学籍番号:　CD152005

不確実性下での資産価格

Asset Pricing under Uncertainty

(要　　旨)

大学院　商学　研究科

博士後期課程　会計・金融　専攻

氏名 :　五十嵐 徹

本論文の目的は

1. 完全情報のもとでのポートフォリオ選択問題における投資家の「ヘッジ需要」がどのようにして決まるかを理解することと，
2. 不完全情報下での価格付けを考える上での手がかりとなるような具体例を示すこと

である．特に，前者の問題に関しては二期金分離を切り口とし，後者の問題に関しては投資家の思惑が価格に与える影響と保険料率の決定問題を扱う．

研究の背景

Lucas (1978) や Cox, Ingersoll, and Ross (1985) に代表される資産価格理論では，資産価格や無リスク金利を投資家の選好や市場清算条件などから導出する．例えば，Lucas (1978) モデルでは消費財の生産量をモデル化した上で，これを投資家が最適化の結果，生産をその期のうちにすべて消費し，かつ超過需要・供給が発生しない (市場が清算する) ように生産技術の価格を決定する．一方の Cox, Ingersoll, et al. (1985) モデルでは，生産技術の価値の変動自体をモデル化し，この生産技術と安全資産に対して投資を行う投資家が最適化の結果，市場が清算するような無リスク金利を導出する．

資産価格理論のうち，株式市場やオプション価格を分析する上で最も重要な理論の一つが資本資産価格モデル (CAPM, capital asset pricing model, Sharpe (1964)) である．CAPM によると，投資家が平均分散基準 (同じ期待リターンを実現する投資戦略の中で，リターンの分散が小さい投資を選好する基準) に従うと仮定したとき，個別の株式の期待超過リターンは市場ポートフォリオの期待超過リターンに比例する．この結果を導出する際に重要な役割を果たすのが，平均分散基準の下ですべての投資家は，安全資産とある共通の危険資産のポートフォリオからなるポートフォリオに投資を行うという性質である．このような性質を二基金分離 (mutual fund separation) という．CAPM では，リターンの標準偏差と無リスク金利に対する期待超過リターンの比が最大になるような危険資産の

ポートフォリオが選ばれ，この比は 1 ファクターモデルを分析した Sharpe (1963) に因んでシャープレシオと呼ばれている．

Merton (1973) は二時点の問題であった CAPM に連続時間のダイナミクスを導入した (ICAPM, intertemporal CAPM)．Merton (1973) は連続時間の効用最大化問題を解くために Hamilton–Jacobi–Bellman 方程式 (HJB 方程式) を利用し，投資家の投資を瞬間的なシャープレシオを最大化するポートフォリオへの投資 (myopic demand) と，投資家ごとに異なるポートフォリオへの投資 (hedging demand) に自然に分解できることを示した．Merton (1973) の設定では対数効用を持つ投資家は myopic demand 部分にのみ投資を行い，最適な投資戦略も比較的簡単に求めることができる．HJB 方程式は現在も幅広く用いられる最適化手法で，取引費用がある場合にも利用される (例えば取引量に応じたコスト: Constantinides (1986), Framstad, Øksendal, and Sulem (2001); 取引回数に応じたコスト: Lo, Mamaysky, and Wang (2004), Øksendal (1999))．

Black and Scholes (1973) は同年，CAPM と連続時間におけるオプション価格の関係を明らかにした．すべての条件付請求権が複製できる完備市場を仮定したとき，オプションのペイオフを原証券で複製するためにかかるコストと，CAPM のリスクとリターンの関係から得られる価格が一致するというものである．この関係はその後，リスクの市場価格・リスク中立確率の形で発展し，オプション価格理論の中核となる．オプション価格はリスク中立確率やヘッジ可能性の観点から論じられることが多いが，もともとは均衡に（また効用最大化に）基づいた CAPM を根拠にしていたということは注目に値する．

