《研究ノート》

ブール代数での混型連立不等式について

山田欽一

1 問　題

筆者は前に本誌で，ブール代数での混型連立不等式

$$f(x)=0,\quad g(x)>0 \qquad (1)$$

が可解であるための必要また十分な条件を確立し，それを消去法として全称命題と1つの特称命題の混った関係抽出の問題に応用することを例示した．そして，古く筆者が試みた擬項による方法[1]にくらべて，この方法がずっと直接的であることを註釈した．

しかし，擬項による方法が数個の未知数について，数個の不等式を含む混型連立不等式

$$\begin{cases} f(x_1,\cdots\cdots,\ x_m)=0 \\ g_1(x_1,\cdots\cdots,\ x_m)>0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n(x_1,\cdots\cdots,\ x_m)>0 \end{cases} \qquad (2)$$

にも使えるのに対して，筆者がこの前本誌で証明した定理は，(1) から分かるとおり，未知数1つ，不等式1つの場合についてである．したがって，関係抽出の処理の仕方がずっと直接的であるとはいえ，媒概念の数と特称命題の数から見ると大へん力弱いものである．

そこで，次の問題は (1) を処理したのと同じ手法で (2) を処理してみることとなる．そこへの第一歩として，筆者はとりあえず，未知数の数だけを増して，

$$\begin{cases} f(x_1,\cdots\cdots,\ x_m)=0 \\ g(x_1,\cdots\cdots,\ x_m)>0 \end{cases}$$

の可解条件を確立することを試みた．そして，一応の結果を得た．これは関係抽出に応用できる実用度の高いものであるから，その筆算をスイッチ回路に代行させることも十分意味のあることと考えて，1つのスイッチ回路を工夫した[2]．

ここでは，不等式の数を増す第一歩として，とりあえず，混型連立不等式

$$f(x)=0,\quad g(x)>0,\quad h(x)>0 \qquad (3)$$

の可解条件を確立することを試みる．

2 定　理

この問題に答える定理と，その証明に援用する補助定理を簡明に記述するため，行列の記法を借用する．

0 の記入はその元が 0 であること，文字の記入はその元が正であること，また無記入はその元が全く任意であることを意味

するものとする．たとえば

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(0) \\ h(6) & h(0) \end{bmatrix}$$

が，類

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

であるとは，

$$g(1)>0, \quad g(0)=0, \quad h(0)>0$$

であって，$h(1)$ が全く任意であることを意味する．

ブール代数系 B の元 a について

$$0 \leqq x \leqq a$$

をみたす元 x の数，すなわち集合

$$\{x|0 \leqq x \leqq a,\ a \in B,\ x \in B\}$$

のカージナル数を a の次元といい，$N(a)$ と書く[3]．たとえば $N(0)=1$, $N(a) \geqq 2$ $(a \neq 0)$ である．

とくに，$N(a)=2$ である元を原子といい，その集合を A と書く．すなわち

$$A=\{x|N(x)=2,\ x \in B\}$$

である．

補助定理　連立不等式

$$g(x)>0, \quad h(x)>0 \qquad (4)$$

の可解条件は

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(0) \\ h(1) & h(0) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

が，次の6つの類のどれかであることである．

(i) $\begin{bmatrix} p & \\ r & \end{bmatrix}$　　(ii) $\begin{bmatrix} & q \\ & s \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ $p \neq s$　　(iv) $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ $p \bar{\in} A$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{bmatrix}$ $q \neq r$　　(vi) $\begin{bmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{bmatrix}$ $q \bar{\in} A$

証明：必要性；

(4) が可解であるとすれば，(4) の成立つ x がある．一般に

$$g(1)+g(0) \geqq g(x), \quad h(1)+h(0) \geqq h(x)$$

であるから，(4) によって

$$g(1)+g(0)>0, \quad h(1)+h(0)>0$$

となる．

すなわち，$g(1)$, $g(0)$ のどちらか，また $h(1)$, $h(0)$ のどちらかが正である．したがって，行列 (5) の元の正，零についてはこれら6つの類のどれかでなくてはならない．

まず，類

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

について

$$p=s, \quad p=s \in A \qquad (6)$$

とすれば，(4) は

$$px>0 \quad px'>0$$

である．

$$p \geqq px > 0 \qquad p \geqq px' > 0$$

と

$$p \in A$$

によって，

$$p = px, \qquad p = px'$$

となる．ところが，この2式からは

$$p = 0$$

となって

$$p > 0$$

に矛盾する．

したがって，(6) が成立たず，この類は (iii) または (iv) の2つに分かれる．

類

$$\begin{bmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

についても，全く同じように (v) または (vi) の2つに分かれることが証明できる．

十分性；

逆に (5) がこれら6つの類のどれかであるとする．

(i) $g(1) = p > 0$
$h(1) = r > 0$

によって可解である．

(ii) $g(0) = q > 0$
$h(0) = s > 0$

によって可解である．

(iii) $p \neq s$ によって

$$ps' + p's > 0$$

である．

$ps' > 0$ のときは

$g(ps') = ps' > 0$
$h(ps') = s > 0$

によって可解である．

$p's > 0$ のときは

$g(p + s') = p > 0$
$h(p + s') = p's > 0$

によって可解である．

(iv) このとき，(4) は

$$px > 0, \qquad px' > 0$$

にほかならない．

$$p \bar{\in} A$$

によって

$$p \geqq a,\ b > 0,\ a \neq b \qquad (7)$$

となる a, b がある．

いま

$$p \neq a \qquad (8)$$

とする．

まず，(7) によって

$$pa=a>0$$

すなわち

$$g(a)>0 \qquad (9)$$

また.

$$h(a)=pa'$$

であるが，(7) と (8) によって

$$pa'>0$$

であるから

$$h(a)>0 \qquad (10)$$

となる.

