した方法) がある[5, 6]．以下簡単のために確率変数はすべて正規分布に従うものとし，確率変数の上に bar を引いて平均値を表わし，$\sigma[u]$ で確率変数 u の標準偏差を示す．また適当に相関もあるものとする．

(a) Charnes-Cooper の条件式

いまベクトル $x(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ を与えたとき，条件式 (2) の i 番目の式は

$$P_r\left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i\right)$$

の確率で成り立つ．そこでこの確率があらかじめ与えられた実数 $\alpha_i (0 \leqq \alpha_i \leqq 1)$ より大なることを要請して，条件式 (2) を

$$P_r\left(\sum_{j} a_{ij}x_j \leqq b_i\right) \geqq \alpha_i, \tag{4}$$

$$i=1, 2, \cdots\cdots, m$$

の形に置き換えることにより，確率論的な問題を決定論的な問題に直す．これが Charnes-Cooper の確率化された条件式である．(1), (4), (3) という数理計画の最適解を計算するためにはいくつかのアルゴリズムが適用されるが[7, 8]，それらはいずれも目的関数の local maximum が global maximum に一致するための条件を必要とし，とくにこの場合条件式を $g_i(x) \geqq 0$ としたときの $g_i(x)$ の concavity が重要な役割をする．(次節)

(4) 式を変形すると，$F(z)$ を

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

という確率積分として，

$$F\left(\frac{\bar{b}_i-\bar{a}_i x}{\sigma[b_i-a_i x]}\right)\geqq\alpha$$

あるいは

$$\frac{\bar{b}_i-\bar{a}_i x}{\sigma[b_i-a_i x]}\geqq F^{-1}(\alpha) \qquad (5)$$

となる．ここに F^{-1} は F の逆関数で $\bar{a}_i$ は $(\bar{a}_{ij})$ の i 行ベクトルである．

(5) は $\alpha\geqq0.5$ すなわち $F^{-1}(\alpha)\geqq0$ のとき，

$$\bar{b}_i-\bar{a}_i x-F^{-1}(\alpha)\sigma[b_i-a_i x]\geqq0 \qquad (5')$$

とした左辺の関数は concave となり，上の条件に合っていることが証明される.[3, 4]

(b) 条件式の同時分布を考える場合

(a) の場合には条件式の成立する確率の下限 α_i をおのおのに1つずつ定めたが，全部（あるいは一部）の条件式をまとめて，それらが同時に成り立つ確率の下限を1つ定めることも考えられる．とくに条件式相互間に相関がある場合には α_i を別別に外から与えることは consistency に欠けるおそれがあるのでこれは必要である．

すなわち，(2) は

$$P_r(a_1x\leqq b_1,\ a_2x\leqq b_2,\cdots\cdots,\ a_mx\leqq b_m)\geqq\alpha \qquad (6)$$

と確率化する．この方法は Milles-Wagner によって提出された．彼等は各条件式が独立で，すなわち (6) が

$$P_r(a_1x\leqq b_1)P_r(a_2x\leqq b_2)\cdots\cdots P_r(a_mx\leqq b_m)\geqq\alpha \qquad (7)$$

と書かれ，さらに $b_1, b_2,\cdots\cdots, b_m$ のみが確率変数（ただし一般の分布をもつ）場合に (7) の左辺の関数の concavity の必要条件について議論している．しかし一般に concavity を示すことは困難で，特別な場合 (7) の対数をとることによって concave な条件が得られると言っている．

2. quasi-concave programming

Arrow-Enthoven[9] は concave な関数の一般化として quasi-concave 関数の概念を導入した．すなわち，ベルトル x のある関数 $g(x)$ が quasi-concave であるとは，任意の実数 c に対して

$$g(x)\geqq c \qquad (8)$$

を満すベクトル x の集合が convex であるとき，$g(x)$ は quasi-concave であるという．あるいはまたつぎのようにも表現できる．ベルトル x, x^0 があるとき，$0\leqq\theta\leqq1$ として，

$$g(x)\geqq g(x^0) \quad のとき \quad g(\theta x+(1-\theta)x^0)\geqq g(x^0) \qquad (9)$$

という関係が成り立つならば $g(x)$ は quasi-concave である．

quasi-concave 関数について次の定理が成り立つ．ベクトル $x(x_1, x_2,\cdots\cdots, x_m)$ の関数 $g(x)$ で

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}=g_i, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}=g_{ij}$$