オプション価格理論と効用最大化理論の接点を探る手がかりの一つが Cox and Huang (1989) と Karatzas, Lehoczky, and Shreve (1987) のマルチンゲールアプローチである．マルチンゲールアプローチは，投資家の最適化された消費と割引かれたリスク中立確率の Radon–Nikodym 微分 (確率微分ファクター, SDF, stochastic discount factor) の関係に着目したポートフォリオ最適化手法で，離散時間モデルにおける次の議論の連続時間モデルへの拡張である: (i) 資産価格（市場）と SDF はその積がマルチンゲールになる（期待リターンがゼロになる）という意味で直交している (ii) 最適化された消費においては，投

資家は市場での取引でポートフォリオのパフォーマンスを改善できないので，無差別曲線は市場と接する (iii) よって最適化された消費における効用関数の勾配と SDF は同じ方向を向いていなければならない．Cvitanić and Karatzas (1992) はこの手法を制約付きの最適化問題にまで拡張した．

マルチンゲールアプローチは最適な消費を具体的に示すものの，これを達成するためにどのようなポートフォリオを組めば良いかまではわからない．これを見つけるための一つの方法が Malliavin 解析の Clark–Ocone の公式である．Clark–Ocone の公式は確率変数のマルチンゲール表現を Malliavin 微分を用いて表現する公式で，Ocone and Karatzas (1991) によってポートフォリオ選択問題に応用された．Ocone and Karatzas (1991) の結果からも，対数効用を持つ投資家は瞬間的なシャープレシオ最大化ポートフォリオを持つことが，よって二基金分離が常に成立することが示唆される．

二基金分離と投資家の選好については，たとえば，Cass and Stiglitz (1970) や Dybvig and Liu (2018) は 1 期間モデルで，Schachermayer, Sîrbu, and Taflin (2009) は Brown 運動が駆動する連続時間モデルで，それぞれ二基金分離が成立するための効用関数の条件を導いている．逆に，すべての投資家の間で二基金分離が成立するような市場の条件に関する研究もなされており，Chamberlain (1988) は二基金分離と，リスク中立確率の Radon–Nikodym 微分のオプションのヘッジ可能性が対応することを明らかにした．二基金分離の成立が知られる「定数係数のモデル」や，「リスクの市場価格過程のノルムが確定的なモデル (Nielsen and Vassalou, 2006)」は Chamberlain (1988) の結果の具体的な例である．

資産価格理論の様々な場面で問題となるのが不完全情報である．近年の研究をいくつか挙げてみても多岐にわたる: Fajgelbaum, Schaal, and Taschereau-Dumouchel (2017) は不況が続く理由を示すために，今日の投資量が明日に得られる情報量を決める一般均衡モデルを構築した．Dow and Han (2018) は裁定取引者の持つ情報に着目し，危機時に彼らが資本制約によって十分な注文が出せないと情報の非対称性が深刻になる可能性を示した．非対称情報モデルに連続時間のダイナミクスを導入した Hwang (2018) は，質の悪い

資産が先に売られることで情報の非対称性が最終的にはある程度緩和される可能性を示唆している．Frug (2018) は医者と患者の間の情報の非対称性が診察の順番を正しく選ぶことで解消できる可能性があることを示している．Jeong (2019) のモデルでは情報の送り手が多数決で望んだ結果を得るために，敢えて情報をぼかすチープトークを効果的に利用している．Eyster, Rabin, and Vayanos (2018) は Eyster and Rabin (2005) の cursed (expectations) equilibrium の概念を利用して，投資家が価格から得られる情報をあえて利用しない状況での均衡価格を導出している．

投資家が直接観測できないパラメータに関して異なる確率分布を想定する信念の違いは，情報の非対称性から生じる問題の一つの代表例である．Harrison and Kreps (1978) や Scheinkman and Xiong (2003) は，信念の違いがあるときには資産の取引価格がその時点で最も楽観的な投資家の資産のペイオフの評価額よりも高くなりうることを示している．これは，資産の保有者は資産のペイオフだけでなく，あとでこの資産を別の投資家へ売却できるオプションも持つためであると解釈される．本論文では，第 3 章においてこの問題を扱う．

