数学の歴史的流れと教育的意義との兼ね合いについて

小林（田中）亜矢子

1. 問題提起

以前，大学の授業アンケートにおいて「この授業（微分積分）で定積分が面積である理由が分かり，良かったです.」というコメントをもらったことがある．教員としては授業内容を正しく理解してくれたことが伝わり非常に嬉しい内容であったが，一つの疑問が生じた.

「図形の幾何学的イメージから面積を求めることが元々の定積分の定義であるにも関わらず，なぜ定積分と面積を結びつける理由が分かっていなかったのだろうか？」

そこで，高等学校数学における定積分の扱いについて調べ，一般的な大学教養課程における定積分の定義（歴史的流れに沿った定義方法）との違いを検証してみたいと思う.

2. 高等学校数学における微分積分の学習の流れ

高等学校では数学Ⅱと数学Ⅲにおいて微分と積分の学習をする．このうち，定積分の定義と意味について学習するのは数学Ⅱである．数学Ⅲにおいては，数学Ⅱで学習した内容を踏まえ，より複雑な計算テクニックについて学ぶ.

高等学校学習指導要領解説数学編（平成 21 年 12 月）には，以下の記述がある.

(5)　微分・積分の考え

微分・積分の考えについて理解し，それらの有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする.

イ　積分の考え

㈠　不定積分と定積分

不定積分及び定積分の意味について理解し，関数の定数倍，和及び差の不定積分や定積分を求めること．

㈡　面積

定積分を用いて直線や関数のグラフで囲まれた図形の面積を求めること．（p 34）

また，上記の内容に対する具体的な指導方針として，以下の記述もある．

イ　積分の考え

微分の考えに関連し，積分の考えについても理解させ，直線や関数のグラフで囲まれた図形など，簡単なものについてその面積を求めることができるようにする．なお，［内容の取扱い］の（4）に示されているように，ここで扱う被積分関数は二次までの多項式関数を中心とする．

㈠　不定積分と定積分

微分の逆の演算としての不定積分を導く．さらに，不定積分の計算では，関数の定数倍，和及び差の不定積分を求めることができるようにする．
定積分については，具体的なイメージを与えるために，面積を求める例などと関連付けて導入することも考えられる．

例えば，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，関数 $y=f(x)$ のグラフ，直線 $x=a$，$x=t$（$a \leqq t \leqq b$）及び x 軸で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とすると，$S'(t)=f(t)$ であることが分かり，定積分が面積を表していることを導くことができる．
このほかに，区分求積法の考えに基づいて定積分の定義を直観的に理解させることも考えられる．

㈡　面積

ここでは，定積分の応用として，いろいろな直線や関数のグラフで囲まれた図形の面積を求めることを扱う．いろいろな図形の面積を定積分を計算して求める活動を通して，積分の考えの有用性を認識させる．（p 35）

(5)　イ㈡からも分かるように，高等数学における定積分の指導では定積分と図

形の面積について言及している．しかし「なぜ定積分の値が関数のグラフと x 軸によって挟まれた部分の一定区間の面積であるのか？」を理論的に説明できない生徒が多く，定積分の値が図形の面積であることさえも記憶から抜け落ちる生徒もいる．

ここで教科書ではどの様に扱っているのか，数研出版数学Ⅱ（309）を用いて確認しよう．

ステップ１：微分の定義

ステップ２：微分の逆演算としての不定積分の定義

ステップ３：図形の面積と不定積分の関係

ステップ４：定積分の定義

以上の４段階の過程を経て微分積分について学習する．高等学校では以下の定積分の定義を用いる．（ステップ４）

関数 $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

を $f(\mathrm{x})$ の $x=a$ から $x=b$ までの定積分とよぶ．

定積分の定義に「面積」に当たるものは登場しない．そのため，生徒はステップ３において図形の面積と不定積分の関係を学び，$F(b)-F(a)$ が $y=f(x)$ のグラフと x 軸，直線 $x=a$，$x=b$ によって囲まれた部分の面積であると学習しているが，定積分と図形の面積を切り離して記憶しがちなのではないだろうか．または，ステップ３の内容は微分積分の理論に不慣れな生徒には難しく感じられる可能性が高い．そのため，手っ取り早く定義を覚えて計算技術を習得することに重きを置いた指導がなされた場合，ステップ３の内容は生徒の記憶には残りにくいと考えられる．

3. 大学教養課程における一般的な定積分の定義

大学教養課程では，微分の定義を行い，微分の逆演算としての不定積分を学んだ後に定積分について学習することが多く，これは高等学校の微分積分の学習課程を

踏襲している．ただし，定積分の定義は，所謂リーマン和と呼ばれる「微小量の無限和の極限値」として定義する場合が多い．この考え方は微分積分の歴史的流れにほぼ忠実に定積分の定義を与えている．では，微分積分が発見され，発展してきた歩みを振り返ってみよう．