とおくとき，行列式

$$D_r=\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2\cdots\cdots\cdots g_r \\ g_1 & g_{11} & g_{12}\cdots\cdots g_{1r} \\ g_2 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ g_r & g_{r1} & \cdots\cdots\cdots\cdots g_{rr} \end{vmatrix}$$

を考える．このとき

〔**定理 1**〕 微分可能な関数 $g(x)$ が $x \geqq 0$ で quasi-concave であるための十分条件は

$$(-1)^r D_r > 0 \tag{10}$$

がすべての x，および $r=1, 2, \cdots\cdots, n$ について成り立つことである．（証明は文献 9 の p. 797）

さて，ベクトル x のスカラー関数を $f(x)$, m 次元ベクトル関数 $\Gamma(x)$ とするとき，つぎの非線型計画

$$\left.\begin{aligned} \max f(x) \\ \Gamma(x) \geqq 0 \\ x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

において，$\Gamma(x) \geqq 0$ が constraint qualification[(10)] を満すとき，ある解 x^0 が最適解であるためには，これに対して m 次元ベクトル λ^0 があって，Kuhn-Tucker 条件：

$$\left.\begin{aligned} f_{x^0}+\lambda^0\Gamma_{x^0} \leqq 0 \\ (f_{x^0}+\lambda^0\Gamma_{x^0})x^0=0 \\ \lambda^0\Gamma(x^0)=0 \\ \lambda^0 \geqq 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

が満されることが必要であり，さらに，$f(x)$, $\Gamma(x)$ が concave 関数であれば，十分であることが Kuhn-Tucker によって証明されている．[(10)]

Arrow-Enthoven はさらに上述の $\Gamma(x)$ の concavity の代りに quasi-concavity を置いても x^0 は (11) の最適解になる十分条件を与えることを証明しているので，**1.** (b) で述べた確率化された条件式の quasi-concavity について以下議論するのが本稿の主題である．

3. 確率化された条件式の convexity

われわれは一般には条件式 (6) によって満される x の領域の convexity について考えたいのであるが，さし当り，次の2つの特殊なケースについて述べることにする．

(a) 条件式が独立で b のみ確率変数の場合

このとき，条件式は (7) の形となり，さらに (4) と同じような変形を行うと，

$$F\left(\frac{\bar{b}_1-a_1x}{\sigma[b_1]}\right)F\left(\frac{\bar{b}_2-a_2x}{\sigma[b_2]}\right)\cdots\cdots F\left(\frac{\bar{b}_m-a_mx}{\sigma[b_m]}\right) \geqq \alpha \tag{13}$$

ここで $\dfrac{\bar{b}_i-a_ix}{\sigma[b_i]}=y_i$ とおき $F(y_i)=\displaystyle\int_{-\infty}^{y_i}\phi(t)dt$,

$\phi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ とおくと

(13) は

$$g(y) \equiv \prod_{i=1}^{m} F(y_i) \geqq \alpha \tag{14}$$

となる．ここで，左辺の $g(y)$ が y について quasi-concave であるかどうかを見るために

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}=\frac{g}{F(y_i)}\cdot\phi(y_i),\quad \frac{\partial^2 g}{\partial y_i\partial y_j}=\frac{g}{F(y_i)F(y_j)}\phi(y_i)\phi(y_j),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2}=-\frac{g}{F(y_i)}y_i\phi(y_i)$$

を得，これを行列式 D_r に代入する．

$$D_r=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\phi(y_1)}{F(y_1)} & \cdots\cdots & \frac{\phi(y_r)}{F(y_r)} \\ \frac{\phi(y_1)}{F(y_1)} & -\frac{y_1\phi(y_1)}{F(y_1)} & \frac{\phi(y_1)\phi(y_2)}{F(y_1)F(y_2)}\cdots & \frac{\phi(y_1)\phi(y_r)}{F(y_1)E(y_r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\phi(y_r)}{F(y_r)} & \frac{\phi(y_1)\phi(y_r)}{F(y_1)F(y_r)} & \cdots\cdots & -\frac{y_r\phi(y_r)}{F(y_r)} \end{vmatrix} g^{r+1},$$