不完全情報は保険に置いて重要な問題の一つである (Prescott and Townsend, 1984; Rothschild and Stiglitz, 1976)．保険数理の信頼性理論の代表である Bühlmann (1967) モデルでは，直接観測できない契約者の事故率を毎年の事故の実績から推定する方法を離散時間モデルにおいて議論している．しかしながら，連続時間で考えることの多い破産理論では，これらの点はほとんど議論されていないように思われる．本論文では第 4 章でこの問題を扱う．

このような背景の下，本論文では第 2 章において「すべての投資家が最適化の結果同じ危険資産のポートフォリオを持つ市場の条件」と「すべての市場で，投資家同士が最適化の結果同じ危険資産のポートフォリオを持つ効用関数の条件」ついて解析的な性質を分析した上で，リスク中立確率に仮定をおいた非完備市場における価格付け (特に MEMM の仮定) について考察する．第 3 章では Scheinkman and Xiong (2003) モデルを基本に，これまで考慮されてこなかった投資家の価格交渉力の違いを仮定したモデルを立て，投資

家の売り手としての価格交渉力と買い手としての価格交渉力の違いが取引価格やそのボラティリティに与える影響について分析する．第 4 章では最適な保険料率 (De Finetti の問題) という視点から破産理論に不完全情報を組み合わせた問題を考察する．

第 2 章の概要

1 期間のポートフォリオ選択問題において，安全資産があるときには平均分散基準に従う投資家はみな，危険資産として同じポートフォリオを持つことが知られ，この性質が CAPM を導く際に重要な役割を果たす．Cass and Stiglitz (1970) は，このような二基金分離と投資家の選好の関係を 1 期間モデルにおいて明らかにした．

この章では，幾何 Brown 運動の完備市場において

(1) すべての投資家が最適化の結果同じ危険資産のポートフォリオを持つ市場の条件と
(2) すべての市場で，投資家同士が最適化の結果同じ危険資産のポートフォリオを持つ効用関数の条件

について，特に解析的な条件について分析する．

(1) の問題については，Chamberlain (1988) の Brown 運動の市場における研究や，Schachermayer et al. (2009) の一般のセミマルチンゲールの市場における研究などがある．Schachermayer et al. (2009) は，完備市場で無リスク金利がゼロのとき，二基金分離が投資家間で常に成立するための必要十分条件が，「あるポートフォリオ (ニュメレールポートフォリオと呼ばれる) に関する全てのヨーロピアンオプションが安全資産と危険資産の 1 つのポートフォリオによって複製できること」であることを示した．本論文のモデルにおいてニュメレールポートフォリオはシャープレシオ最大化ポートフォリオとして特徴づけられる．

Chamberlain (1988) や Schachermayer et al. (2009) の結果は強力であるものの，「ニュメレールポートフォリオに関する全てのヨーロピアンオプションが安全資産と危険資産の

１つのポートフォリオによって複製できること」を具体的に与えられた市場モデルが満たすかを調べることは通常，困難である．このため，二基金分離のための解析的な条件に関する研究もされている．Nielsen and Vassalou (2006) は幾何 Brown 運動の市場において「リスクの市場価格のベクトルとしてのノルムと無リスク金利の双方が確定的」な場合に二基金分離が成立することを，Dokuchaev (2014) は「期待リターンやボラティリティなどのパラメータが危険資産価格を駆動する Brown 運動とは独立」という特定の非完備市場において二基金分離が成立することを，それぞれ示している．しかしながら二基金分離のための解析的かつ包括的な条件は知られていない．

本論文では，Brown 運動が駆動する完備市場において二基金分離が成立するための条件を，解析的な形で導出する．手法としては，まず Karatzas et al. (1987) のマルチンゲールアプローチを利用して投資家の最適化された終末時点の富を求め，これに対して Ocone and Karatzas (1991) の Clark–Ocone の公式を適用して期中の保有戦略を導出する．Karatzas et al. (1987) のマルチンゲールアプローチは Schachermayer et al. (2009) で用いられた方法と異なり一般のセミマルチンゲールの市場モデルには利用できないものの，無リスク金利が確率的な場合にも利用できるというメリットがある．