4. 微分積分の歴史的流れ

図形の面積を求めることは，古くは古代ギリシアのアルキメデスが取り尽くし法により円の面積を求めたことが有名である．アルキメデスの場合は円の図形的な性質に注目し，正多角形で円を近似することと極限の考えを用いた．

その後も多くの数学者が「特徴のある」図形の面積を求める研究をし，特定の関数のグラフによって描かれる図形の面積を所謂「定積分」として表せることを示した．しかし，これらは関数の特徴に依存した考え方であり，「一般の」関数のグラフによって描かれる図形の面積に対する考察は17世紀後半のニュートン，ライプニッツの登場を待たねばならなかった．

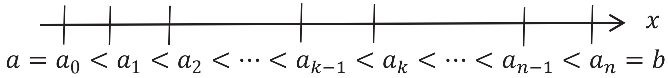
ニュートンとライプニッツはそれぞれ独立に微分積分の考え方に辿りつき，微分積分学の基本定理を示すに至った．現在まで引き継がれている記号 $\int f(x)dx$ や $\dfrac{dy}{dx}$ はライプニッツによって導入されたものである．

微分積分の基本的な考え方を世に送り出した点では二人の仕事は非常に意義があるが，まだまだ荒削りで未完成なものであった．ニュートン，ライプニッツ以降約150年の年月をかけて微分積分は洗練されてゆき，リーマンによって完成された．現在高等学校及び大学教養課程で学習する微分積分がリーマン積分とよばれる所以である．リーマンは一般の関数に対してライプニッツが考えた「面積が簡単に計算できる図形（ライプニッツは三角形を用いた）に分割して近似的に微小な面積を求め，無限小を足し合わせて極限を求める」という考え方を継承して現在まで学び続けられている「定積分」の定義を作り上げた．この定義には「不定積分」という言葉も，もちろん考え方も，存在しない．

〈リーマンの定積分の定義（1854年　教授資格請求論文）〉

関数 $y=f(x)$ が閉区間［a, b］で有界と仮定する．このとき，［a,b］を n 個の小

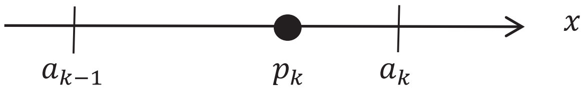
区間に分割する．（図 1）



（図 1）

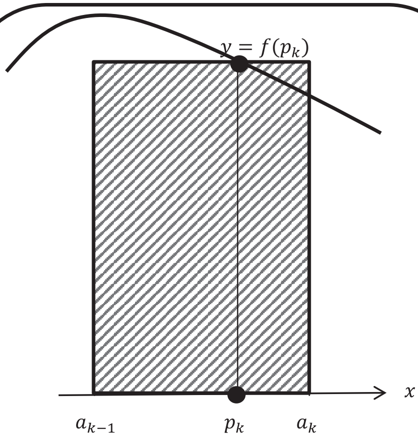
各小区間の幅は n を大きくしたときに区間幅が小さくなれば自由にとって構わない．

各小区間［a_{k-1}, a_k］内の点 $p_k(k=1, 2, \cdots, n)$ を自由にとり，固定する．（図 2）



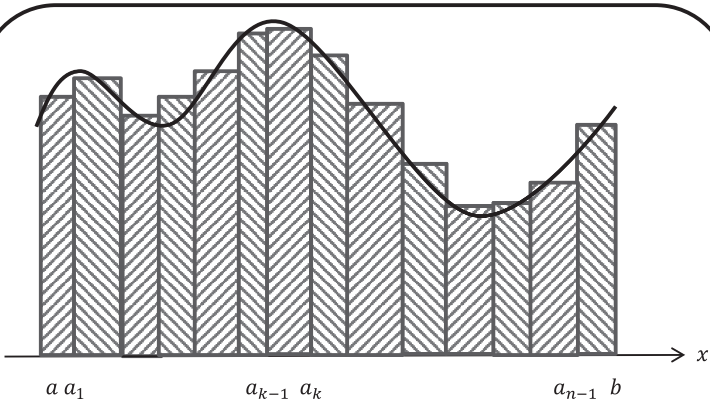
（図 2）

p_k において関数の値 $f(p_k)$ と小区間の長さの積を求める．これは図形的には小区間の長さを底辺，関数の値を高さにもつ長方形の面積である．（図 3）



（図 3）

すべての小区間に対して同様に長方形の面積を求め，n 個すべての長方形の面積を足し合わせた値をＳとおく．（図４）



（図４）

区間 $[a, b]$ の分割の個数 n を無限に大きくするとき，分割の仕方にも依らず，p_k の選び方にも依らずＳが一定の値に近づくならばその値を $\int_a^b f(x)dx$ と表す．

以上がリーマンの導入した定積分の定義である．（注意：上記定義方法は記号の用い方などがリーマン自身の表現とは若干異なるが，本質的には同じ内容である．）

歴史的な流れはそのまま学問の成長の流れである．学問の本質を理解しようとするとき，その歴史的流れを無視することは避けるべきと私は考える．しかし，歴史的流れに忠実に教えることと，生徒が内容を理解しやすいことは別問題とも言える．この点については多くの教員がジレンマに感じていることであろう．私もまた例外ではない．