これを変形すると

$$D_r=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\cdots\cdots & 1 \\ 1 & -\frac{y_1F(y_1)}{\phi(y_1)} & 1\cdots\cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & -\frac{y_1F(y_1)}{\phi(y_1)} \end{vmatrix} g^{r+1}\prod_i\frac{\phi(y_i)}{F(y_i)}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\cdots\cdots & 1 \\ 1 & -p_1 & & \\ \vdots & & -p_2 \quad 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & -p_r \end{vmatrix}\times C,$$

結局　$C=g^{r+1}\prod_{i=1}^{r}\frac{\phi(y_i)}{F(y_i)}>0,\quad p_i=\left(1+\frac{y_iF(y_i)}{\phi(y_i)}\right)$

として

$$D_r=(-1)^r(\prod_{i=1}^{r}p_i)\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}\right)\times C$$

をうる．しかるに $\phi(y)+yF(y)$ は $-\infty<y<\infty$ に対してつねに正であるから，$p_i>0$，したがって

$$(-1)^rD_r>0$$

を得る．故に**定理 1** により，(14) の $g(y)$ が $y\geqq 0$ において quasi-concave となる．

(b)　2つの条件式の b のみ確率変数で相関のある場合

このとき (6) 式は

$$Pr(a_1x\leqq b_1,\ a_2x\leqq b_2)\geqq\alpha \tag{15}$$

となり，さらに変形すると

$$Pr\left(\frac{\bar{b}_1-b_1}{\sigma[b_1]}\leqq\frac{\bar{b}_1-a_1x}{\sigma[b_1]},\quad \frac{\bar{b}_2-b_2}{\sigma[b_2]}\leqq\frac{\bar{b}_2-a_2x}{\sigma[b_2]}\right)\geqq\alpha.$$

そこで　$E\left(\dfrac{(\bar{b}_1-b_1)(\bar{b}_2-b_2)}{\sigma[b_1]\ \sigma[b_2]}\right)=r$　($b_1\ b_2$ の相関係数) とおき，$\dfrac{\bar{b}_1-a_1x}{\sigma[b_1]}=y_1$，$\dfrac{\bar{b}_2-a_2x}{\sigma[b_2]}=y_2$　とおくと，b_1, b_2 に2次元正規分布を仮定すれば，

(15) は

$$g(y_1,\ y_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2}\exp\left\{-\frac{(u^2+v^2-2ruv)}{2(1-r^2)}\right\}dudv$$

$$\geqq\alpha \tag{16}$$

となる．

$\dfrac{\partial g}{\partial y_i}=g_i$,　$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_i\partial y_j}=g_{ij}$　として，

$$g_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{y_2}\exp\left\{-\frac{(y_1{}^2+v^2-2ry_1v)}{2(1-r^2)}\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1{}^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y_2}\exp\left\{-\frac{(v-ry_1)^2}{2(1-r^2)}\right\}dv\bigg/\sqrt{1-r^2}$$

$$=\phi(y_1)F\left(\frac{y_2-ry_1}{\sqrt{1-r^2}}\right),$$

同様に

$$g_2=\phi(y_2)\cdot F\left(\frac{y_1-ry_2}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

$$g_{12}=\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}\left\{\phi(y_1)\phi\left(\frac{y_2-ry_1}{\sqrt{1-r^2}}\right)+\phi(y_2)\phi\left(\frac{y_1-ry_2}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right\},$$

$$g_{11}=-\frac{\phi(y_1)}{\sqrt{1-r^2}}\left\{r\phi\left(\frac{y_2-ry_1}{\sqrt{1-r^2}}\right)+y_1\sqrt{1-r^2}F\left(\frac{y_2-ry_1}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right\},$$

$$g_{22}=-\frac{\phi(y_2)}{\sqrt{1-r^2}}\left\{r\phi\left(\frac{y_1-ry_2}{\sqrt{1-r^2}}\right)+y_2\sqrt{1-r^2}F\left(\frac{y_1-ry_2}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right\}$$

をうる．ここで

$$Y_1=\frac{y_1-ry_2}{\sqrt{1-r^2}},\qquad Y_2=\frac{y_2-ry_1}{\sqrt{1-r^2}} \tag{17}$$

と変数を換えると，

$$y_1=\frac{Y_1+rY_2}{\sqrt{1-r^2}},\qquad y_2=\frac{Y_2+rY_1}{\sqrt{1-r^2}} \tag{18}$$

となり，また

$$\frac{\phi(y_1)}{\phi(Y_1)}=\frac{\phi(y_2)}{\phi(Y_2)}=\exp\{-(r^2y_1{}^2+r^2y_2{}^2-2ry_1y_2)\} \tag{19}$$