二基金分離が成立するための必要十分条件は，パラメータの有界性を仮定したとき，「ニュメレールポートフォリオの Malliavin 微分のある条件付き期待値がニュメレールポートフォリオの拡散係数と同じ方向を持つこと」となる．条件に Malliavin 微分が現れるのは，投資家はまずニュメレールポートフォリオ（シャープレシオ最大化ポートフォリオ）に投資を行い，その後 Malliavin 微分で表現される不確実性を減らすような投資を行うためである．後者への需要を論文中では “demand for non-Sharpe ratio maximizing portfolio” と呼んでおり，この需要は消費時点での投資家の富，限界効用，リスク許容度と初期時点での shadow price の４つの要素によって決まる．

(2) の問題については，Cass and Stiglitz (1970) および Dybvig and Liu (2018) によって，１期間の完備市場において二基金分離が常に成立するための投資家の効用関数の条件が示されている．連続時間の幾何 Brown 運動の市場では，Schachermayer et al. (2009)

が二基金分離が常に成立するためには，投資家が同一のパラメータの対数効用またはべき効用 (CRRA 型効用関数) を持たなければならないことを示している．Schachermayer et al. (2009) では，これらの効用関数でないと二基金分離が成立しないような具体的な市場は示されていない．この論文ではそのような市場を具体的に示す．また，Schachermayer et al. (2009) では考慮されていなかった無リスク金利の確率的な変動のみによっても，二基金分離のために投資家の効用関数の形状に制限が必要な場合があることを示す．これらは，投資家のいわゆる「ヘッジ需要」に関するさらなる理解に役立つことが考えられる．

応用例として，二基金分離の観点から非完備市場における価格付けについて考察する．特に，非完備市場における価格付け問題で用いられる架空証券を用いた手法について考察する．これは市場が完備になるように危険資産を追加し，この新たに加えられた危険資産 (架空証券) を各投資家が最適化の結果，保有しないようにリスクの市場価格 (リスク中立確率) を決定する手法である．すべての投資家が同じリスクの市場価格を想定していると仮定するとき，これは各投資家が危険資産のポートフォリオとして市場に元々存在した証券のみを保有することを意味するため，特に 2 次元の幾何ブラウン運動の市場においては二基金分離による分析が可能であると考えられる．本論文では，すべての投資家が対数効用を持つことと，MEMM がリスク中立確率として選ばれることの関係を二基金分離の観点から示す．

第 3 章の概要

株式の将来の配当について投資家間に信念の違いがあるとき，その取引価格が投資家の配当の評価額よりも高くなりうることが知られている．Harrison and Kreps (1978) はさらに，株価が最も楽観的な投資家の配当評価額をも上回る場合があることを示した．これはある時点での株式の保有者が，配当について楽観的な見方をしている別の投資家に自分の評価額より高く株式を売却できることや，それを見越した別の投資家がこの差額も含めて株式の評価を行うことによって生じる．すなわち株式の保有者が配当を受け取る権利だけでなく，将来株式を別の信念を持つ投資家に売却する権利 (オプション) を持つために

生じる現象で，思惑 (speculation) と呼ばれる．Scheinkman and Xiong (2003) は投資家に事前には楽観的・悲観的の別がない場合であっても，投資家の思惑による取引価格の歪みが生じることを示した．

投資家の思惑は，バブルと関連付けられることもあるが，先行研究では，売り手に完全な価格交渉力がある (買い手の期待ペイオフは常に外部機会に等しいゼロになる) と仮定した分析が主であった．しかし，バブルの形成期 (売り手が価格交渉力を高めている状況) やバブル崩壊後 (買い手が価格交渉力を持っている状況) において投資家の思惑が価格に与える影響については分析がされていない．

この章では，Scheinkman and Xiong (2003) モデルを基礎にリスク中立な売り手と買い手の双方が価格交渉力を持ちうる場合を仮定する．このとき，買い手の期待ペイオフは必ずしもゼロにならず，買い手にとってもオプション価値が生じることになる．すなわち株価は，配当の評価額，再売却オプション，買戻しオプションの 3 つの要素からなることになる．取引は買い手の留保価格と売り手の留保価格の間で起こりうるが，取引価格が買い手の留保価格に近づくほど買い手の期待ペイオフは小さくなり，逆に売り手の留保価格に近づくほど売り手の期待ペイオフは小さるなる．そのため，この論文ではこれを価格交渉力の大きさとして定義し，価格交渉力の違いが取引価格とそのボラティリティに与える影響について分析する．