5. 高等学校における微分積分の教え方の長所と短所及び，歴史的流れに沿った微分積分の教え方の長所と短所

ここまで，高等学校における微分積分の教え方と，歴史的流れについて触れてき

たが，これら2つは全く異なることが分かる．それぞれに長所と短所があり，一概にどちらが教育に適しているとは言い切ることができない．ここで，それぞれの長所と短所をまとめてみたい．

●高等学校での微分積分の教え方の長所と短所

＊長所

・$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$：値という定義が覚えやすく，すぐに計算練習ができる．

＊短所

・定積分の値が面積であることを忘れやすい．

・なぜ$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$を定義として採用したのか疑問にもつ場合がある．例えば，差ではなく和や積を定義として採用しても良かったのではないか，などと疑問に感じる生徒もいる．（注意）well-definded を示すことで解消されるが，well-definded の考え方，必要性が高校生には難しい．

●歴史的流れに沿った教え方の長所と短所

＊長所

・$\int_a^b f(x)dx$が面積であることを印象付けられる．

・不定積分を用いずに面積であることを表している．

・不定積分が初等関数の演算で表現できない場合にも定積分の値が存在する場合があることや，近似値ならば求めることが可能であることが理解しやすい．

＊短所

・定義を理解することが難しい．

・定義通りに定積分を求めようとすると「分割の仕方に依らず」や「p_kの選び方に依らず」の部分の正確な検証をすることが困難である．

6. 発達段階に応じた教え方の工夫

そもそも，なぜ高等学校において微分積分が数学Ⅱと数学Ⅲの2つに分割されているのか．この理由こそが，高等学校における定積分の定義が$\int_a^b f(x)dx = F$

$(b)-F(a)$である理由に通じると私は考える．

微分積分の数学Ⅱと数学Ⅲの内容の大きな違いは扱う関数の範囲である．一般の関数に対する定義は数学Ⅱにおいても数学Ⅲにおいても扱うが，具体的な計算については数学Ⅱでは多項式，つまり

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

しか扱わない．しかも，指導要領解説にもあるように，具体的に計算として扱うのは２次までの多項式が望ましいとされている．これはまさしく「苦肉の策」なのである．なぜなら，現在，多くの高等学校では理系学部に進学する生徒以外は数学Ⅲを履修していない．もしも初等関数（三角関数，指数関数，対数関数など）についても含めて一度に微分積分を学習する場合，数学Ⅲの教科書に合わせることになり，多くの高校生に対して微分積分に触れる機会を与えることが事実上不可能になる．しかし，微分積分が現代数学の基礎，根幹をなしその発見発達が科学の進化にいかに影響を与えたかはすべての高校生に「分かりやすく」伝えるべきである．こういった意図から数学Ⅱ，数学Ⅲに分けるという方法が長く採られてきているのだろう．ここで大切なことは「分かりやすさ」である．すべての高校生が，ある一定の理解ができる内容であることが必須条件である．これに歴史的流れに沿った定積分の定義は全く相いれないのである．

よって，高等学校の数学教育では定積分が面積であることは定理として示すこととして，定義はあくまで「分かりやすさ」を優先したものを採用したのであろう．数学にとって定義は最も基礎となる約束事，出発点である．定義が理解できなければその先に進むことはできない．この出発点のハードルを低くすることに高等学校数学における教育的配慮があるのだ．

しかしながら大学は教育機関でもあるが，研究機関でもあり，学問に対する探究心なくして講義は存在するべきではない．その意味ではリーマン積分の「微小量の無限和としての極限」というリーマン和を用いた，やや理解するにはハードルの高い定義を定積分の定義として用いるべきだと私は考える．そしてその理解を助けることこそが大学教育の本来の姿であろう．「分かりやすさ」に迎合することなく，学問の本来の姿により近いものを学生に提供し，共有しあうことで高等学校では扱うことができなかった学問の面白さや成長過程を一人でも多くの大学生が触れ，体感してくれることを切に願う．

参考文献

NEWTON　サイエンステキストシリーズ別冊 「ニュートンの大発明　微分と積分」（2011 年）

「積分の歴史　アルキメデスからコーシー，リーマンまで」ニキフォロフスキー著　馬場良和訳　現代数学社 （1993 年）

「数学史入門　微分積分の成立」 佐々木力著　ちくま学芸文庫 （2005 年）

「微積分名作ギャラリー　ニュートンからルベーグまで」 ウィリアム・ダンハム著　一楽重雄，実川敏明訳　日本評論社 （2009 年）

「数学の歴史」 長岡亮介著　放送大学教育振興会 （2003 年）

高等学校数学科用　数学Ⅱ （数Ⅱ/309）数研出版 （2013 年）

高等学校数学科用　数学Ⅲ （数Ⅲ/308）数研出版 （2013 年）

高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編　平成 21 年 12 月　文部科学省 （2009 年）