となり，この比を k とおく．

一方行列式 D_r の $r=2$ を展開すれば

$$D_2=2g_1g_2g_{12}-g_1{}^2g_{22}-g_2{}^2g_{11} \tag{20}$$

となり，これに (17), (18), (19) を利用すると，

$$\begin{aligned}D_2=&\frac{\phi(y_1)\phi(y_2)k}{\sqrt{1-r^2}}\Big[2F(Y_1)F(Y_2)\phi(Y_1)\phi(Y_2)\\&+\phi(Y_1)F^2(Y_2)\{r\phi(Y_1)+(Y_2+rY_1)F(Y_1)\}\\&+\phi(Y_2)F^2(Y_1)\{r\phi(Y_2)+(Y_1+rY_2)F(Y_2)\}\Big]\\=&\frac{\phi(y_1)\phi(y_2)k}{\sqrt{1-r^2}}\Big[\{\phi(Y_1)+Y_1F(Y_1)\}F(Y_2)\{r\phi(Y_1)\\&\times F(Y_2)+F(Y_1)\phi(Y_2)\}+\{\phi(Y_2)+Y_2F(Y_2)\}\\&\times F(Y_1)\{r\phi(Y_2)F(Y_1)+F(Y_2)\phi(Y_1)\}\Big]\end{aligned} \tag{21}$$

となる．しかるに

$$\{\phi(Y_1)+Y_1F(Y_1)\}F(Y_2)F(Y_1)\phi(Y_2)+\{\phi(Y_2)+Y_2F(Y_2)\}F(Y_1)F(Y_2)\phi(Y_1)\geqq\{\phi(Y_1)+Y_1F(Y_1)\}F(Y_2)F(Y_2)\phi(Y_1)+\{\phi(Y_2)+Y_2F(Y_2)\}F(Y_1)F(Y_1)\phi(Y_2) \tag{22}$$

なることが示されるので(註)，(21) の2行目真中の $F(Y_1)\phi(Y_2)$ と下の $F(Y_2)\phi(Y_1)$ とを入れ換えて，

$$D_2\geqq\frac{\phi(y_1)\phi(y_2)k}{\sqrt{1-r^2}}\Big[\{\phi(Y_1)+Y_1F(Y_1)\}F^2(Y_2)\phi(Y_1)+\{\phi(Y_2)+Y_2F(Y_2)\}F^2(Y_1)\phi(Y_2)\Big](1+r).$$

しかるに $\phi(Y)+YF(Y)>0$, $1+r>0$ であるから結局 $D_2>0$ をうる．すなわち (16) は $y_1, y_2\geqq0$ で quasi-concave である．

(c)　合成関数の quasi-concavity

再び話を一般論にもどそう．いま $g(y)$ をベクトル y の quasi-concave 関数であるとして，さらに y はベクトル x の concave 関数とし，2つのベクトル x, x^0 に対して $y=y(x)$, $y^0=y(x^0)$ が定ったとしよう．

このとき (9) により，$0\leqq\theta\leqq1$ として，

$$g(y)\geqq g(y_0) \text{ ならば } g(\theta y+(1-\theta)y^0)\geqq g(y_0)$$

が成り立つ．また，y の concavity から

$$y(\theta x+(1-\theta)x^0)\geqq\theta y(x)+(1-\theta)y(x^0)=\theta y+(1-\theta)y^0$$

である．もし $g(y)$ がベクトル y のどの成分に対しても単調非減少関数であるならば，次のことが成り立つ．

$$g(y(x))\geqq g(y(x^0))$$

ならば

$$g(y(x\theta+(1-\theta)x^0))\geqq g(\theta y+(1-\theta)y^0)\geqq g(y(x^0)).$$

$g(y(x))=H(x)$ とおけば次の定理が導かれる．

(定理 2)　$g(y)$ が quasi-concave でベクトル $y(x)$ の各成分がベクトル x の concave 関数のとき，$H(x)=g(y(x))$ は quasi-concave である．ただし $g(y)$ はベクトル y の各成分について単調非減少関数とする．

この定理を使ってわれわれは次のことを結論する．さきに証明した (14) は $y\geqq0$ で quasi-concave であるから，

$$y_i=\frac{\bar{b}_i-a_ix}{\sigma[b_i]}$$

という1次変換 (concave) によって得られる確率化された条件式 (13) も quasi-concave である．また同様に (16) から (15) も quasi-concave である．