このような仮定の下，2 人の投資家のパフォーマンス (期待ペイオフ) の値の組が等しいにもかかわらず，価格過程が異なる均衡が存在することを示す．この価格の差は，投資家の売り手としての価格交渉力と買い手としての価格交渉力の差から生じる．これは，期間を通じての期待ペイオフは最初の売り手の売り手としての価格交渉力のみで決まる一方で，取引価格はそのときの価格交渉力によって決まるためである．例えば売り手が強い価格交渉力を持つ場合には，売り手は買い手の留保価格近くまで価格を引き上げることができるが，これを予期した現在の保有者が，売り手でいる間にこの分も価格に含め，再売却オプションを形成する．このオプションに対するオプション部分が，価格過程の違いをもたらす．

さらに，投機的な取引が取引価格のボラティリティに与える影響を数値的に分析する．具体的には，売り手 (または買い手が) 価格交渉力を高めているときにはボラティリティは上昇する傾向にあり，双方が互いに売り手として (または買い手として) 価格交渉力を持っているときにはボラティリティは減少することを示す．

投資家の思惑によって，取引価格そのものが上昇する場合でもそのボラティリティは減少しうるというのは一見，矛盾するようであるが，配当の評価とオプション価値の負の相関によって説明することができる．売り手が強い価格交渉力を持っている場合には，株価は買い手の留保価格 (買い手による将来の配当の評価額と再売却オプションの和) に近くなる．もし買い手の配当評価額が高ければ，売り手の配当評価額は相対的に低くなり，結果として再売却オプションの価値は小さくなる．すなわち両者の変動が打ち消し合うことになり，その和である株価としてのボラティリティは減少することになる．一方で売り手が力を強めている状況では，価格を構成する配当評価額は現在の売り手の評価を強く反映するのに対してオプション価値は現在の買い手の再売却オプションを強く反映することになる．これらは正の相関を持つため，このような場合では投資家の思惑によって株価のボラティリティは上昇することになる．

第 4 章の概要

破産理論における代表的なモデルが Lundberg モデルである．Lundberg モデルでは保険会社のサープラス（資本）は複合 Poisson 過程を用いて表現され，これが負になることを破産と呼ぶ．破産理論における典型的な問題が破産確率と破産時刻の分布を知ることである．古典的なモデルであるが，破産時刻，破産直前のサープラス，破産直後の欠損額の同時分布に着目した Gerber and Shiu (1997) and Gerber and Shiu (1998) によって再び注目されている．

破産理論に関連した有名な問題に，破産までに支払った累積配当額の最大化問題 (De Findtti の問題) がある．De Finetti の問題では，保険会社の最適な戦略はサープラスがある事前に決められた水準を上回った部分を全額配当する戦略 (barrier strategy) となる

ことが知られている．しかしながらこの戦略に従うと保険会社は最適化の結果必ず破産することになってしまい，保険会社の実際の行動と整合していないなどの指摘がされており，Gerber and Shiu (2006) により配当に制約を加える形で De Finetti の問題はより現実的なモデルに修正されている (Brown 運動のケースでは Asmussen and Taksar (1997) and Jeanblanc-Picqué and Shiryaev (1995))．しかしながら，Gerber and Shiu (2006) では Lundberg モデルと同様に契約者の事故率は既知の定数と仮定されている．

本章では Gerber and Shiu (2006) を基礎に，契約者の事故率が 2 値の確率変数を取ると仮定し，保険会社は契約者の事故率を直接観測できない状況で最適な保険料率を決定するモデルを定式化する．すなわち保険会社は，最適な保険料率 (経験料率) をサープラスの水準と契約者の事故の実績から決定する．本モデルは破産理論のモデルに不完全情報を取り入れることには成功したものの，契約者の最適化問題は考えないため Rothschild and Stiglitz (1976) のような逆選択の問題は依然として扱えていない．