(9) と (10) によって可解である.

(v) は (iii) の $g(x)$ と $h(x)$ を取換えたものであり，(vi) は (iv) の $g(x)$ と $h(x)$ を取換えたものである.

証了.

ブール代数の元を元とする行列 (5) を (4) の**判別行列**といい，これが補助定理の 6 つの類のどれかであるとき，(5) が**可解型**であるということにする.

定　理　混型連立不等式

$$f(x)=0, \quad g(x)>0, \quad h(x)>0$$

の可解条件は

$$f(1)f(0)=0$$

が成立ち，行列

$$\begin{bmatrix} g(f'(1)) & g(f(0)) \\ h(f'(1)) & h(f(0)) \end{bmatrix}$$

が可解型となることである.

証明：　この混型連立不等式が可解であれば，方程式

$$f(x)=0$$

が可解である．その条件は

$$f(1)f(0)=0 \qquad (11)$$

であって，根の公式は

$$x=f(0)+f'(1)u \qquad u \text{ は任意定元}$$

である.

したがって，上の混型連立不等式の可解は，(11) の成立つことと，u についての連立不等式

$$g(f(0)+f'(1)u)>0, \quad h(f(0)+f'(1)u)>0$$

の可解と同値になる.

この連立不等式の判別行列は (11) によって

$$\begin{bmatrix} g(f'(1)) & g(f(0)) \\ h(f'(1)) & h(f(0)) \end{bmatrix}$$

であるから，これが可解型であることと，(11) の成立つことが求める条件である.

証了.

これで，(1) を (2) に拡張する一歩，不等式の数の増加が進められたことになる.

3 註　釈

まず，補助定理は 2 つの不等式だけからの消去法になってい

る.

特称命題だけから何らかの推論を試みることについては,「媒概念不周延の禁則」など,結論を下すにあたって注意しなくてはならない場合があって,旧い形式論理学では大切な話題になっている.

そして,この補助定理は2組の特称命題だけから,どれだけのことが結論できるかを教えている.

なお詳しくいえば,(i) と (ii) は特称命題1つ1つを切離してのいわば直接推理であるが,(iii) と (v) は2つを絡み合わせての結論であって1つの間接推理になっている.このようなわけで,この補助定理は旧い形式論理学が臆病にあるいは大まかに扱っていた問題に冷静にあるいは細まかに取組んでいるものといってよかろう.(iv) と (vi) は命題の原子性にかかわることであって旧い形式論理学の中でどこに位した話題であるか,また推論の理論的あるいは技術的考察の中でどれほどの意味をもつものであるかはもっと考えてみなくてはなるまい.

つぎに,定理は多くの全称命題と2つの特称命題による関係抽出の技術を与えるものである.消去する項が x 1つだけであるから,(1) から(2) への拡張としては,ほんの第一歩にすぎない.そして,次の問題は,混型連立不等式

$$f(x)=0$$
$$y_1(x)>0,\cdots\cdots\cdots,\ g_n(x)>0$$

の可解条件の確立である.

ここで比較のため旧稿の例題をこのノートの定理で扱っておく.[4]

例 a がすべて m でなく,m がすべて b であり,b がすべて m または c である.ある c が b そして m であり,またある c が a でも m でもない.このとき a, b, c だけの間にはどんな関係があるか.

はじめの全称型前提を1つにまとめて

$$am+mb'+bm'c'=0$$

すなわち,

$$f(m)=(a+b')m+bc'm'=0$$

となる.

あとの二つの特称型前提はそれぞれ

$$g(m)=bcm>0,\qquad h(m)=ca'm'>0$$

となる.

定理によって

$$abc'=0$$

が成立ち,行列

$$\begin{bmatrix} a'bc & 0 \\ a'b'c & a'c \end{bmatrix}$$

が可解型となる.

1-2 元が0であるから (ii), (v), (vi) にはならない.

(i) は $\quad a'bc>0,\quad a'b'c>0$

(iii) は $\quad a'b'c=0$

$\qquad\quad a'bc\neq a'c$

となるが,この2つは両立しないので,この類にはならない.

(iv) は　　$a'b'c=0$

$$a'bc=ca'\in A$$

であるが，第1式は第2式と同値であるから第2式とその両辺が原子でないことだけでよい．

よって，求める関係は，「(1) a そして b であるものはすべて c であって，ある c が a でなく b であり，またある c が a でも b でもないか，(2) a そして b であるものはすべて c であって，c はかならず a または b であって，ca' は原子でない」こととなる．

旧稿の結論には v の第1項から来る $a'b'c>0$ を見落している．ここに謹んで訂正させて頂きたい．これは筆者の不注意であって，旧法の欠陥ではない．(1) だけで，(2) が旧稿に欠けているのは，ブール代数のより詳しい考察に必要な概念 $N(x)$ がまだ採り入れてなかったことによる旧法の欠陥である．

(1)　山田欽一「ブール代数での新しい消去法について」『一橋論叢』LII 1 (1964), pp. 43～47.

(2)　Yamada, K. and Yoshida, K: An Application of Boolean Algebra in Practical Situations, *Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences*, VI (1965).

(3)　この概念の活用については
山田欽一「ブール代数での方程式」『自然科学研究 6』一橋大学 (1964), pp. 13～40.

(4)　山田欽一「ブール代数に擬項を導入することとその応用」『一橋論叢』XLII 2 (1959), pp. 17～35.

(1964—12—15)
(一橋大学教授)