註 (22) の不等式の左辺から右辺を引いたものを K とすると，

$$K=F^2(X_1)F^2(X_2)\left\{\frac{\phi(Y_1)+Y_1F(Y_1)}{F(Y_1)}-\frac{\phi(Y_2)+Y_2F(Y_2)}{F(Y_2)}\right\}\left\{\frac{\phi(Y_2)}{F(Y_2)}-\frac{\phi(Y_1)}{F(Y_1)}\right\}$$

となる．他方

$$\left(\frac{\phi(Y)+YF(Y)}{F(Y)}\right)'=\frac{F^2-\phi^2-YF\phi}{F^2}$$

$$S_1=F^2-\phi^2-YF\phi \quad \text{とおく}$$

$$S_1'=\phi(F+Y\phi+Y^2F) \quad \text{となる.}$$

さらに $S_2=F+Y\phi+Y^2F$ とおくと

$$S_2'=2(\phi+YF)>0$$

① S_2' はつねに正で0になることはない．したがって S_2 は極小値をとる点をもたない．また $\lim_{Y\to-\infty} S_2=0$ であるからもし負になるとすれば極小点をもたなければならない．故に $S_2>0$ となる．同様にしてつねに $S_1'>0$, $\lim_{Y\to-\infty} S'=0$ 故に $S_1>0$.

以上より

$\dfrac{\phi(Y)+YF(Y)}{F(Y)}$ は単調増加，同様に $\dfrac{\phi(Y)}{F(Y)}$ は単調減少である．

従って，K は正となる．

文　献

(1) Charnes A., W. W. Cooper, "Chance-Constrcined Programming," *Management Science*, vol. 6, 73—89 (1959).

(2) Charnes A., W. W. Cooper, "Determimistic Equivalents for Optimizing and Satisficing Under Chance Constraints," *Operations Research*, vol. 11, pp. 18—39 (1963).

(3) Kataoka S., "A Stochastic Programming Model," *Econometrica*, vol. 31, pp. 181—196 (1963).

(4) van de Panne, W. Popp, "Minimum-Cost Cattle Feed under Probabilistic Protein Constraints," *Management Science*, vol. 9, pp. 405—430 (1963).

(5) Miller B. L., H. M. Wagner, "Chance Constrained Programming with Joint Constraints," *Operations Research*, vol. 13, pp. 930—945 (1965).

(6) Symonds G. H., et al, "Stochastic Scheduling Solution Methods for Stochastic Programming Problems," Tech. Memo, No. 29, Case Institute of Technology, (1965).

(7) Zoutendijk G., *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1960.

(8) Fiacco A. V., G. P. McCormick, "Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non-Linear Programming," *Management Science*, vol. 10, pp. 601—617 (1964).

(9) Arrow K. J., A. C. Enthoven, "Quasi-Concave Programming," *Econometrica*, vol. 29, pp. 779—800 (1961).

(10) Kuhn H. W., A. W. Tucker, "Nonlinear Programming," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, U. C. B. Press (1951).

付録 HIPAC-101 計算機による stochastic programming の計算プログラム

1. 問題　文献3において示した stochastic programming,

$$\max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - q\sqrt{\sum_{i,j} v_{ij} x_i x_j}$$

$$\sum a_{ij} x_j \leqq b_i, \quad i=1,\cdots\cdots,m$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j=1,\cdots\cdots, n$$

の HIPAC-101 による計算プログラムを説明する．

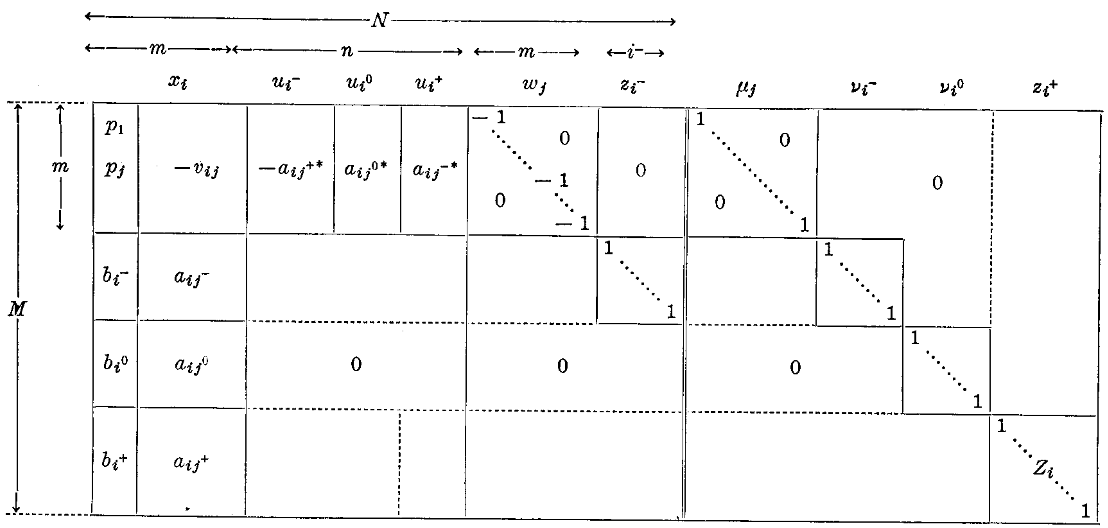
2. 方法　目的関数を $\max \sum_j p_j x_j - q(\sum_{i,j} v_{ij} x_i)/R$ という2次関数とし，R を正のパラメータにとって Wolfe の方法によって等価な線型計画に直して解く．その解より $\sqrt{\sum v_{ij} x_i x_j}$ を計算し R と等しければ止め，等しくなければその $\sqrt{v_{ij} x_i x_j}$ を新しく R としてこれを繰り返えす．

3. 言語　SIP, 1627 短語.

4. データ　データは次の順序でパンチする．I とあるのは整数型を示す．他はすべて1より小さな小数．×××……×．である．表には読み込まれるべき行列の大きさ，数値，変数名が示されている．

第1群：

（1）m：未知数 x_j の数 (I),（2）M：m+条件式の数 n (I),（3）N：$m+n+m+(a_{ij} \geqq b_i$ の条件の数 $i^-)$ (I),（4）表の中の数値全体の scale factor,（5）誤差判定用の小さな正



の数，(6) 最大繰り返えし数 (I)，(7) q の値

第2群：変数の番号.

条件式を3種類に分け $\sum a_{ij}x_j \geqq b_i$ を i^-，$\sum a_{ij}x_i = b_i$ を i^0，$\sum a_{ij}x_j \leqq bi$ を i^+ とし，それらに対応してラグランジュ乗数 n_i^-，u_i^0，u_i^+ をとる．変数の番号は ① x_j に $1 \sim m$，u_i に $m+1 \sim m+n$ をつける．② w_j には $101 \sim 100+m$，z_i^+ には u_i^+ につけられた番号+100 となるようにする．(これはWolfeのシンプレックス法で x_j と w_j，z_i^+ と u_i^+ が同時に基底にならないため)．③ 人為変数 μ_j，ν_i^-，ν_i^0 には $-1, -2, \cdots\cdots$，をつける．④ z_i^- には適当な番号（ただし他と100の差のないもの）をつける．データのパンチは次の順序にする．

① 基底の番号 (I) μ_j，ν_i^-，ν_i^0，z_i^+，合計 M 個

② 他の変数の番号 (I) x_j，u_i，w_i，z_i^-，合計 N 個

第3群：行列の数値（すべて小数形）

適当に scale facor をかけた数値を表の p_1 から横にスペース最小2個以上とり，最後の z_i^- の“0”まで $M \times N$ 個打つ．

以上でデータは終り，テープは繰り返えしの便宜上輪にしておく．なお，$M \times N \leqq 1000$ である．

5. 計算例　文献3に上げた数値例を計算した結果は次表に示す．$q=2.323$ とし，まず R の初期値を1としてはじめると，

No.	R	x_1	x_2	$\sqrt{\sum v_{ij}x_ix_j}$
1	1.0	.3307	.1425	1.470
2	1.470	.4860	.2094	2.160
3	2.160	.7143	.3079	3.174
⋮				
20	7.274550	.8896539	1.220692	7.274650
計算値		.8897	1.2206	7.274

$x_1=3307$，$x_2=1425$ となり，順次繰り返えして20回目には手計算の計算値に大体収束する．他の応用例については別に述べる．最後に計算機を使わせて載いた産業経営研究所に謝意を呈する．

（一橋大学助教授）